

具有共振特征值的轨道翻转双同宿环分支

张天四¹, 朱德明²

(1. 上海理工大学 理学院, 上海 200093;
2. 华东师范大学 数学系, 上海 200062)

(郭兴明推荐)

摘要: 该文研究了具有轨道翻转的双同宿环四维系统, 在主特征值共振和沿轨道奇点处切方向共振下的两种分支. 我们分别在系统奇点小邻域内利用规范型的解构造一个奇异映射, 再在双同宿环的管状邻域内引起局部活动坐标架, 利用系统线性变分方程的解定义了一个正则映射, 通过复合两个映射而得到分支研究中一类重要的 Poincaré 映射, 经过简单的计算最终得到后继函数的精确表达式. 对分支方程细致地研究, 我们给出了原双同宿环的保存性条件, 并证明了大 1 -同宿环分支曲面, 2 -重 1 -周期轨分支曲面, 大 2 -同宿环分支曲面的存在性、存在区域和近似表达式, 及其分支出的大周期轨和大同宿轨的存在性区域和数量.

关键词: 双同宿轨; 轨道翻转; 周期轨; 共振

中图分类号: O175.12 **文献标识码:** A

1 问题与假设

近几十年来, 余维低于三的, 以及一些特殊的余维三的分叉现象得到了广泛研究, 结果相对比较完善(见文献[1-5]及其中文献). 但是它们都未涉及到轨道翻转或倾斜翻转. 1993 年 Sandstede 在文献[6]中首次考虑了轨道翻转的情况. 此后, 他又在文献[7]中通过构造模型研究了余维二的倾斜翻转和轨道翻转. 文献[8-9]中, 作者分别利用开折的技巧和数值模拟的方法研究了余维三的共振同宿翻转并获得了许多初创性的分支结果. 最近, 文献[10-11]着手考虑了两类翻转同宿轨道的共振分支, 文献[12-13]研究了非共振情形下的轨道翻转和倾斜翻转分支.

本文主要考虑了一类具有翻转双同宿环和两种共振特征值的四维系统. 因为限制在单个同宿环邻域内的分支行为在文献[10-11]中已经得到了讨论, 这里我们将重点分析大环的分支, 求出大周期轨道和大同宿轨道的存在区域及数量, 此结果比文献[2]中相应结果要丰富得多, 其中作者主要研究了在非共振和翻转情形下平面二次系统双同宿环分支出的极限环个数, 并且指出至多存在两个大周期轨. 这里, 大轨道的意思是指沿着原来的双同宿环运行的轨道.

考虑 C^r 系统及其未扰系统

$$z = f(z) + g(z, \epsilon), \quad (1)$$

收稿日期: 2006-08-29; 修订日期: 2007-08-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371040)

作者简介: 朱德明(1947), 男, 教授, 博士生导师(联系人, E-mail: dmzhu@math.ecnu.edu.cn).

$$z = f(z), \tag{2}$$

其中 $r \in \mathbb{R}^5, z \in \mathbb{R}^4, R^l, 0 < l < 1, l = 3, f(0) = g(0, 0) = g(z, 0) = 0$

分别记 W^s (或 W^{ss}) 和 W^u (或 W^{uu}) 为系统在 $z = 0$ 点处的稳定 (或强稳定) 流形和不稳定 (或强不稳定) 流形 首先我们给出以下 4 个假设:

(H1) 平衡点 $z = 0$ 为系统 (2) 的双曲平衡点, 其对应的线性矩阵 $Df(0)$ 有 4 个实简单特征值: $\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_2$, 并满足 $-\lambda_2 < -\lambda_1 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2$

(H2) 系统 (2) 有一条双同宿轨道 $\gamma = \{z = r_i(t) : t \in \mathbb{R}, r_i(0) = 0\}$ 且 $\dim(T_{r_i(t)} W^s \cap T_{r_i(t)} W^u) = 1, i = 1, 2$

(H3) 记 $e_{u,i}^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} r_i(t) / |r_i(t)|, e_i^- = \lim_{t \rightarrow -\infty} r_i(t) / |r_i(t)|$, 则 $e_{u,i}^+ \in T_0 W^{uu}$ 和 $e_i^- \in T_0 W^s$ 分别为对应于 λ_2 和 $-\lambda_1$ 的单位特征向量

显然, 我们有 $e_{u,1}^+ = -e_{u,2}^+$ 和 $e_1^- = -e_2^-$

(H4) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \{T_{r_i(t)} W^u, T_{r_i(t)} W^s, e_i^+\} = \mathbb{R}^4, \lim_{t \rightarrow -\infty} \{T_{r_i(t)} W^u, T_{r_i(t)} W^s, e_i^-\} = \mathbb{R}^4$,

其中 $e_i^+ \in T_0 W^u$ 是对应于 $\lambda_1, i = 1, 2$ 的单位特征向量

假设 (H4) 等价于

$$T_{r_i(t)} W^u = \text{span}\{e_i^-, e_{u,i}^+\}, t \rightarrow +\infty, T_{r_i(t)} W^s = \text{span}\{e_{s,i}^-, e_{u,i}^+\}, t \rightarrow -\infty,$$

$i = 1, 2$, 其中 $e_{s,i}^- \in T_1 W^s$ 为对应于 $-\lambda_2$ 的单位特征向量 显然, (H4) 是通有假设, 称为强倾斜性质 然而 (H3) 是非通有的, 它表明轨道 γ_i 在 $t \rightarrow -\infty$ 时发生翻转

2 Poincaré 映射

我们首先把系统 (1) 简化为规范型形式 我们知道总存在两个逐次的 C^r 与 C^{r-1} 变换, 在 $z = 0$ 的小邻域 U 内拉直 (见文献 [3, 10-13]) 不变流形 $W_{loc}^u = \{y = v = 0\}, W_{loc}^s = \{x = u = 0\}, W_{loc}^{uu} = W_{loc}^u = \{y = v = x = 0\}, W_{loc}^{ss} = \{x = u = 0, v_i = v_i(y)\}$, 其中 $v_i(0) = 0$, 使系统 (1) 成为如下的 C^{r-2} 形式

$$\begin{cases} \dot{x} = [\lambda_1(t) + o(1)] x + O(u) [O(y) + O(v)], \\ \dot{y} = [-\lambda_1(t) + o(1)] y + O(v) [O(x) + O(u)], \\ \dot{u} = [\lambda_2(t) + o(1)] u + O(x) [O(x) + O(y) + O(v)], \\ \dot{v} = [-\lambda_2(t) + o(1)] v + O(y) [O(x) + O(y) + O(u)], \end{cases} \tag{3}$$

