

均匀自由流动的非牛顿流体中 连续表面上的磁流体动 力学流动和热传递*

B·萨胡, H·G·沙尔马

(鲁奇理工学院 数学系, 乌塔拉坎德邦 247667, 印度)

(周哲玮推荐)

摘要: 分析在平行自由流动的非牛顿黏弹性导电液体中, 连续平展表面移动时的稳态流和热传递特性, 该流动处于横向均匀磁场作用下. 以二阶流体构建它的本构方程, 得到了速度分布和温度断面图的数值结果. 讨论了诸如黏弹性参数、磁场参数和 Prandtl 数等不同物理参数对诸种动量和热传递特性的影响, 并给出相关图示.

关键词: 二阶流体; 自由流; 热传递; 磁场; 有限差分法

中图分类号: O373; O361.3 文献标识码: A

引言

在过去几十年里, 学术界对连续移动表面上稳态层状边界层流动的问题进行了深入的研究, 并在工业领域里得到了广泛的应用, 例如, 塑料片的空气动力学挤出成型、大型钢板在冷却槽中的冷却过程、沿着物料搬运带的边界层、浓缩过程中沿着液膜的边界层, 还有, 聚合板或纤维丝从模具中连续挤出或长的线状物在进料辊和缠绕辊之间的移动, 等等. 和 Blasius 流动^[1]不大相同, 这种流动时常被称为 Sakiadis 流动, 由于 Sakiadis^[2,3]最早展开这方面研究而命名. Sakiadis 研究的起因是, 需提前计算出施加的力, 以使一块板能稳定地穿过静止的不可压牛顿流体. 根据边界层理论, 他成功地计算出所需力的大小, 精确度还很高. 从此以后, 许多作者对此问题的方方面面都展开了研究. Crane^[4]将 Sakiadis 的研究扩展到张紧面时的情况. 随后, Gupta 等人^[5]通过类似于吸入或者吹出的手法, 研究了热传递和质量传递. 上述研究限制在牛顿流体的流动.

在流体流经连续移动表面的研究中, 另一个问题引起了研究者们特别的重视, 那就是被称为非牛顿流体的流体动力学问题. 非牛顿流体是指流体不满足通常假设的应力和应变率之间的线性关系. 工业领域里经常遇到的是非牛顿流体. 现在有许多描述非牛顿流体的模型. 可是, 这些模型或本构方程并不能描述这些非牛顿流体的所有特性, 例如, 法向应力差、剪切变薄

* 收稿日期: 2006-05-08; 修订日期: 2007-06-07

基金项目: 印度政府人力资源发展部提供的基金

作者简介: B. Sahoo, 教授, 博士(联系人. E-mail: bikasdna@iitr.in).

本文原文为英文, 海治译, 张禄坤校.

或剪切增厚、应力弛豫、弹性效应和记忆效应,等等。在这些模型当中,微分型流体,例如二阶流体、三阶流体和四阶流体,由于其表达的简洁和优雅,而受到了广泛的关注。边界值问题(BVP)的特征控制着这些流体的流动,流体的黏弹性提高了控制流动的微分方程的阶数,因此相应的边界条件不足以求解该方程。Rivlin 和 Eeicksen^[6]首先提出了特别适用的二阶流体模型。该模型的本构方程为:

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \mu\boldsymbol{A}_1 + \alpha_1\boldsymbol{A}_2 + \alpha_2\boldsymbol{A}_1^2, \quad (1)$$

式中 \boldsymbol{T} 为 Cauchy 应力张量,由于不可压缩性的约束条件,得到球应力 $-p\boldsymbol{I}$, μ 为通常的黏性系数, α_1 和 α_2 为材料模量,即通常称为的正交应力模量,张量 \boldsymbol{A}_1 和 \boldsymbol{A}_2 为前面两个 Rivlin-Eeicksen 张量,定义为:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T, \quad \boldsymbol{A}_2 = \frac{d\boldsymbol{A}_1}{dt} + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{A}_1, \quad (2)$$

式中 d/dt 为物质导数, $\boldsymbol{L} = \nabla \cdot \boldsymbol{V}$ 。Dunn 和 Fosdick^[7]及 Dunn 和 Rajagopal^[8]给出了模型(1)的历史及其争论点。我们这里假设的流体模型正是方程(1)。

如果由方程(1)给出的流体模型与热动力学是协调一致的,则

$$\mu \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0. \quad (3)$$

也就是说,在所有运动意义上流体满足 Clausius-Duhem 不等式,并且假设流体特定的 Helmholtz 自由能在平衡状态为最小值。Dunn 和 Fosdick^[7]证明了,材料模量满足(3)式时的二阶流体呈现出令人满意的稳定性。Fosdick 和 Rajagopal^[9]放宽了 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ 的条件,并指出,如果 $\alpha_1 < 0$,则流体表现出反常的特性,材料的流变性无法预测。Galdi 等人^[10]将 Dunn 和 Fosdick^[7]、Fosdick 和 Rajagopal^[9]的结果扩展到 $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ 无边界区域。但是我们这里仍将假设模型满足条件(3)。

