

一类二次 KdV 类型水波方程的行波解*

龙 瑶¹, 李继彬^{2,3}, 芮伟国¹, 何 斌¹

(1. 红河学院 数学系, 云南 蒙自 661100;

2. 浙江师范大学 数学系, 浙江 金华 321004;

3. 昆明理工大学 理学院, 昆明 650093)

(本刊编委李继彬来稿)

摘要: 应用平面动力系统理论研究了一类非线性 KdV 方程的行波解的动力学行为. 在参数空间的不同区域内, 给出了系统存在孤立波解, 周期波解, 扭子和反扭子波解的充分条件, 并计算出所有可能的精确行波解的参数表示

关键词: 孤立波解; 周期波解; 扭子波和反扭子波解; 光滑和非光滑周期波

中图分类号: O175.12 文献标识码: A

引 言

Tzirtzilakis 等人在文献[1-2]中建议研究“一个更具有物理意义和更符合真实结构的高阶 KdV 类型的水波方程”(见文献[3-4]), 即

$$u_t + u_x + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} + \alpha^2 \rho_1 u^2 u_x + \alpha \beta (\rho_2 uu_{xxx} + \rho_3 u_x u_{xx}) = 0, \quad (1)$$

其中 $\rho_i (i = 1, 2, 3)$ 是任意参数, α, β 为正实常数.

令 $u(x, t) = \phi(\xi), \xi = x - ct$, 则方程(1)可化为下列非线性行波方程:

$$\beta(1 + \alpha \rho_2 \phi) \phi'' + \frac{1}{2} \alpha \beta (\rho_3 - \rho_2) (\phi')^2 + \frac{1}{3} \alpha^2 \rho_1 \phi^3 + \frac{1}{2} \alpha \phi^2 + (1 - c) \phi = 0, \quad (2)$$

且(2)式等价于下列二维系统

$$\frac{d\phi}{d\xi} = y, \quad \frac{dy}{d\xi} = - \frac{3\alpha\beta(\rho_3 - \rho_2)y^2 + 2\alpha^2\rho_1\phi^3 + 3\alpha\phi^2 + 6(1 - c)\phi}{6\beta(1 + \alpha\rho_2\phi)}. \quad (3)$$

令 $\rho_3 = p\rho_2 (p \neq 1)$. 则(3)式有如下的首次积分

$$y^2 = h(1 + \alpha\rho_2\phi)^{1-p} - (A_0 - \alpha\rho_2(p-1)A_0\phi + C_0\phi^2 + D_0\phi^3)/\Omega, \quad (4)$$

其中, h 是任意的常数, 并且

$$A_0 = 6[\rho_2^2(p+1)(p+2)(c-1) + \rho_2(p+2) - 2\rho_1],$$

$$C_0 = 3(p-1)p\alpha^2\rho_2^2[(p+2)\rho_2 - 2\rho_1],$$

$$D_0 = 2(p-1)p(p+1)\alpha^3\rho_1\rho_2^3, \quad \Omega = 3(p-1)p(p+1)(p+2)\alpha^2\beta\rho_2^4.$$

* 收稿日期: 2006-02-28; 修订日期: 2007-09-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10231020); 云南省自然科学基金资助项目(2003A0018M); 云南省教育厅科学研究基金重点资助项目(5Z0071A)

作者简介: 龙瑶(1957-), 女, 云南西盟人, 教授(联系人. Tel: + 86-873-3699239; E-mail: yaolong04@163.com).

文献[5]在 $p < 0$ 的情况下, 对孤立波解、周期波解、破缺波解、扭子波和反扭子波解的动力学性质进行了研究: 当 $p < 0$ 时, 系统(3)的相图中的平衡点以结点为主. 而当 $p > 0$ 时, 系统(3)的相图中的平衡点只有鞍点(或退化鞍点)或中心. 所以, 在以上两种情况下, 相图中的轨线走势不一样, 从而得到的解也不一样. 因此, 有必要对 $p > 0$ 的情况作进一步的讨论, 这就是本文的研究目标.