其中 $z = (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4, \lambda_1(0) = \lambda_1, \lambda_2(0) = \lambda_2, \lambda_1(0) = \lambda_1, \lambda_2(0) = \lambda_2$

现在考虑 (2) 式的线性变分系统及其伴随系统

$$\dot{z} = Df(r_i(t))z, \tag{4}$$

$$\dot{z} = - (Df(r_i(t)))^* z \tag{5}$$

记 $r_i(t) = (r_i^x(t), r_i^y(t), r_i^u(t), r_i^v(t))$, 我们可以找到某时刻 T_i^0 和 T_i^1 使得 $r_i(-T_i^1) = \{0, 0, 0, 0\}, r_i(T_i^0) = \{0, 0, v_i^0, v_i^0\}$, 其中 v_i^0 充分小, 并满足 $\{(x, y, u, v) : |x|, |y|, |u|, |v| < 2\} \cap U, |v_i^0| < \epsilon, i = 1, 2$

引理 2.1^[3, 10-13] 系统 (4) 存在一个基解矩阵

$$Z_i(t) = (z_i^1(t), z_i^2(t), z_i^3(t), z_i^4(t)),$$

其中

$$z_i^1(t) \in (T_{r_i(t)} W^u)^c, z_i^2(t) \in (T_{r_i(t)} W^s)^c,$$

$$z_i^2(t) = -r_i(t) / |r_i^y(T_i^0)| T_{r_i(t)} W^u - T_{r_i(t)} W^s,$$

$$z_i^3(t) = T_{r_i(t)} W^u, z_i^4(t) = T_{r_i(t)} W^s,$$

满足

$$Z_i(-T_i^1) = \begin{pmatrix} w_i^{11} & 0 & 1 & w_i^{41} \\ w_i^{12} & 0 & 0 & w_i^{42} \\ w_i^{13} & w_i^{23} & 0 & w_i^{43} \\ 0 & 0 & 0 & w_i^{44} \end{pmatrix}, Z_i(T_i^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_i^{31} & 0 \\ 0 & 1 & w_i^{32} & 0 \\ 0 & 0 & w_i^{33} & 0 \\ w_i^{14} & w_i^{24} & w_i^{34} & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $w_i^{12} w_i^{33} w_i^{44} > 0, w_i^{23} < 0, |w_i^{24}| < 1$ 此外当 $T_i^j = 1$ 时, $i = 1, 2, j = 0, 1, w_i^{1j} (w_i^{12})^{-1} < 1, j = 2, |w_i^{3j} (w_i^{33})^{-1}| < 1, j = 3, |w_i^{4j} (w_i^{44})^{-1}| < 1, j = 4$

由矩阵论可知 $(Z_i^{-1}(t))^*$ 为伴随系统(5)的基解矩阵, 记为

$$i(t) = (i_1(t), i_2(t), i_3(t), i_4(t))$$

设

$$z = h_i(t) = r_i(t) + Z_i(t) N_i^* = r_i(t) + z_i^1(t) n_i^1 + z_i^3(t) n_i^3 + z_i^4(t) n_i^4 \quad (6)$$

则可在同宿轨道 i 上分别选取横截面 $S_i^0 = \{z = h_i(T_i^0): |x|, |y|, |u|, |v| < 2\} \cup U, S_i^1 = \{z = h_i(-T_i^1): |x|, |y|, |u|, |v| < 2\} \cup U, i = 1, 2$ (见图 1)

在变换(6)式下, 系统(1)变为

$$\dot{n}_i^j = (i_j(t))^* g(r_i(t), 0) + \text{h.o.t.}, \quad i = 1, 2; j = 1, 3, 4, \quad (7)$$

对此式两边从 $-T_i^1$ 到 T_i^0 积分可得

$$n_i^j(T_i^0) = n_i^j(-T_i^1) + M_i^j + \text{h.o.t.}, \quad i = 1, 2; j = 1, 3, 4, \quad (8)$$

其中

$$N_i(T_i^0) = (n_i^1(T_i^0), 0, n_i^3(T_i^0), n_i^4(T_i^0)) \quad S_i^0, N_i(-T_i^1) = (n_i^1(-T_i^1), 0, n_i^3(-T_i^1), n_i^4(-T_i^1)) \quad S_i^1,$$

$$M_i^j = \int_{-T_i^1}^{T_i^0} (i_j(t))^* g(r_i(t), 0) dt, \quad i = 1, 2; j = 1, 3, 4$$

称为 Melnikov 向量, 且

$$M_i^1 = \int_{-T_i^1}^{T_i^0} (i_1(t))^* g(r_i(t), 0) dt + \int_{-T_i^1}^{T_i^0} (i_2(t))^* g(r_i(t), 0) dt, \quad i = 1, 2 \text{ (见文献[3, 10-13])}$$

方程(8)则定义了映射 $P_i^2: S_i^1 \rightarrow S_i^0$ (见图 1)

现在, 我们着手建立由系统(3)在 $z = 0$ 的小邻域 U 内的流定义的映射 $P_1^1: S_2^0 \rightarrow S_1^1; q_2^1 \rightarrow q_1^1$ 和 $P_2^1: S_1^0 \rightarrow S_2^1; q_1^2 \rightarrow q_2^2$ 设系统轨道分别从点 q_2^0 到 q_1^1 的时间为 t_{12} , 从 q_1^0 到 q_2^1 的时间为 t_{21} 对应的 Silnikov 时间为 $s_k = e^{-\lambda t_k} k, k = 12, 21$ 则由系统(3)的解(见文献[10, 11])可以得到

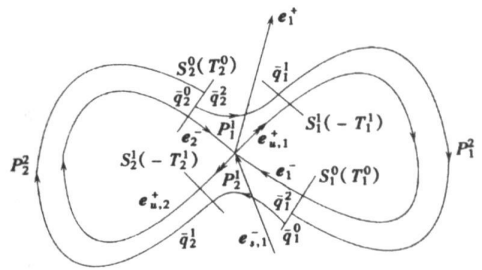


图 1 Poincaré 映射

$$\begin{aligned}
P_1^1: q_2^0(x_2^0, y_2^0, u_2^0, v_2^0) \mid q_1^1(x_1^1, y_1^1, u_1^1, v_1^1) \quad P_2^1: q_1^0(x_1^0, y_1^0, u_1^0, v_1^0) \mid q_2^1(x_2^1, y_2^1, u_2^1, v_2^1) \\
x_2^0 = s_{21}x_1^1 + h. o. t., \quad x_1^0 = s_{12}x_2^1 + h. o. t., \\
y_1^1 = s_{21}^{(\prime)'} y_2^0 + h. o. t., \quad y_2^1 = s_{12}^{(\prime)'} y_1^0 + h. o. t., \\
u_2^0 = s_{21}^{(\prime)'} u_1^1 + h. o. t., \quad u_1^0 = s_{12}^{(\prime)'} u_2^1 + h. o. t., \\
v_1^1 = s_{21}^{(\prime)'} v_2^0 + h. o. t., \quad v_2^1 = s_{12}^{(\prime)'} v_1^0 + h. o. t.
\end{aligned} \tag{9}$$