Fox 等人^[11]研究了幂律流体在一个运动表面上的流动。Rajagopal 等人^[12]研究了黏弹性流体在张紧面上的流动,并得到了具有极小黏弹性参数边界层方程的数值近似解。Troy 等人^[13]给出了具有线性伸展边界条件问题的精确解。最近, Sadeghy 和 Sharifi^[14]、Sadeghy 等人^[15]研究了在移动板上黏弹性的二阶流体。

在前面提到的研究中,移动表面周围为静止的流体介质,其自由流的速度为 0。Hasanien^[16]、Hady 和 Gorla^[17]研究了在平行自由流中,黏弹性二阶流体在连续表面上的流动和热传递。详细资料可以参阅文献[18-21],它们考虑了均匀自由流表面上的流动和热传递。

本文着重研究在横向均匀磁场作用下,平行自由流连续表面上的流动和热传递。

1 流体分析

考虑满足模型(1)到模型(3)的导电流体的二维稳态层状不可压流动,在自由流速度为 U_∞ 的黏弹性流体介质中,流经过一个以常数速度 U_w 的连续移动平板,假设板和流体的移动方向相同。

图1表示了流动区域和坐标系。坐标轴的原点取在板进入流体介质的开始处, y -轴与板正交。一个均匀磁场 $\boldsymbol{B} = (0, B_0, 0)$ 施加在 y -轴方向上,特征长度 L 为狭缝到缠绕辊之间的距离,速度归一化为流动问题中的最大速度,即参考速度 U_r 如下(见文献[16]):

$$U_r = \begin{cases} U_w, & U_w > U_\infty, \\ U_\infty, & U_w < U_\infty. \end{cases} \quad (4)$$

连续性方程和运动方程为:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (5)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (6)$$

式中 ρ 为流体的密度, \mathbf{J} 为电流, 如果以下假设成立, 该项可简化为洛伦兹力 ($\mathbf{J} \times \mathbf{B}$):

- 所有物理量为常数;
- 磁场 \mathbf{B} 与速度 \mathbf{V} 正交, 感应磁场与外加磁场相比较小;
- 电场忽略不计。

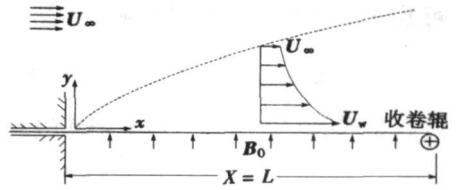


图1 流动区域示意图

当磁场雷诺数较小并且没有位移电流时, 这些假设成立。对二维稳态流, 通过边界层近似将连续方程(5)和运动方程(6)简化为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha_1 \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] - \sigma B_0^2 u, \quad (8)$$

其中 u 和 v 分别表示沿 x 和 y 方向的速度分量。通过边界层近似, 温度 T 的能量方程为:

$$\rho c_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (9)$$

其中 c_p 为常压力下的比热, k 为流体的导热率。

使用无量纲变量:

$$x = \frac{x}{L}, \quad y = \frac{y}{L}, \quad u = \frac{u}{U_r}, \quad v = \frac{v}{U_r}, \quad T = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad (10)$$

控制方程(7)~控制方程(9)简化为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] - \frac{L \sigma B_0^2}{\rho U_r} u, \quad (12)$$

$$Pr \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (13)$$

其中 $Re = U_r L / \nu$, $Pr = \mu c_p / k$, $\alpha = \alpha_1 / (\rho L^2)$ 分别为流体的雷诺数、Prandtl 数和无量纲黏弹性参数。

这里以及后面的公式中去掉变量上面的横杠号。边界条件如下给出:

$$\begin{cases} u = \frac{U_w}{U_r}, \quad v = 0, \quad T = 1, & y = 0, \\ u \rightarrow \frac{U_\infty}{U_r}, \quad T \rightarrow 0, & y \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (14)$$

在推导方程(12)的过程中, 使用了通常假设的边界层近似, 由于正应力的条件与剪应力条件的数量级同阶, 从而 ν 和 α 同为 $O(\delta^2)$ 阶, 其中 δ 为边界层厚度(见文献[16, 22])。

继续上面的分析。我们定义流函数 $\psi(x, y) = \psi / (U_r L)$, 使得 $u = \partial \psi / \partial y$ 和 $v = -\partial \psi / \partial x$,

可验证连续性方程得到了满足。进一步定义:

$$\zeta(x, y) = \sqrt{\frac{Re}{x}} \cdot y, \quad \phi(x, y) = \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{Re/x}}, \quad \theta(\zeta) = T(x, y), \quad (15)$$