1 系统(3)的相图的分支

系统(3)有一条奇异直线 $\phi = \phi_s = -1/(\alpha\rho_2)$, 不利于进行研究, 因此令 $d\xi = 6\beta(1 + \alpha\rho_2\phi)d\zeta$, 则系统(3)化为下列系统

$$\frac{d\phi}{d\zeta} = 6\beta(1 + \alpha\rho_2\phi)y, \quad \frac{dy}{d\zeta} = -(3\alpha\beta(\rho_3 - \rho_2)y^2 + 2\alpha^2\rho_1\phi^3 + 3\alpha\phi^2 + 6(1 - c)\phi), \quad (5)$$

显然系统(3)和系统(5)具有相同的首次积分, 并且除了围绕奇异直线 $\phi = \phi_s = -1/(\alpha\rho_2)$ 的轨线外, 两个系统具有相同的轨线分布. 因此, 利用系统(5)的平衡点的性质和奇异直线上平衡点的性质就可以得到系统(3)的轨线的全局分布情况. 当 $\phi \neq -1/(\alpha\rho_2)$ 时, 方程(4)可以改写为

$$H(\phi, y) = (1 + \alpha\rho_2\phi)^{p-1}[y^2 + (A_0 - \alpha\rho_2(p-1)A_0\phi + C_0\phi^2 + D_0\phi^3)/\Omega] = h, \quad (6)$$

其中 A_0, C_0, D_0 前面已给出. 记

$$\phi_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{\Delta_1})/(4\alpha\rho_1), \quad Y_{\pm} = \pm \sqrt{\Delta_2/(3(p-1)\beta)}/(\alpha\rho_2^2), \quad (7)$$

其中 $\Delta_1 = 9 + 48\rho_1(c-1)$, $\Delta_2 = 6\rho_2^2(1-c) + 2\rho_1 - 3\rho_2$. 当条件 $p > 1, c > 1 - 3/(16\rho_1)$, $\rho_1 \neq 0$ 成立时, $\Delta_1 \geq 0$.

当 $\rho_1 \neq 0, \Delta_1 > 0$ 时, 系统(5)在 ϕ 轴上有3个平衡点 $O(0, 0), A_{1,2}(\phi_{1,2}, 0)$. 当 $\Delta_1 = 0$ 时, 系统(5)在 ϕ 轴上有两个平衡点 $O(0, 0)$ 和 $A^*(\phi^*, 0)$, 其中 $\phi^* = -3/(4\alpha\rho_1)$. 当 $\Delta_2 > 0$, 即 $c < 1 + (3\rho_2 - 2\rho_1)/(\rho_2^2)$ 时, 在直线 $\phi = -1/(\alpha\rho_2)$ 上, 有两个平衡点 $S_{\pm}(\phi_s, Y_{\pm})$.

显然, 当 $\rho_1 > 0$ 时, 若 $0 < 1 - 3/(16\rho_1) < c < 1$, 则 $\phi_2 < \phi_1 < 0$; 若 $c = 1$, 则 $\phi_2 = -3/(2\alpha\rho_1) < 0 = \phi_1$; 若 $c > 1$, 则 $\phi_2 < 0 < \phi_1$. 当 $\rho_1 < 0$ 时, 若 $1 < c < 1 - 3/(16\alpha\rho_1)$, 则 $0 < \phi_1 < \phi_2$; 若 $c = 1$, 则 $\phi_1 = 0 < -3/(2\alpha\rho_1) = \phi_2$; 若 $c > 1$ 时, 则 $\phi_1 < 0 < \phi_2$; 当 $\rho_1 = 0$ 时, 系统(5)有2个平衡点 $O(0, 0)$ 和 $A_0(\phi_0, 0)$, 其中 $\phi_0 = (2(c-1))/\alpha$, 此时, 若 $0 < c < 1$, 则 $\phi_0 < 0$; 若 $c > 1$, 则 $\phi_0 > 0$.