由(6)式和 $\mathbf{Z}_i(-T_i^1)$, $\mathbf{Z}_i(T_i^0)$ 的表达式, 我们可以得到新旧坐标 $q_2^j(x_2^j, y_2^j, u_2^j, v_2^j)$ $S_2^0, q_1^{2j+1}(x_1^{2j+1}, y_1^{2j+1}, u_1^{2j+1}, v_1^{2j+1})$ $S_1^1, P_1^1(q_2^j) = q_1^{2j+1}$ 和 $N_2^j = (n_2^{2j,1}, 0, n_2^{2j,3}, n_2^{2j,4}), N_1^{2j+1} = (n_1^{2j+1,1}, 0, n_1^{2j+1,3}, n_1^{2j+1,4})$ 之间的关系以及 q_1^{2j} 和 $q_2^{2j+1} = P_2^1(q_1^{2j})$ 与其新坐标之间的类似关系:

$$\begin{cases} n_i^{2j,1} = x_i^{2j} - w_i^{31}(w_i^{33})^{-1}u_i^{2j}, \\ n_i^{2j,3} = (w_i^{33})^{-1}u_i^{2j}, \\ n_i^{2j,4} = v_i^{2j} - v_i - w_i^{14}x_i^{2j} + (w_i^{14}w_i^{31} + w_i^{24}w_i^{32} - w_i^{34})(w_i^{33})^{-1}u_i^{2j}, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} n_i^{2j+1,1} = (w_i^{12})^{-1}y_i^{2j+1} - w_i^{42}(w_i^{12}w_i^{44})^{-1}v_i^{2j+1}, \\ n_i^{2j+1,3} = x_i^{2j+1} - w_i^{11}(w_i^{12})^{-1}y_i^{2j+1} + (-w_i^{41}(w_i^{44})^{-1} + w_i^{11}w_i^{42}(w_i^{44}w_i^{12})^{-1})v_i^{2j+1}, \\ n_i^{2j+1,4} = (w_i^{44})^{-1}v_i^{2j+1}, \end{cases} \tag{11}$$

$$y_i^{2j} \quad (-1)^{i-1}, \quad u_i^{2j+1} \quad (-1)^{i-1} \tag{12}$$

这样从(9)式至(13)式, 则有 Poincaré 映射:

$$\begin{aligned}
F_1 = P_1^2 \quad P_1^1: S_2^0 \quad S_1^0, \\
n_1^{2,1} = - (w_1^{12})^{-1} s_{21}^{(\prime)'} v_2^0 - w_1^{42}(w_1^{12}w_1^{44})^{-1} s_{21}^{(\prime)'} v_2^0 + \mathbf{M}_1^1 + h. o. t., \\
n_1^{2,3} = x_1^1 + (-w_1^{41}(w_1^{44})^{-1} + w_1^{11}w_1^{42}(w_1^{44}w_1^{12})^{-1}) s_{21}^{(\prime)'} v_2^0 + \\
w_1^{11}(w_1^{12})^{-1} s_{21}^{(\prime)'} + \mathbf{M}_1^3 + h. o. t., \\
n_1^{2,4} = (w_1^{44})^{-1} s_{21}^{(\prime)'} v_2^0 + \mathbf{M}_1^4 + h. o. t.; \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = P_2^2 \quad P_2^1: S_1^0 \quad S_2^0, \\
n_2^{2,1} = (w_2^{12})^{-1} s_{12}^{(\prime)'} v_1^0 - w_2^{42}(w_2^{12}w_2^{44})^{-1} s_{12}^{(\prime)'} v_1^0 + \mathbf{M}_2^1 + h. o. t., \\
n_2^{2,3} = x_2^1 + (-w_2^{41}(w_2^{44})^{-1} + w_2^{11}w_2^{42}(w_2^{44}w_2^{12})^{-1}) s_{12}^{(\prime)'} v_1^0 - \\
w_2^{11}(w_2^{12})^{-1} s_{12}^{(\prime)'} + \mathbf{M}_2^3 + h. o. t., \\
n_2^{2,4} = (w_2^{44})^{-1} s_{12}^{(\prime)'} v_1^0 + \mathbf{M}_2^4 + h. o. t. \tag{14}
\end{aligned}$$

(13) 式和(14)式, 以及(10)式共同定义了相关的后继函数

$$G(s_{21}, s_{12}, x_1^1, x_2^1, v_1^0, v_2^0) = (G_1^1, G_1^3, G_1^4, G_2^1, G_2^3, G_2^4) = (F_1(q_2^0) - q_1^0, F_2(q_1^0) - q_2^0)$$

如下

$$G_1^1 = - (w_1^{12})^{-1} \text{Ds}_{21}^{Q(L)/K_1(L)} - s_{12}x_2^1 - w_1^{31}(w_1^{33})^{-1} \text{Ds}_{12}^{K(L)/K_1(L)} - w_1^{42}(w_1^{12}w_1^{44})^{-1} s_{21}^{Q(L)/K_1(L)} v_2^0 + \mathbf{M}_1^1 L + h. o. t., \tag{15a}$$

$$G_1^3 = x_1^1 + w_1^{11}(w_1^{12})^{-1} \text{Ds}_{21}^{Q(L)/K_1(L)} + (w_1^{33})^{-1} \text{Ds}_{12}^{K(L)/K_1(L)} + (-w_1^{41}(w_1^{44})^{-1} + w_1^{11}w_1^{42}(w_1^{12}w_1^{44})^{-1}) s_{21}^{Q(L)/K_1(L)} v_2^0 + \mathbf{M}_1^3 L + h. o. t., \tag{15b}$$

$$G_1^4 = (w_1^{44})^{-1} s_{21}^{Q(L)/K_1(L)} v_2^0 - v_1^0 + w_1^{14} s_{12}x_2^1 + \mathbf{D}_1 + \mathbf{M}_1^4 L +$$

$$(w_1^{14} w_1^{31} + w_1^{24} w_1^{32} - w_1^{34})(w_1^{33})^{-1} \text{Ds}_{12}^{K(L)/K_1(L)} + \text{h. o. t.}, \tag{15c}$$