将表达式(15)代入到式(12)和式(13), 得到:

$$\varphi \Theta + \frac{1}{2} \varphi \varphi'' = \frac{K}{2} (\varphi'^2 - 2\varphi' \varphi'' - \varphi \varphi''') + N \varphi, \quad (16)$$

$$\theta'' + \frac{1}{2} Pr \varphi \theta' = 0, \quad (17)$$

相应的边界条件为:

$$\begin{cases} \varphi = 0, \quad \phi = \frac{U_w}{U_r}, \quad \theta = 1, & \zeta = 0, \\ \phi \rightarrow \frac{U_\infty}{U_r}, \quad \theta \rightarrow 0, & \zeta \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (18)$$

其中撇号代表对 ζ 的微分, $K (= \alpha U_r / (\nu x))$ 代表无量纲黏弹性参数, $N = L \sigma B^2 / (\rho U_r)$ 表示磁性参数。

壁面剪应力可以用无量纲表面摩擦应力系数表示:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_r^2} = - \frac{\phi'(0)}{\sqrt{x Re}}. \quad (19)$$

由 Fourier 原理给出的当地热通量为:

$$q_w(x) = -k \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} = - \left[\frac{k}{L} \right] (T_w - T_\infty) \sqrt{\frac{Re}{x}} \theta'(0). \quad (20)$$

当地热传递系数为:

$$h(x) = \frac{q_w(x)}{(T_w - T_\infty)}. \quad (21)$$

Nusselt 数为:

$$Nu_x = \frac{h(x)L}{k} = - \theta'(0) \left[\frac{Re}{x} \right]^{1/2}. \quad (22)$$

2 数值解

在边界条件(18)下, 通过二阶有限差分法, 求解非线性方程组(16)和(17)。显而易见, 方程是六阶的, 但现在仅有 5 个边界条件。实际上, 由于存在应力项 dA_1/dt , 控制二阶流体方程的阶数高于 Navier-Stokes 方程。因此, 方程的数值解无法通过任何标准积分过程得到, 经典的解法是使用摄动技术。Beard 和 Walters^[23] 首先使用该技术得到了二阶流体的驻点流, 后来在其他研究非牛顿流问题的专家中也使用了同样的技术^[24-25]。在大多数研究中, 由于缺少一个额外的边界条件, 不得不作为奇异摄动问题来处理。不过, 由于最近对新算法的研究, 人们对摄动解的适用性产生了严重的怀疑^[15, 23]。显然, 若存在额外的边界条件, 就没有必要使用摄动法。目前有一些成功地对某些无界流动区域增加额外边界条件的尝试^[26-27]。在求解类似问题时, Davis^[28] 建议, 当黏弹性参数为 0 时, 通过求解逼近牛顿解来获取额外的边界条件。本文假设, φ 的所有导数在 $\zeta = 0$ 处有界。这意味着, 应力和应力梯度在壁面上保持有界, 在该假设下, 若取 $\zeta = 0$, 通过边界条件(18)可发现:

$$\varphi \Theta(0) = \frac{K}{2} [\varphi''^2(0) - 2\phi'(0) \phi''(0)] + N \phi(0), \quad (23)$$

这就是求解方程组(16)~(18)的额外边界条件。因为 $\phi'(0)$ 不能提前获知, 需要通过打靶法得到 $\psi(0)$ 的修正值。实际上, 我们先猜测 $\phi'(0)$ 和 $\theta'(0)$ 的初始值, 通过方程(23) 可以从 $\phi'(0)$ 得到 $\psi(0)$ 的值, 这样在 $\zeta = 0$ 处就有 6 个边界条件, 足够用标准算法去求解具有初值问题的方程组(16)和(17)了。本文采用四阶的 Runge-Kutta 算法求解初值问题, 通过 Broyden 的算法^[29] 改进了猜测的 $\phi'(0)$ 和 $\theta'(0)$ 的初始值, 以分别满足无穷大时的边界条件, 即 $\phi(\infty) = 0$ 和 $\theta(\infty) = 0$ 。

为了阐述文中提出的求解算法, 先引入如下变量:

$$y_1 = \psi, \quad y_2 = \phi, \quad y_3 = \phi', \quad y_4 = \theta \quad (24)$$

控制方程组(16)~(17)可写为:

$$y_3' + \frac{1}{2}y_1y_3 - \frac{K}{2}(y_3^2 - 2y_2y_3 - y_1y_3') - Ny_2 = 0, \quad (25)$$

$$y_4' + \frac{1}{2}Pr y_1 y_4' = 0, \quad (26)$$

$$y_2' = y_3, \quad (27)$$

$$y_1' = y_2, \quad (28)$$

边界条件(18)变为:

$$\begin{cases} \zeta = 0: & y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{U_w}{U_r}, \quad y_4 = 1, \\ \zeta \rightarrow \infty: & y_2 \rightarrow \frac{U_\infty}{U_r}, \quad y_4 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (29)$$