记 $M(\phi_i, y_e)$ 为系统(5)的线性系统在平衡点 (ϕ_i, y_e) 的系数矩阵且其雅可比行列式为 $J(\phi_i, y_e) = \det M(\phi_i, y_e)$. 显然, $\text{Trace}(M(\phi_{1,2}, 0)) = 0$ 并且

$$J(0, 0) = 36\beta(1 - c), \quad J(\phi_s, Y_{\pm}) = \det M(\phi_s, Y_{\pm}) = -36(p-1)\alpha^2\beta^2\rho_2^2Y_{\pm}^2 < 0,$$

$$J(\phi_{1,2}, 0) = -\frac{9\beta/4\rho_1 + (-3 \pm \sqrt{\Delta_1})\rho_2/16\rho_1(c-1) + 3 \pm 2\sqrt{\Delta_1 - \Delta_1}}{16\rho_2^2}.$$

由(6)式可得

$$h_0 = H(0, 0) = \frac{A_0}{\Omega}, \quad h_s = H(\phi_s, Y_{\pm}) = 0,$$

$$h_{1,2} = H(\phi_{1,2}, 0) = \frac{1}{\Omega}(A_0 - \alpha\rho_2(p-1)A_0\phi_{1,2} + C_0\phi_{1,2}^2 + D_0\phi_{1,2}^3)(1 + \alpha\rho_2\phi_{1,2})^{p-1},$$

$$h^* = H(\phi_0, 0) = \frac{1}{\Omega}(A_0 - \alpha\rho_2(p-1)A_0\phi_0 + C_0\phi_0^2 + D_0\phi_0^3)(1 + \alpha\rho_2\phi_0)^{p-1}.$$