$$G_2^1 = (w_2^{12})^{-1} \text{Ds}_{12}^{Q(L)/K_1(L)} - s_{21} x_1^1 + w_2^{31} (w_2^{33})^{-1} \text{Ds}_{21}^{K(L)/K_1(L)} - w_2^{42} (w_2^{12} w_2^{44})^{-1} s_{12}^{Q(L)/K_1(L)} v_1^0 + \mathbf{M}_2^1 L + \text{h. o. t.}, \tag{15d}$$

$$G_2^3 = x_2^1 - w_2^{11} (w_2^{12})^{-1} \text{Ds}_{12}^{Q(L)/K_1(L)} - (w_2^{33})^{-1} \text{Ds}_{21}^{K(L)/K_1(L)} + (-w_2^{41} (w_2^{44})^{-1} + w_2^{42} w_2^{11} (w_2^{12} w_2^{44})^{-1}) s_{12}^{Q(L)/K_1(L)} v_1^0 + \mathbf{M}_2^3 L + \text{h. o. t.}, \tag{15e}$$

$$G_2^4 = (w_2^{44})^{-1} s_{12}^{Q(L)/K_1(L)} v_1^0 - v_2^0 + w_2^{14} s_{21} x_1^1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{M}_2^4 L - (w_2^{14} w_2^{31} + w_2^{24} w_2^{32} - w_2^{34})(w_2^{33})^{-1} \text{Ds}_{21}^{K(L)/K_1(L)} + \text{h. o. t.} \# \tag{15f}$$

3 共振条件下的分支结果

本节从寻找后继函数 $G = 0$ 在两种共振下的解开始展开分支研究# 首先为了以后记号方便, 我们定义以下几个区域:

$$\begin{aligned} E_+ &= \left\{ L: w_2^{12} \mathbf{M}_1^3 L > 0 \right\}, & E_- &= \left\{ L: w_2^{12} \mathbf{M}_1^3 L < 0 \right\}, \\ F_+ &= \left\{ L: w_1^{12} \mathbf{M}_2^3 L > 0 \right\}, & F_- &= \left\{ L: w_1^{12} \mathbf{M}_2^3 L < 0 \right\}, \\ R_+ &= \left\{ L: w_2^{12} (w_1^{11} \mathbf{M}_1^1 L + \mathbf{M}_1^3 L) > 0 \right\}, & R_- &= \left\{ L: w_2^{12} (w_1^{11} \mathbf{M}_1^1 L + \mathbf{M}_1^3 L) < 0 \right\}, \\ D_+ &= \left\{ L: w_1^{12} (w_2^{11} \mathbf{M}_2^1 L + \mathbf{M}_2^3 L) > 0 \right\}, & D_- &= \left\{ L: w_1^{12} (w_2^{11} \mathbf{M}_2^1 L + \mathbf{M}_2^3 L) < 0 \right\}, \\ 2_+^+ &= \left\{ L: w_2^{12} \mathbf{M}_2^1 L > 0, w_1^{12} \mathbf{M}_1^1 L > 0 \right\}, & 2_+^- &= \left\{ L: w_2^{12} \mathbf{M}_2^1 L > 0, w_1^{12} \mathbf{M}_1^1 L < 0 \right\}, \\ 2_-^+ &= \left\{ L: w_2^{12} \mathbf{M}_2^1 L < 0, w_1^{12} \mathbf{M}_1^1 L > 0 \right\}, & 2_-^- &= \left\{ L: w_2^{12} \mathbf{M}_2^1 L < 0, w_1^{12} \mathbf{M}_1^1 L < 0 \right\} \# \end{aligned}$$

显然如果 $\text{rank}(\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^1, \mathbf{M}_1^3, \mathbf{M}_2^3) = 4$, 以上 12 个区域及它们之间任意的交集都是非空的#

注意到, 当 $i = 1, 2, j = 3, 4$ 时, 方程 $G_i^j = 0$ 总可解出 x_i^1 和 v_i^0 , 从而 $G_1^1 = 0$ 和 $G_2^1 = 0$ 等价于

$$\begin{cases} - (w_1^{12})^{-1} \text{Ds}_{21}^{Q(L)/K_1(L)} - w_2^{11} (w_2^{12})^{-1} \text{Ds}_{12}^{Q(L)/K_1(L)} - w_1^{31} (w_1^{33})^{-1} \text{Ds}_{12}^{K(L)/K_1(L)} + s_{12} \mathbf{M}_2^3 L + \mathbf{M}_1^1 L + \text{h. o. t.} = 0, \\ (w_2^{12})^{-1} \text{Ds}_{12}^{Q(L)/K_1(L)} + w_1^{11} (w_1^{12})^{-1} \text{Ds}_{21}^{Q(L)/K_1(L)} + w_2^{31} (w_2^{33})^{-1} \text{Ds}_{21}^{K(L)/K_1(L)} + s_{21} \mathbf{M}_1^3 L + \mathbf{M}_2^1 L + \text{h. o. t.} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

并且称为分支方程#

现在我们进一步假设:

(A) $K_1 = Q$ #

这是主特征值共振情况# 为了方便讨论, 我们重新记小参数 L , 使得 $L = (A, L_1)$ 且 $Q_1(L) = K_1(L) + AK_1(L)$ #

如果 (16) 式有解 $s_{12} = 0$ 和 $s_{21} = 0$, 此时从 (16) 式得出 $\mathbf{M}_i^1 L + \text{h. o. t.} = 0, i = 1, 2$, 它定义了二个余维为一的曲面 $L_i = \left\{ L: \mathbf{M}_i^1 L + \text{h. o. t.} = 0 \right\}, i = 1, 2$ # 若 $\text{rank}(\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^1) = 2$, 则当 $L \perp L_1 \perp L_2$ 时原来的双同宿轨道 #1 和 #2 被保存# 显然 L_i 在 $L = 0$ 处有法向量 \mathbf{M}_i^1 #

如果 (16) 式存在解 $s_{21} = 0$ 和 $s_{12} > 0$, 则它可推出

$$\begin{aligned} - w_2^{11} (w_2^{12})^{-1} \text{Ds}_{12}^{2A} + \mathbf{M}_2^3 L s_{12} + \mathbf{M}_1^1 L + \text{h. o. t.} &= 0, \\ (w_2^{12})^{-1} \text{Ds}_{12}^{A} + \mathbf{M}_2^1 L + \text{h. o. t.} &= 0, \end{aligned}$$

其中 $K_2(L) > 2K_1(L)$ 或 $w_1^{31} = 0$ #

从而当 $w_2^{12}M_{2L}^1 < 0$ 时,有

$$s_{12} = (-D^1 w_2^{12} M_{2L}^1)^{1/(1+A)} + \text{h. o. t.} \#$$

将其代入第一个方程,便得到大的 1-同宿轨道分支曲面方程

$$H_1^1: M_{1L}^1 + (-D^1 w_2^{12} M_{2L}^1)^{1/(1+A)} (w_2^{11} M_{2L}^1 + M_{2L}^3) + \text{h. o. t.} = 0,$$