引入网格定义:

$$\zeta_i = ih, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (30)$$

其中 n 为一个足够大的数, 对方程组(25)~(28)的所有各项使用中心差分公式, 得到如下的差分方程:

$$\frac{y_3^{j+1} - y_3^{j-1}}{2h} + \frac{1}{2}y_1^j y_3^j - \frac{K}{2} \left[(y_3^j)^2 - 2y_2^j y_3^j - y_1^j \left(\frac{y_3^{j+1} - 2y_3^j + y_3^{j-1}}{h^2} \right) \right] - Ny_2^j = 0, \quad (31)$$

$$\frac{y_4^{j+1} - 2y_4^j + y_4^{j-1}}{h^2} + \frac{1}{2}Pr y_1^j \left(\frac{y_4^{j+1} - y_4^{j-1}}{2h} \right) = 0, \quad (32)$$

$$y_2^{j+1} = y_2^j + \frac{h}{2}(y_3^j + y_3^{j+1}), \quad (33)$$

$$y_1^{j+1} = y_1^j + \frac{h}{2}(y_2^j + y_2^{j+1}). \quad (34)$$

请注意, 在方程组(25)和(26)中, 在网格点 j 处使用中心差分公式。而在方程组(27)和(28)中, 使用同样的方法, 但中心点为 $j + 1/2$, 并使用网格点 j 和 $j + 1$ 处 y 的平均值。这就保证了离散化格式具有 $O(h^2)$ 的精确度。

可以看出, 式(31)和式(32)分别为 y_3 和 y_4 的 3 项的递推关系式。因此, 为了进行递推过程, 除了需要知道 $y_3^{(0)}$ 和 $y_4^{(0)}$ 的值外, 还需要知道 $y_3^{(1)}$ 和 $y_4^{(1)}$ 的值。这些值可以通过 $\zeta = 0$ 处的 Taylor 级数展开得到。找到了 $y_3^{(1)}$ 和 $y_4^{(1)}$, 就可以分别从式(33)得到 $y_2^{(1)}$ 、从式(34)得到 $y_1^{(1)}$ 。不断重复递推计算, 直到计算出所有网点上 y_1, y_2, y_3, y_4 的值。在随后的点, $y_2^{(n)}$ 和

$y_4^{(n)}$ 或者等值的 $\phi(\infty)$ 和 $\theta(\infty)$, 与无限大处的边界条件(29) 进行比较, 通过采用 Broyden 算法, 对猜测的 $\phi'(0)$ 和 $\theta'(0)$ 的初始值不断进行校正, 调整至预期精度(比如 10^{-6}), 直到满足收敛准则为止。最后通过调用 Richardson 外插法, 使结果得到相当的改进, 算法的精度上升到 $O(h^4)$ 阶。

Teipel^[30] 曾试图使用类似上面的方法, 求解二阶流体的驻点流。Ariel^[31] 修正了该算法中的某些缺陷。后来不少作者^[14-15, 32-33] 成功地采用了类似的方法。

3 结果和讨论

上面阐述的技术编写成 FORTRAN 90 程序, 并在奔腾 IV 个人计算机上运行。在程序运行过程中, 数值上无穷大的 ζ_∞ 值保持不变。需要指出的是, 当求解二阶流体的驻点流时, Garg 和 Rajagopal^[26] 认为, 对 K 值接近 100 时, ζ_∞ 必须增加至 60。本算法的突出特点是, 对所有 K 值都是可计算的, 没有必要对 $K = 0$ 、逐渐变小的 K 值、中等大的 K 值或较大的 K 值作任何调整。

表 1 当 $N = 0$ 和 $Pr = 5.0$ 时 $\phi'(0)$ 和 $\theta'(0)$ 的值

K	U_w	U_∞	观测值 ^[16]		本文解	
			$\phi'(0)$	$\theta'(0)$	$\phi'(0)$	$\theta'(0)$
0.0	1.0	0.0	-0.443 7	-1.153 63	-0.443 71	-1.153 63
	0.0	1.0	0.332 06	-0.576 69	0.332 06	-0.576 68
0.05	1.0	0.0	-0.445 87	-1.153 39	-0.445 79	-1.153 38
	0.0	1.0	0.322 40	-0.571 89	0.322 38	-0.571 88
0.1	1.0	0.0	-0.447 18	-1.153 14	-0.447 17	-1.153 14
	0.0	1.0	0.312 74	-0.567 03	0.312 73	-0.567 03
0.2	1.0	0.0	-0.449 81	-1.152 65	-0.449 78	-1.152 64
	0.0	1.0	0.293 42	-0.557 11	0.293 41	-0.557 06