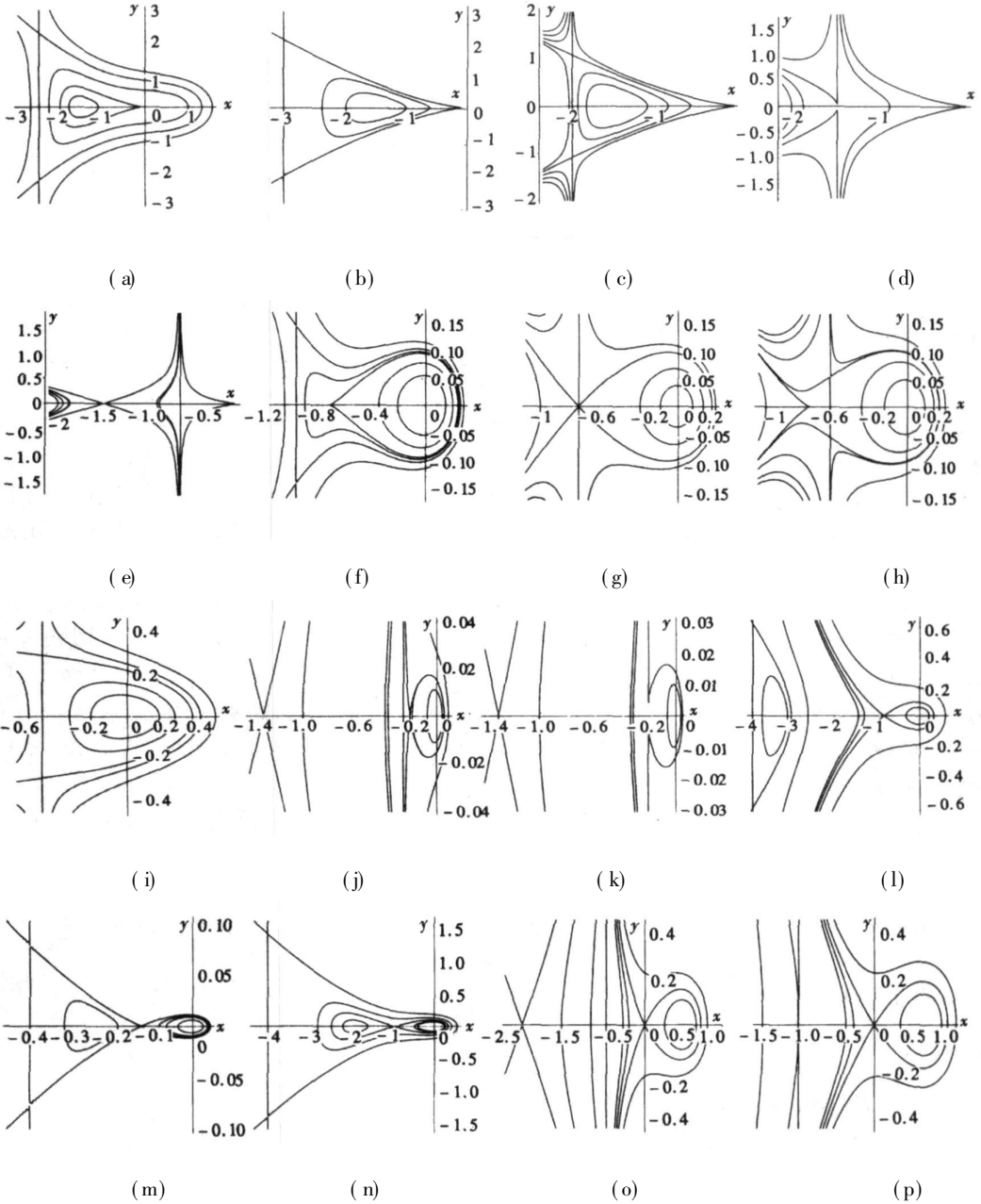
当 $p = 2$, 即, $\rho_3 = 2\rho_2$ 时, 有

$$H(\phi, y) = (1 + \alpha\rho_2\phi) \left[y^2 + \frac{A_0^1 - \alpha\rho_2 A_0^1\phi + C_0^1\phi^2 + D_0^1\phi^3}{72\alpha^2\rho_2^4} \right] =$$

$$(1 + \alpha\rho_2\phi)y^2 + \frac{1}{6\beta}(6(1-c)\phi^2 + 2\alpha\phi^3 + \rho_1\alpha^2\phi^4) + \frac{A_0^1}{72\alpha^2\rho_2^4} = h, \quad (8)$$

其中 $A_0^1 = 6(4\rho_2 - 2\rho_1 + 12\rho_2^2(c-1))$, $C_0^1 = 6\alpha^2\rho_2^2(4\rho_2 - 2\rho_1)$, $D_0^1 = 12\alpha^3\rho_2^3$.

利用上述事实作定性分析, 当 $p = 2$ 时, 我们得到系统(3) 的相图分支, 如图 1 至图 3 所示. 同样地, 可得当 $p > 2$ 时, 系统(3) 的相图的分支.



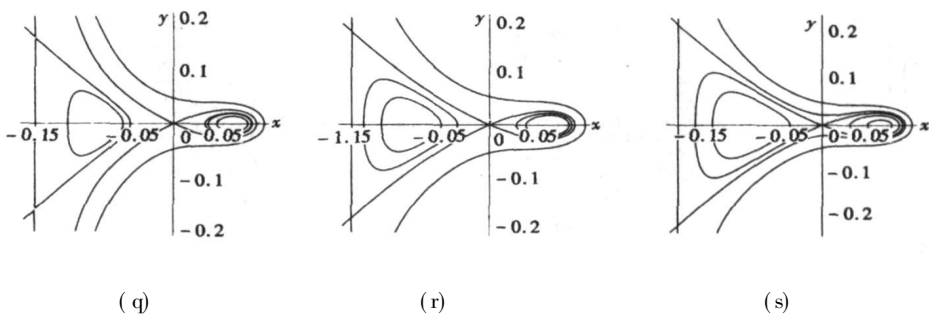


图 1 方程(3)的相图的分支 ($\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, c > 0$)