定义在区域 $L \in (2^+ H D_-) \cup G \in (2^- H D_+) \#$

类似的,我们可得到另一个大 1-同宿环分支曲面方程

$$H_2^1: M_{2L}^1 + (D^1 w_1^{12} M_{1L}^1)^{1/(1+A)} (w_1^{11} M_{1L}^1 + M_{1L}^3) + \text{h. o. t.} = 0,$$

且 $L \in (2^+ H R_-) \cup G \in (2^+ H R_+)$ 若(16) 式存在解 $s_{21} > 0$ 和 $s_{12} = 0 \#$

现在考虑(16) 式有解 $s_{12} > 0$ 和 $s_{21} > 0$ 的情形# 此时

$$s_{21}^{1+A} = -w_1^{12} w_2^{11} (w_2^{12})^{-1} s_{12}^{2+A} + D^1 w_1^{12} M_{2LS_{12}}^3 + D^1 w_1^{12} M_{1L}^1 + \text{h. o. t.}, \tag{17}$$

$$s_{12}^{1+A} = -w_2^{12} w_1^{11} (w_1^{12})^{-1} s_{21}^{2+A} - D^1 w_2^{12} M_{1LS_{21}}^3 - D^1 w_2^{12} M_{2L}^1 + \text{h. o. t.} \# \tag{18}$$

下面限定在区域 $D = \{L: |M_{2L}^3| = O(|M_{1L}^1|)\}$ 中寻求如下的解 $s_{12} = o(|M_{2L}^3|)^{1/(1+A)}$

和 $s_{21} = o(|M_{1L}^1|)^{1/(1+A)} \#$ 首先从(17) 式中可以求出 s_{21} , 然后把它代入(18) 式得

$$(s_{12}^{1+A} + D^1 w_2^{12} M_{2L}^1)^{1+A} = (-D^1 w_2^{12} M_{1L}^3)^{1+A} (D^1 w_1^{12} M_{2LS_{12}}^3 + D^1 w_1^{12} M_{1L}^1) + \text{h. o. t.} \# \tag{19}$$

记(19) 式左边部分为函数 $L(s_{12})$, 右边部分为函数 $N(s_{12})$, 那么它们在某点 s_{12} 相切的充要条件是(19) 式(即 $L(s_{12}) = N(s_{12})$) 和下式成立

$$(1+A)^2 (s_{12}^{1+A} + D^1 w_2^{12} M_{2L}^1)^A s_{12}^A = (-D^1 w_2^{12} M_{1L}^3)^{1+A} (D^1 w_1^{12} M_{2L}^3) + \text{h. o. t.} \# \tag{20}$$

(19) 式和(20) 式证明了 2-重大周期轨道分支曲面方程的存在性, 即

$$SN: w_2^{12} M_{2L}^1 + w_2^{12} M_{1L}^3 (D^1 w_1^{12} M_{1L}^1)^{1/(1+A)} + \text{h. o. t.} = 0,$$

其中 $L \in (2^+ H E_-) \cup G \in (2^+ H E_+)$ 和 $A > 0$, 且在 $L = 0$ 处以 M_{2L}^1 为法向量# 相应的切点为

$$s_{12} = ((w_2^{12} M_{2L}^1) / (w_1^{12} M_{1L}^1))^{1/A} (D^1 w_1^{12} M_{2L}^3)^{1/A} e^{-2} + \text{h. o. t.} = o(|M_{2L}^3|)^{1/(1+A)},$$

其中 $(w_2^{12} M_{2L}^1)(w_1^{12} M_{1L}^1)(w_1^{12} M_{2L}^3) > 0$ 和 $A > 0 \#$

注 3.1 由于我们的讨论区域为 $L \in D$, 曲面 SN 在 $A < 0$ 时不存在#

注意到 $L \in SN$ 意味着 $|M_{2L}^1| = O(|M_{1L}^1|^{1/(1+A)})$, 那么当 $L \in 2^+ H E_- \cup F_+$ 时, $L(0) = (D^1 w_2^{12} M_{2L}^1)^{1+A} + \text{h. o. t.} = O(|M_{1L}^1|) > O(|M_{1L}^1| |M_{1L}^3|^{1+A}) = N(0) > 0$, 即当 L 在曲面 SN 附近时, 直线 $W = N(s_{12})$ 位于曲面 $W = L(s_{12})$ 的下方# 可见当 L 位于曲面 SN 的指向 $-(\text{sgn} w_2^{12}) M_{2L}^1$ 的一侧时, 系统(1) 出现两条大 1-周期轨道; 而在另一侧时, 系统(1) 则没有大 1-周期轨道#

对于 $L \in 2^+ H E_+ \cup F_-$ 情况可类似讨论#

当 $A = 0$ 时, 由(17) 式和(18) 式可得

$$s_{12} + D^1 w_2^{12} M_{2L}^1 = (-D^1 w_2^{12} M_{1L}^3) (D^1 w_1^{12} M_{2LS_{12}}^3 + D^1 w_1^{12} M_{1L}^1) + \text{h. o. t.},$$

在一定区域内存在解 s_{12} , 此即系统(1) 存在一条大 1-周期轨道# 除此之外, 当 $A = 0$ 时在 $(Q, L) = (0, 0)$ 处还有 $\det 5G/5Q \neq 0$, 其中 $Q = Q(s_{21}, s_{12}, x_1^1, x_2^1, v_1^0, v_2^0) \#$ 因此由隐函数定理知, 在 $(Q, L) = (0, 0)$ 的小邻域内存在唯一一组函数 $s_{12} = s_{12}(L), s_{21} = s_{21}(L), x_1^1 = x_1^1(L), x_2^1 =$

$x_{1/2}(L), v_1^0 = v_1^0(L), v_2^0 = v_2^0(L)$, 且满足 $s_{12}(0) = 0, s_{21}(0) = 0, x_1^1(0) = 0, x_2^1(0) = 0, v_1^0(0) = 0, v_2^0(0) = 0$ 因此系统(1)最多存在一条唯一的双同宿轨道或者大同宿轨道或者大周期轨道# 这就意味着系统(1)不可能同时存在大 2- 周期轨道或者大 2- 同宿轨道#