表 2 当 $K = 1.0$ 和 $Pr = 3.0$ 时 $\phi'(0)$ 和 $\theta'(0)$ 的值

N	U_w	U_∞	$\phi'(0)$	$\theta'(0)$	U_w	U_∞	$\phi'(0)$	$\theta'(0)$
0.5	1.0	0.0	-1.902 10	-0.621 99	0.0	1.0	0.045 44	-0.283 22
		0.2	-1.878 68	-0.636 04	0.2		-0.098 42	-0.416 53
		0.4	-1.849 17	-0.651 10	0.4		-0.308 69	-0.522 72
1.0	1.0	0.0	-2.250 53	-0.568 94	0.0	1.0	0.008 10	-0.213 97
		0.2	-2.244 26	-0.575 75	0.2		-0.216 06	-0.327 78
		0.4	-2.236 95	-0.582 81	0.4		-0.511 49	-0.426 86
1.5	1.0	0.0	-2.526 04	-0.531 26	0.0	1.0	0.002 28	-0.193 05
		0.2	-2.513 35	-0.535 08	0.2		-0.272 16	-0.291 87
		0.4	-2.510 90	-0.539 29	0.4		-0.622 32	-0.382 18

为了了解程序运行的正确性, 将 $N = 0$ 时, 与 Blasius ($U_w = 0, U_\infty = 1$) 和 Sakiadis ($U_w = 1, U_\infty = 0$) 类型的流体进行了比较(见表 1), 并在选定的 K 值下和 Hassanien^[16] 的结果进行了比较, 发现两者吻合得很好。观察发现, 无论外部磁场存在(即 $N \neq 0$) (见表 2) 与否(即 $N =$

0) [16], 当雷诺数、Prandtl 数和速度差 $|U_w - U_\infty|$ 相同时, $U_w > U_\infty$ 时的表面摩擦和热传递参数的结果比 $U_w < U_\infty$ 时的大得多。

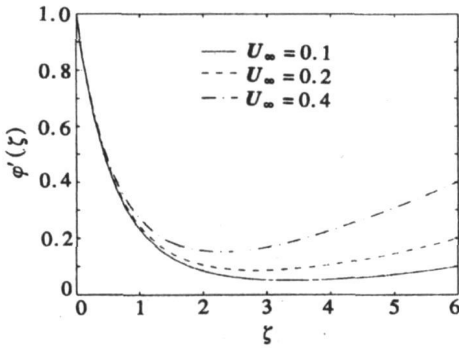


图2 当 $U_w = 1, K = 1, N = 0.3$ 时 ϕ 的变化

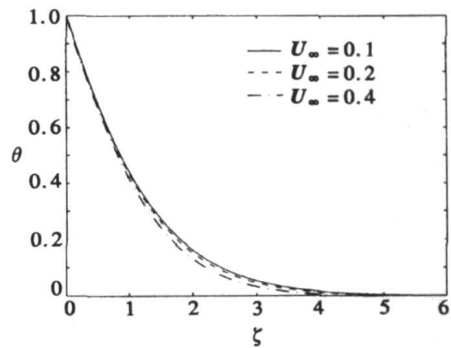


图3 当 $U_w = 1, K = 1, N = 0.3, Pr = 3$ 时 θ 的变化

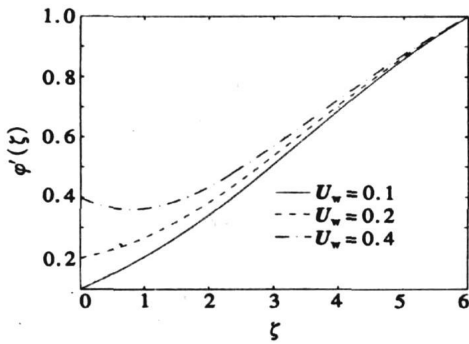


图4 当 $U_\infty = 1, K = 1, N = 0.3$ 时 ϕ 的变化

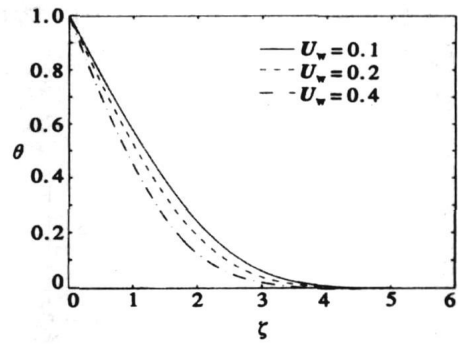


图5 当 $U_\infty = 1, K = 1, N = 0.3, Pr = 3$ 时 θ 的变化

图2~ 图5显示, 当固定 K, N 和 Pr 值时, 不同 U_w 和 U_∞ 值组合时 $\phi(\zeta)$ 和 $\theta(\zeta)$ 的变化。从图中可以看出, 在任何情况下(即 $U_w > U_\infty$ 和 $U_w < U_\infty$), 随着 U_w 和 U_∞ 的增加, 温度下降, 该结果与文献[16]中 $N = 0$ 的结果相符。