((a) $c = 1, \phi_s < \phi_2 < 0 = \phi_1, A_0 < 0, \Delta_2 > 0$; (b) $c = 1, \phi_s < \phi_2 < 0 = \phi_1, A_0 = 0, \Delta_2 > 0$; (c) $c = 1, \phi_s < \phi_2 < 0 = \phi_1, A_0 > 0, \Delta_2 > 0$; (d) $c = 1, \phi_s = \phi_2 < 0 = \phi_1, \Delta_2 = 0$; (e) $c = 1, \phi_2 < \phi_s < 0 = \phi_1, \Delta_2 < 0$; (f) $c = 1 - 3/(16\rho_1), \phi_s < \phi_* < 0, \Delta_2 > 0$; (g) $c = 1 - 3/(16\rho_1), \phi_s = \phi_* < 0, \Delta_2 = 0$; (h) $c = 1 - 3/(16\rho_1), \phi_* < \phi_s < 0, \Delta_2 > 0$; (i) $0 < c < 1 - 3/(16\rho_1), \phi_s < 0, \Delta_2 > 0$; (j) $1 - 3/(16\rho_1) < c < 1, \phi_2 < \phi_s < \phi_1 < 0, \Delta_2 < 0$; (k) $1 - 3/(16\rho_1) < c < 1, \phi_2 < \phi_s = \phi_1 < 0, \Delta_2 = 0$; (l) $1 - 3/(16\rho_1) < c < 1, \phi_s < \phi_2 < \phi_1 < 0, h_1 > 0, \Delta_2 > 0$; (m) $1 - 3/(16\rho_1) < c < 1, \phi_s < \phi_2 < \phi_1 < 0, h_1 = 0, \Delta_2 > 0$; (n) $1 - 3/(16\rho_1) < c < 1, \phi_s < \phi_2 < \phi_1 < 0, h_1 < 0, \Delta_2 > 0$; (o) $c > 1, \phi_2 < \phi_s < 0 < \phi_1, \Delta_2 < 0$; (p) $c > 1, \phi_2 = \phi_s < 0 < \phi_1, \Delta_2 = 0$; (q) $c > 1, \phi_s < \phi_2 < 0 < \phi_1, A_0 > 0, \Delta_2 > 0$; (r) $c > 1, \phi_s < \phi_2 < 0 < \phi_1, A_0 = 0, \Delta_2 > 0$; (s) $c > 1, \phi_s < \phi_2 < 0 < \phi_1, A_0 < 0, \Delta_2 > 0$).

在下一部分, 将利用这些相思来研究方程(1)的行波解

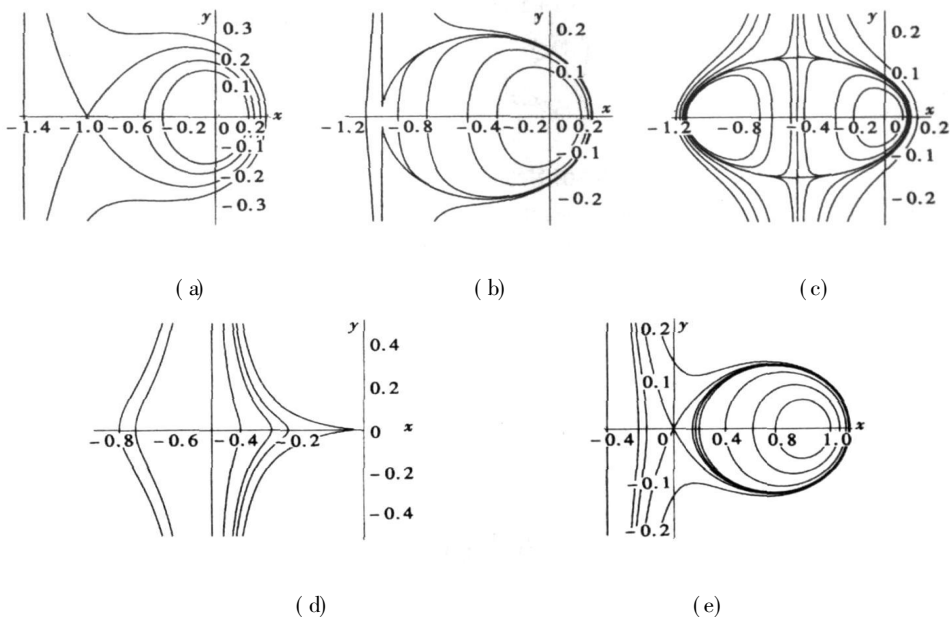


图 2 方程(3)的相图的分支 ($\rho_1 = 0, \rho_2 > 0, c > 0$)