现在我们研究在 $A \times 0$ 情况下大 2- 周期轨道和大 2- 同宿轨道分支曲面的存在性# 如前设 S_{21} 和 S_{12} 分别为系统轨道从点 $q_2^2 \in S_2^0$ 到 $q_1^3 \in S_1^1$ 和从点 $q_1^4 \in S_1^0$ 到 $q_2^3 \in S_2^1$ 的时间, 且 $P_1^1(q_2^2) = q_1^3, P_2^1(q_1^4) = q_2^3, q_2^4 = q_2^0$, 以及 $s_{21} = e^{-K_1(L)S_{21}}$ 和 $s_{12} = e^{-K_1(L)S_{12}}$ 类似于(15) 式, 我们可得相关的二次回归后继函数(为了篇幅简洁, 我们只列出 $G_i^1, i = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{aligned} G_1^1 &= - (w_1^{12})^{-1} Ds_{21}^{Q(L)/K_1(L)} - s_{12}x_2^1 - w_1^{31}(w_1^{33})^{-1} Ds_{12}^{K(L)/K_1(L)} - \\ &\quad w_1^{42}(w_1^{12}w_1^{44})^{-1} s_{21}^{Q(L)/K_1(L)} v_2^0 + M_1^1 L + \text{h. o. t.}, \\ G_2^1 &= (w_2^{12})^{-1} Ds_{12}^{Q(L)/K_1(L)} - s_{21}x_1^3 + w_2^{31}(w_2^{33})^{-1} Ds_{21}^{K(L)/K_1(L)} - \\ &\quad w_2^{42}(w_2^{12}w_2^{44})^{-1} s_{12}^{Q(L)/K_1(L)} v_1^2 + M_2^1 L + \text{h. o. t.}, \\ G_3^1 &= - (w_1^{12})^{-1} Ds_{21}^{Q(L)/K_1(L)} - s_{12}x_2^3 - w_1^{31}(w_1^{33})^{-1} Ds_{12}^{K(L)/K_1(L)} - \\ &\quad w_1^{42}(w_1^{12}w_1^{44})^{-1} s_{21}^{Q(L)/K_1(L)} v_2^2 + M_1^1 L + \text{h. o. t.}, \\ G_4^1 &= (w_2^{12})^{-1} Ds_{12}^{Q(L)/K_1(L)} - s_{21}x_1^4 + w_2^{31}(w_2^{33})^{-1} Ds_{21}^{K(L)/K_1(L)} - \\ &\quad w_2^{42}(w_2^{12}w_2^{44})^{-1} s_{12}^{Q(L)/K_1(L)} v_1^4 + M_2^1 L + \text{h. o. t.} \end{aligned}$$

本小节中, 我们主要考虑 $K_2(L) > 2K_1(L)$ (或 $w_i^{31} = 0, i = 1, 2$) 和 $Q_2(L) > 2Q_1(L)$ (或 $w_i^{42} = 0, i = 1, 2$) 的情况# 类似于(16)式可得分支方程

$$\begin{cases} - (w_1^{12})^{-1} Ds_{21}^{1+A} - w_2^{11}(w_2^{12})^{-1} Ds_{12}^{2+A} + s_{12}M_2^3 L + M_1^1 L + \text{h. o. t.} = 0, \\ (w_2^{12})^{-1} Ds_{12}^{1+A} + w_1^{11}(w_1^{12})^{-1} Ds_{21}^{2+A} + s_{21}M_1^3 L + M_2^1 L + \text{h. o. t.} = 0, \\ - (w_1^{12})^{-1} Ds_{21}^{1+A} - w_2^{11}(w_2^{12})^{-1} Ds_{12}^{2+A} + s_{12}M_2^3 L + M_1^1 L + \text{h. o. t.} = 0, \\ (w_2^{12})^{-1} Ds_{12}^{1+A} + w_1^{11}(w_1^{12})^{-1} Ds_{21}^{2+A} + s_{21}M_1^3 L + M_2^1 L + \text{h. o. t.} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

显然一条大 2- 同宿环的存在性等价于(21)式有解 $s_k = 0, k \in \{12, 21, \overline{12}, \overline{21}\}$, 其余 3 个解为正数# 而由对称性, 只需考虑情况 $s_{21} = 0$ 或者 $s_{12} = 0$ # 首先考虑情况 $s_{21} = 0$, (21) 式可分别解出

$$\begin{cases} s_{12} = (-D^{-1}w_2^{12}M_2^1 L)^{1/(1+A)} + \text{h. o. t.}, \\ s_{12} = \left[\frac{w_2^{12}M_1^1 L}{Dw_2^{11}} \right]^{1/(2+A)} + \text{h. o. t.}, \\ s_{21} = \left[-w_2^{11}w_1^{12}(w_2^{12})^{-1}(-D^{-1}w_2^{12}M_2^1 L)^{(2+A)/(1+A)} + D^{-1}w_1^{12}M_1^1 L + \right. \\ \left. D^{-1}w_1^{12}M_2^3 L(-D^{-1}w_2^{12}M_2^1 L)^{1/(1+A)} \right]^{1/(1+A)} + \text{h. o. t.}, \end{cases} \quad (22)$$

其中 $L \in 2^+ \cup D$ 和 $w_2^{11}w_1^{12}M_1^1 L > 0$ # 不难求得大 2- 同宿环分支曲面方程

$$H_1^2: w_2^{12}M_2^1 L + w_2^{12}M_1^3 L (D^{-1}w_1^{12}M_1^1 L)^{1/(1+A)} + D \left[\frac{w_2^{12}M_1^1 L}{Dw_2^{11}} \right]^{(1+A)/(2+A)} + \text{h. o. t.} = 0,$$

其中 $L \in 2^+ \cup D, w_2^{11}w_1^{12}M_1^1 L > 0$ 和 $A \times 0$, 且在 $L = 0$ 处以 M_1^1 为法向#

因为当 $L \in H_1^2$ 时, 有 $s_{21} = 0$, 那么对(22)式各式两边关于 L 求导后可得

$$s_{21L} = - (w_2^{12}M_2^1)/(w_2^{12}M_1^3 L) + \text{h. o. t.},$$

其中 $A > 0$ 这说明在曲面 H_1^2 的小邻域内, 当 $L \in 2^+ H E_-$ (或 $L \in 2^+ H E_+$) 时, s_{21} 沿方向 $w_1^{12} M_2^1$ 增加 (或减少), 从而系统 (1) 存在一条大 2- 周期轨道 #