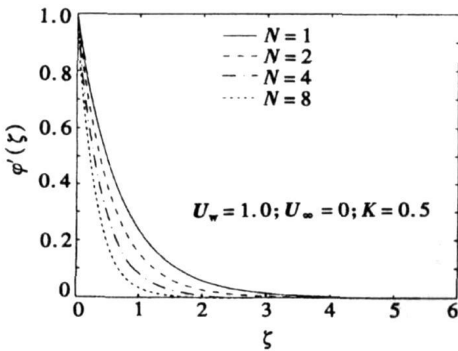


图6 $U_w > U_\infty$ 时不同 N 对应的 ϕ

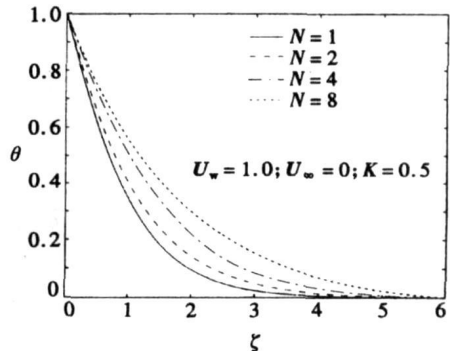


图7 $U_w > U_\infty, Pr = 4$ 时不同 N 对应的 θ

图6~ 图9显示, 当其他参数不变时, 速度和温度分布随着 N 的变化。从图中可以看出,

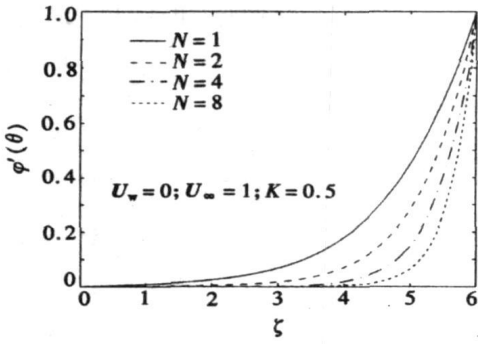


图8 $U_w < U_\infty$ 时不同 N 对应的 ϕ'

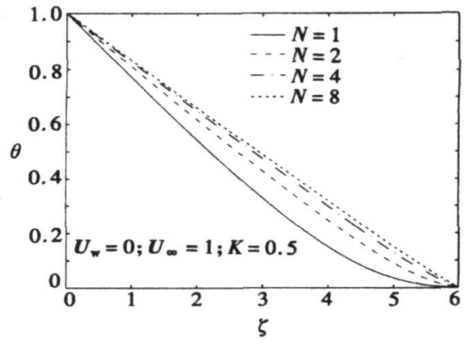


图9 $U_w < U_\infty, Pr = 4$ 时
不同 N 对应的 θ

在任何情况下, 对给定的位置 ζ , 随着磁场参数 N 增加, $\phi'(\zeta)$ 减少, 而 $\theta(\zeta)$ 增加。可以看出, 在一般情况下(见表 2), 对所有可能的 U_w 和 U_∞ 值的组合, 除 $U_w = 0$ 和 $U_\infty = 1.0$ 外, 在保持其它参数不变时, 随着磁场参数值的增加, 会使壁面摩擦参数 $\phi''(0)$ 增大, 反之亦成立。

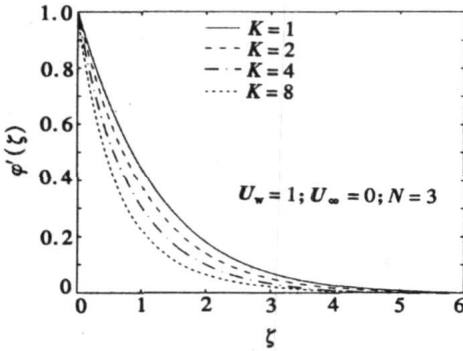


图10 $U_w > U_\infty$ 时不同 K 对应的 ϕ'

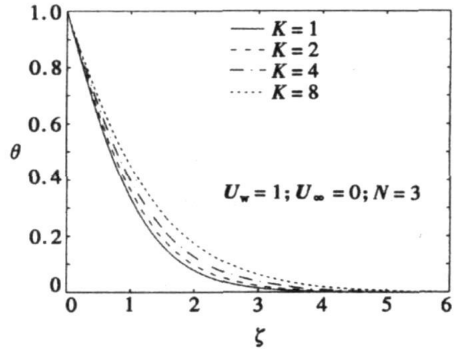


图11 $U_w > U_\infty, Pr = 3$ 时
不同 K 对应的 θ

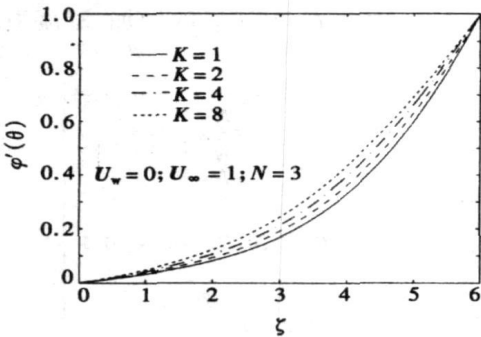


图12 $U_w < U_\infty$ 时不同 K 对应的 ϕ'