((a) $0 < c < 1, \phi_s < \phi_0 < 0, \Delta_2 < 0$; (b) $0 < c < 1, \phi_s = \phi_0 < 0, \Delta_2 = 0$; (c) $0 < c < 1, \phi_0 < \phi_s < 0, \Delta_2 > 0$; (d) $c = 1, \phi_s < 0 = \phi_0, \Delta_2 < 0$; (e) $c > 1, \phi_s < 0 < \phi_0, \Delta_2 < 0$).

2 方程(1)的光滑孤立波解和周期波解

本节讨论方程(1)的光滑孤立波解, 光滑周期波解和非光滑周期波解的存在性.

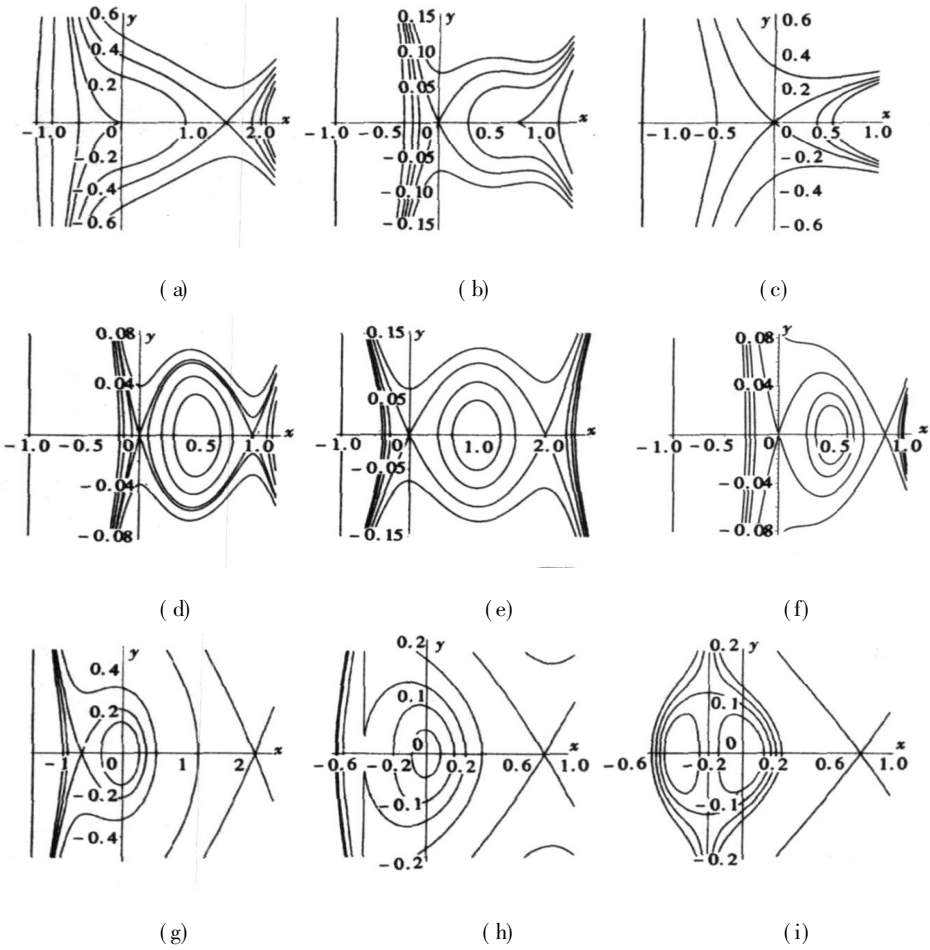


图 3 方程(3)的相图的分支 ($\rho_1 < 0, \rho_2 > 0, c > 0$)