当 $A < 0$ 时, 重新设 $t_k = s_k^{1+A}$, $k \in \{21, 12, \bar{2}1, \bar{1}2\}$, 并重复上面的过程可以得到

$$t_{21L} = D^{-1} w_1^{12} M_1^1 + \text{h. o. t.},$$

因此 t_{21} 沿方向 $w_1^{12} M_1^1$ 增加 #

类似地, 对于情形 $s_{12} = 0$, 我们可以同样获得大 2- 同宿环分支曲面方程

$$H_2^2: w_1^{12} M_1^1 L + w_1^{12} M_2^3 L (-D^{-1} w_2^{12} M_2^1 L)^{V(1+A)} - D \left[-\frac{w_1^{12} M_2^1 L}{\Omega w_1^{11}} \right]^{(1+A)/(2+A)} + \text{h. o. t.} = 0,$$

其中 $L \in 2^+ H Dc$, $w_1^{11} w_1^{12} M_2^1 L < 0$ 和 $A \neq 0$, 并在 $L = 0$ 处以 M_2^1 为法向, 这里区域 $Dc = \{L : |M_1^3 L| = O(|M_2^1 L|)\}$ # 同时在 $A > 0$ (或 $A < 0$) 时曲面 H_2^2 的指向 $w_1^{12} M_1^1$ (或 $-w_2^{12} M_2^1$) 的一侧, 系统 (1) 存在一条大 2- 周期轨道, 而在另一侧, 则无任何大 2- 周期轨道 #

综上所述, 我们给出主要定理如下:

定理 3.1 假设 (H1) ~ (H4), $\text{rank}(M_1^1, M_2^1, M_1^3, M_2^3) = 4$ 和 (A) 成立, 则以下结论为真:

1) 存在两个分别以 M_1^1 和 M_2^1 为法向量的余维为一的曲面 L_1 和 L_2 , 使得当 $L \in L_1 \cap L_2$ 时, 系统 (1) 在原来的同宿环 # 附近保存了双同宿环;

2) 当 $K_2 > 2K_1$ 时, 在区域 $L \in (2^+ H D^-) \cap G(2^- H D_+)$ 内, 存在一个大 1- 同宿环分支曲面 H_1^1 , 它与 L_1 在 $L = 0$ 处相切且有法向量 M_1^1 # 而当 $L \in H_1^1$ 时, 系统 (1) 在 # 附近有一条大 1- 同宿轨道;

在区域 $L \in (2^+ H R^-) \cap G(2^+ H R_+)$ 内, 存在另一个大 1- 同宿环分支曲面 H_2^1 , 它与 L_2 在 $L = 0$ 处相切并有法向量 M_2^1 # 当 $L \in H_2^1$ 时, 系统 (1) 在 # 附近有另一条大 1- 同宿轨道;

3) 在区域 $L \in (2^+ H E_- \cap H F_+) \cap G(2^+ H E_+ \cap H F_-) \cap HD$ 内, 存在一个 2- 重大 1- 周期轨道分支曲面 SN , 在 $L = 0$ 处且 $A > 0$ 时以 M_2^1 为法向量 # 当 $L \in SN$, 系统 (1) 有一条 2- 重大 1- 周期轨道, 当 L 位于曲面 SN 的指向 $-(\text{sgn} w_2^{12}) M_2^1$ 的一侧时, 系统 (1) 有两条大 1- 周期轨道, 但在另一侧时, 系统 (1) 无任何大 1- 周期轨道 # 当 $A = 0$ 时, 在以下 4 个区域里,

$$L \in 2^+ H E_-, L \in 2^+, L \in 2^- H E_+ \cap H F_+, L \in 2^- H F_+,$$

系统 (1) 无任何 2- 重大 1- 周期轨道而至多含有一条大 1- 周期轨道;

4) 对于 $K_2 > 2K_1$, $Q_2 > 2Q_1$, 则在区域 $L \in 2^+ H D$ 和 $w_2^{11} w_2^{12} M_1^1 L > 0$ 内, 存在一个在 $L = 0$ 处以 M_1^1 为法向量的大 2- 同宿环分支曲面 H_1^2 , 使得在 $A > 0$ (或 $A < 0$) 且 L 位于曲面 H_1^2 的指向 $(\text{sgn} w_2^{12}) M_2^1$ (或 $(\text{sgn} w_1^{12}) M_1^1$) 的一侧时, 系统 (1) 有一条大 2- 周期轨道, 而在另一侧, 系统 (1) 无任何大 2- 周期轨道;

在区域 $L \in 2^+ H Dc$ 和 $w_1^{11} w_1^{12} M_2^1 L < 0$ 内, 存在另一个在 $L = 0$ 处以 M_2^1 为法向量的大 2- 同宿环分支曲面 H_2^2 , 使得在 $A > 0$ (或 $A < 0$) 且 L 位于曲面 H_2^2 的指向 $(\text{sgn} w_1^{12}) M_1^1$ (或 $-(\text{sgn} w_2^{12}) M_2^1$) 一侧时, 系统 (1) 有一条大 2- 周期轨道, 而在另一侧, 系统 (1) 无任何大 2- 周期轨道 #

现在我们考虑翻转轨道切方向上的共振, 即假设

$$(B) K_2 = Q_1 \#$$

通过与上节完全类似的过程可推导出大 n - 同宿环分支曲面和 2- 重大周期轨道分支曲

面, $n = 1, 2\#$ 记 $K_2(L) = (1 + B)Q_1(L)$, 其中 $L = (B, L_2)$, 我们有下面的定理:

定理 3.2 假设(H1)~(H4), $\text{rank}(M_1^1, M_2^1, M_1^3, M_2^3) = 4$ 和(B)成立, 则以下结论为真:

1) 当 $w_2^{12}M_2^1L < 0$ 时, 存在一个大 1-同宿轨道分支曲面

$$H_1^1: M_1^1L + (-D^1w_2^{12}M_2^1L)^{(K_1(L))/(Q_1(L))}(M_2^3L - w_1^{31}(w_1^{33})^{-1}D(-D^1w_2^{12}M_2^1L)^{(K_2(L)-K_1(L))/(Q_1(L))}) + \text{h. o. t.} = 0,$$

且在 $B > 0$ (或 $B < 0$) 时和 $L = 0$ 处以 M_1^1 (或 M_2^1) 为法向量# 如果 $L \perp H_1^1$, 系统(1)在 # 附近有一条大 1-同宿轨道;

当 $w_1^{12}M_1^1L > 0$ 时, 存在另一个大 1-同宿轨道分支曲面

$$H_2^1: M_2^1L + (D^1w_1^{12}M_1^1L)^{(K_1(L))/(Q_1(L))}(M_1^3L + w_2^{31}(w_2^{33})^{-1}D(D^1w_1^{12}M_1^1L)^{(K_2(L)-K_1(L))/(Q_1(L))}) + \text{h. o. t.} = 0,$$