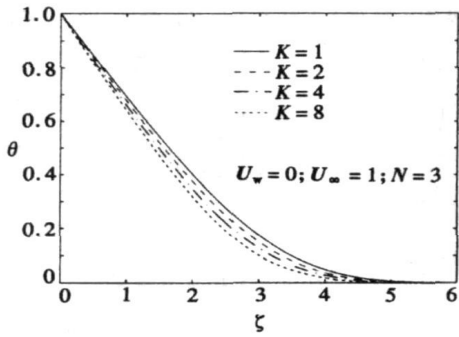


图13 $U_w < U_\infty, Pr = 3$ 时
不同 K 对应的 θ

在图 10 和图 11 中, 当其他参数固定时, 对选定的 K 值, 作出无量纲速度分量 ϕ' 和 θ 对 ζ 的函数图, 可以看出, 对 $U_w > U_\infty$, 随着黏弹性参数 K 的增加, 速度分量 $\phi'(\zeta)$ 减少, 这是没有预测到的。另一方面, 有趣的是当 $U_w < U_\infty$ 时, 流动曲线(图 12 和图 13) 与前者恰恰相反, 在

这个情况下,随着 K 值的增加, $\varphi'(\zeta)$ 增加。基于这个结果,可总结为:对常磁场,当自由流速度超过板的移动速度时,促使板运动稳定性的力变小,流体的弹性提高。

4 结 论

本文研究了在均匀横向磁场作用下,流体在连续平展表面上平行自由流动时,二次黏弹性导电流体的流动和热传递。根据本文的研究结果表明,这种类型的流动代表了一类新型的边界层问题,其解实质上与有限长度平展表面上的边界层流动问题是完全不一样的。后者的解取决于平板和自由流之间的相对速度,而前者(本文的研究)的解不仅取决于速度差,还取决于速度比。

以前工作^[16-17]给出的结果仅限于很小黏弹性参数时的流体,本文通过有效的算法,得到了适用于高黏弹性值和磁场参数情况下的数值解。高粘弹性解的优点在于,更加接近于工业生产中真实流动过程,例如自由涂层操作。十分有趣的是,我们发现无论是磁场存在与否,当法向速度差、雷诺数、Prandtl 数相同时, $U_w > U_\infty$ 时的表面摩擦和热传递参数结果比 $U_w < U_\infty$ 时的大得多。此外,值得注意的是,得到的速度分布、壁面上表面摩擦和温度场的结果是协调一致的。当 $U_w < U_\infty$ 时,去掉带有黏弹性参数的 $\varphi''(0)$ 项(见表1),意味着在自由涂层操作中,涂层成分的弹性属性对整个涂层过程是有利的。

致谢 作者感谢审稿人的宝贵意见。本文作者之一 B·萨胡感谢印度政府人力资源发展部提供的基金赞助使得该研究项目能继续下去。

[参 考 文 献]

- [1] Papanastasiou T C, Georgiou G C, Alexandrou A N. Viscous Fluid Flow [M]. Boca Raton: CRC Press, 2000.
- [2] Sakiadis B C. Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces—I boundary layer equations for two dimensional and axisymmetric flow[J]. American Institute of Chemical Engineers Journal, 1961, 7: 26-28.
- [3] Sakiadis B C. Boundary layer behavior on continuous solid surface: the boundary layer on a continuous flat surface[J]. American Institute of Chemical Engineers Journal, 1961, 7: 221-224.
- [4] Crane L J. Flow past a stretching sheet[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, ZAMP, 1970, 21: 645-647.
- [5] Gupta P S, Gupta A S. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing[J]. Canadian Journal Chemical Engineering, 1977, 55: 744-746.
- [6] Rivlin R S, Ericksen J L. Stress deformation relations for isotropic materials[J]. Journal of Rational Mechanics and Analysis, 1955, 4: 323-425.
- [7] Dunn J E, Fosdick R L. Thermodynamics, stability and boundedness of Fluids of complexity 2 and fluids of second grade[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1974, 56: 191-252.
- [8] Dunn J E, Rajagopal K R. Fluids of differential type, critical review and thermodynamic analysis [J]. International Journal of Engineering Science, 1995, 33: 689-729.
- [9] Fosdick R L, Rajagopal K R. Anomalous feature in the model of "second order fluids" [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1979, 70: 145-152.
- [10] Galdi G P, Padula M, Rajagopal K R. On the conditional stability of the rest state of a fluid of second grade in unbounded domains[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1990, 109: 173-