在 $B > 0$ (或 $B < 0$) 时和 $L = 0$ 处以 M_2^1 (或 M_1^1) 为法向量# 系统(1)在 # 附近及 $L \perp H_2^1$ 时有另一条大 1-同宿轨道;

2) 当 $L \perp (2^+_{H E_- H F_+}) G (2^+_{H E_+ H F_-}) H D$ 时, 存在一个 2-重大 1-周期轨道分支曲面

$$SN: w_2^{12}M_2^1L + w_2^{12}M_1^3L (D^1w_1^{12}M_1^1L)^{(K_1(L))/(Q_1(L))} + \text{h. o. t.} = 0,$$

并在 $L = 0$ 处以 M_2^1 为法向量# 系统(1)在 $L \perp SN$ 时有一条 2-重大 1-周期轨道, 且当 L 位于曲面 SN 指向 $-(\text{sgn}w_2^{12})M_2^1$ 的一侧时, 系统(1)有两条大 1-周期轨道, 而在另一侧时, 系统(1)无任何大 1-周期轨道;

3) 当 $L \perp 2^+_{H D}$ 和 $w_1^{31}w_1^{33}M_1^1L > 0$ 时, 存在一个大 2-同宿轨道分支曲面

$$H_1^2: w_2^{12}M_2^1L + w_2^{12}M_1^3L (D^1w_1^{12}M_1^1L)^{(K_1(L))/(Q_1(L))} + D(w_1^{33}M_1^1L)/(Dw_1^{31})^{(Q_1(L))/(K_2(L))} + Dw_2^{12}w_1^{31}(w_2^{33})^{-1}(D^1w_1^{12}M_1^1L)^{(K_2(L))/(Q_1(L))} + \text{h. o. t.} = 0,$$

并在 $L = 0$ 处以 M_1^1 为法向量# 系统(1)在 L 指向曲面 H_1^2 的 $(\text{sgn}w_2^{12})M_2^1$ 一侧时有一条大 2-周期轨道;

当 $L \perp 2^+_{H Dc}$ 和 $w_2^{31}w_2^{33}M_2^1L < 0$ 时, 存在另一个大 2-同宿轨道分支曲面

$$H_2^2: w_1^{12}M_1^1L + w_1^{12}M_2^3L (-D^1w_2^{12}M_2^1L)^{(K_1(L))/(Q_1(L))} - D(-w_2^{33}M_2^1L)/(Dw_2^{31})^{(Q_1(L))/(K_2(L))} - Dw_1^{12}w_1^{31}(w_1^{33})^{-1}(-D^1w_2^{12}M_2^1L)^{(K_2(L))/(Q_1(L))} + \text{h. o. t.} = 0,$$

在 $L = 0$ 处以 M_2^1 为法向量# 系统(1)在 L 位于曲面 H_2^2 的 $(\text{sgn}w_1^{12})M_1^1$ 一侧时有一条大 2-周期轨道, 而在另一侧系统(1)无任何大 2-周期轨道#

[参 考 文 献]

- [1] Chow S N, Deng B, Fiedler B. Homoclinic bifurcation at resonant eigenvalues[J]. J Dyn Syst Diff Eqs, 1990, 2(2): 177-244.
- [2] HAN Maø an, CHEN Jian. On the number of limit cycles in double homoclinic bifurcations[J]. Sci China, 2000, 43(9): 914-928.
- [3] JIN Yin-lai, ZHU De-ming. Bifurcation of rough heteroclinic loop with two saddle points[J]. Sci China, 2003, 46(4): 459-468.

- [4] TIAN Qian-ping, ZHU De-ming. Bifurcation of nontwisted heteroclinic loop[J]. *Sci China, Ser A*, 2000, **43**(8): 818-828.
- [5] ZHU De-ming, XIA Zhi-hong. Bifurcation of heteroclinic loops[J]. *Sci China, Ser A*, 1998, **41**(8), 837-848.
- [6] Sandstede B. Verzweigungstheorie Homokliner Verdopplungen[D]. Ph D Thesis. Berlin: Freie Universität Berlin, 1993. Institut für Angewandte Analysis und Stochastik[R]. Report No. 7, Berlin.
- [7] Sandstede B. Constructing dynamical systems having homoclinic bifurcation points of codimension two[J]. *J Dyn Diff Eqs*, 1997, **9**(2): 269-288.
- [8] Homburg A J, Krauskopf B. Resonant homoclinic flip bifurcations[J]. *J Dyn Diff Eq*, 2000, **12**(4): 807-850.
- [9] Oldeman B E, Krauskopf B, Champneys A R. Numerical unfoldings of codimension-three resonant homoclinic flip bifurcations[J]. *Nonlinearity*, 2001, **14**(3): 597-621.
- [10] ZHANG Tian-si, ZHU De-ming. Codimension 3 homoclinic bifurcation of orbit flip with resonant eigenvalues corresponding to the tangent directions[J]. *Int J Bifurcation Chaos*, 2004, **14**(12): 4164-4175.
- [11] ZHANG Tian-si, ZHU De-ming. Homoclinic bifurcation of orbit flip with resonant principal eigenvalues [J]. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2006, **22**(3): 855-864.
- [12] SHUI Shu-liang, ZHU De-ming. Codimension 3 bifurcations of homoclinic orbits with orbit flips and inclination flips[J]. *Chin Ann Math*, 2004, **25B**(4): 555-566.
- [13] SHUI Shu-liang, ZHU De-ming. Codimension 3 nonresonant bifurcations of homoclinic orbits with two inclination flips[J]. *Sci China, Ser A*, 2005, **48**(2): 248-260.

Bifurcations of Double Homoclinic Flip
Orbits With Resonant Eigenvalues

ZHANG Tian-si¹, ZHU De-ming²

(1. College of Science, University of Shanghai for Science and Technology,
Shanghai 200093, P. R. China;

2. Department of Mathematics, East China Normal University,
Shanghai 200062, P. R. China)

Abstract: Concerns double homoclinic loops with orbit flips and two resonant eigenvalues in a four-dimensional system. We use the solution of a normal form system to construct a singular map in some neighborhood of the equilibrium, and the solution of a linear variational system to construct a regular map in some neighborhood of the double homoclinic loops, then compose them to get the important Poincaré map. A simple calculation gives explicitly an expression of the associated successor function. By a delicate analysis of the bifurcation equation, we obtain the condition that the original double homoclinic loops are kept, and prove the existence and the existence regions of the large 1-homoclinic orbit bifurcation surface, 2-fold large 1-periodic orbit bifurcation surface, large 2-homoclinic orbit bifurcation surface and their approximate expressions. We also locate the large periodic orbits and large homoclinic orbits and their number.

Key words: double homoclinic orbit; orbit flip; periodic orbit; resonance