- 182.
- [11] Fox V G, Ericksen L E, Fan L T. The laminar boundary layer on a moving continuous flat sheet immersed in a non-Newtonian fluid[J]. American Institute of Chemical Engineers Journal, 1969, **15**: 327-333.
- [12] Rajagopal K R, Na T Y, Gupta A S. Flow of a viscoelastic fluid over a stretching sheet[J]. Rheological Acta, 1984, **24**: 213-215.
- [13] Troy W C, Overman E A, Ermentrout H G B, et al. Uniqueness of flow of a second-order fluid past a stretching sheet[J]. Quarterly Journal of Applied Mathematics, 1987, **44**: 753-755.
- [14] Sadeghy K, Sharifi M. Local similarity solution for the flow of a “second-grade” viscoelastic fluid above a moving plate[J]. International Journal Non-Linear Mechanics, 2004, **39**: 1265-1273.
- [15] Sadeghy K, Najafi A H, Saffaripour M. Sakiadis flow of an upper convected Maxwell fluid[J]. International Journal Non-Linear Mechanics, 2005, **40**: 1220-1228.
- [16] Hassanien I A. Flow and heat transfer from a continuous surface in a parallel free stream of viscoelastic second order fluid[J]. Applied Scientific Research, 1992, **49**: 335-344.
- [17] Hady F M, Gorla R S R. Heat transfer from a continuous surface in a parallel free stream of viscoelastic fluid[J]. Acta Mechanica, 1998, **128**: 201-208.
- [18] Bhatnagar R K, Gupta G, Rajagopal K R. Flow of an Oldroyd-B fluid due to a stretching sheet in the presence of a free stream velocity[J]. International Journal Non-Linear Mechanics, 1995, **30**: 391-405.
- [19] Allan F M. Similarity solutions of a boundary layer problem over moving surfaces[J]. Applied Mathematics Letter, 1997, **10**: 81-85.
- [20] Kumari M, Nath G. MHD boundary-layer flow of a non-Newtonian fluid over a continuously moving surface with a parallel free stream[J]. Acta Mechanica, 2001, **146**: 139-150.
- [21] Abo-Eldehhab E M, Salem A M. MHD free-convection flow of a non-Newtonian power-law fluid at a stretching surface with a uniform free-stream[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, **169**: 806-818.
- [22] Rajeshwari G K, Rathna S L. Flow of a particular class of non-Newtonian visco-elastic fluid near a stagnation point[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, ZAMP, 1962, **13**: 43-57.
- [23] Beard D W, Walters K. Elastico-viscous boundary layer flows—I two-dimensional flow near a stagnation point[J]. Proceedings Cambridge Philosophical Society, 1964, **60**: 667-674.
- [24] Mishra S P, Mohapatra U. Elasticoviscous flow between a rotating and a stationary disk with uniform suction at the stationary disk[J]. Journal of Applied Physics, 1977, **48**: 1515-1521.
- [25] Shrestha G M. Laminar elastico-viscous flow through channels with porous walls with different permeability[J]. Applied Science Research, 1969, **20**: 289-305.
- [26] Garg V K, Rajagopal K R. Stagnation point flow of a non-Newtonian fluid[J]. Mechanics Research Communication, 1990, **17**: 415-421.
- [27] Garg V K, Rajagopal K R. Flow of a non-Newtonian fluid past a wedge[J]. Acta Mechanica, 1991, **88**: 113-123.
- [28] Davies M H. A note on elastico-viscous boundary layer flows[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, ZAMP, 1960, **17**: 189-191.
- [29] Chiang K T. Dealing with complicated starting value in shooting process with Broyden's method: Examples of the onset of convection for the viscoelastic fluid[J]. International Communication in Heat and Mass Transfer, 2004, **31**: 815-826.
- [30] Teipel I. Die Räumliche staupunktströmung für ein viscoelastisches fluid[J]. Rheological Acta,

- 1986, **25**: 75-79.
- [31] Ariel P. D. A Hybrid method for computing the flow of viscoelastic fluids[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1992, **14**: 757-774.
- [32] Labropulu F, Xu X, Chinichian M. Unsteady stagnation point flow of a non-Newtonian second grade fluid[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, **60**: 3797-3807.
- [33] Labropulu F, Husain I, Chinichian M. Stagnation point flow of the Walters' B fluid with slip[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2004, **61**: 3249-3258.

MHD Flow and Heat Transfer From a Continuous Surface in a Uniform Free Stream of a Non-Newtonian Fluid

Bikash Sahoo, H. G. Sharma

(Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Roorkee,
Uttarakhand 247667, India)

Abstract: An analysis was carried out to study the steady flow and heat transfer characteristics from a continuous flat surface moving in a parallel free stream of an electrically conducting non-Newtonian viscoelastic fluid. The flow is subjected to a transverse uniform magnetic field. The constitutive equation of the fluid is modeled by that for a second grade fluid. Numerical results were obtained for the distribution of velocity and temperature profiles. The effects of various physical parameters like viscoelastic parameter, magnetic parameter and Prandtl number on various momentum and heat transfer characteristics are discussed in detail and shown graphically.

Key words: second grade fluid; free stream; heat transfer; magnetic field; finite difference method