((a) $c = 1, \phi_s < 0 = \phi_1 < \phi_2, \Delta_2 < 0$; (b) $c = 1 - 3/(16\rho_1), \phi_s < 0 < \phi_*, \Delta_2 < 0$; (c) $c > 1 - 3/(16\rho_1), \phi_s < 0, \Delta_2 < 0$; (d) $1 < c < 1 - 3/(16\rho_1), \phi_s < 0 < \phi_1 < \phi_2, h_0 > h_2, \Delta_2 < 0$; (e) $1 < c < 1 - 3/(16\rho_1), \phi_s < 0 < \phi_1 < \phi_2, h_0 = h_2, \Delta_2 < 0$; (f) $1 < c < 1 - 3/(16\rho_1), \phi_s < 0 < \phi_1 < \phi_2, h_0 < h_2, \Delta_2 < 0$; (g) $0 < c < 1, \phi_s < \phi_1 < 0 < \phi_2, \Delta_2 < 0$; (h) $0 < c < 1, \phi_s = \phi_1 < 0 < \phi_2, \Delta_2 = 0$; (i) $0 < c < 1, \phi_1 < \phi_s < 0 < \phi_2, h_2 > 0, \Delta_2 > 0$).

首先, 讨论孤立波解的存在性(其讨论方法可参见文献[6-12])。由图 1 至图 3 可得到以下的结论。

结论 1

(i) 满足以下的条件之一, 方程(1)具有一个谷型的光滑孤立波解:

1* $\rho_1 > 0, c = 1, A_0 < 0$ 且 $\Delta_2 > 0$ (见图 1(a)), 其代数方程对应于 $H(\phi, y) = A_0/\Omega$;

2* $\rho_1 < 0, 1 < c < 1 - 3/(16\rho_1), h_0 > h_2$ 且 $\Delta_2 < 0$ (见图 3(d)), 其代数方程对应于 $H(\phi, y) = h_2$ 。

(ii) 满足以下的条件之一, 方程(1)具有一个峰型的光滑孤立波解, 它的代数方程对应于 $H(\phi, y) = A_0/\Omega$:

1* $\rho_1 > 0, c = 1 - 3/(16\rho_1)$ 且 $\Delta_2 > 0$ (见图 1(f));

2* $\rho_1 > 0$ 且 $c > 1$ (见图 1(o) ~ (s)); 此外, 如果 $A_0 > 0$ 且 $\Delta_2 < 0$, 方程(1)另外有一

个谷型的光滑孤立波解(见图 1(s));

3*) $\rho_1 = 0$ 且 $c > 1$ (见图 2(e));

4*) $\rho_1 < 0, 1 < c < 1 + 3/(16(-\rho_1))$ 且 $h_0 < h_2, \Delta_2 < 0$ (见图 3(f))•

(iii) 下列的条件之一, 方程(1) 具有一个峰型的光滑孤立波解, 它的代数方程对应于 $H(\phi, y) = h_1$:

1*) $\rho_1 > 0, c = 1 - 3/(16\rho_1)$ 且 $\Delta_2 > 0$ (见图 1(f));

2*) $\rho_1 > 0, 1 - 3/(16\rho_1) < c < 1$ 且 $\Delta_2 < 0$ (见图 1(j));

3*) $\rho_1 > 0$ 且 $1 - 3/(16\rho_1) < c < 1$ (见图 1(l) ~ (n)); 此外, 若 $h_1 < 0$ 且 $\Delta_2 > 0$, 方程(1) 有另外一个谷型的光滑孤立波解(见图 1(n));

4*) $\rho_1 < 0, 0 < c < 1, \Delta_2 < 0$, (见图 3(g))•

(iv) 若满足条件: $\rho_1 = 0, 0 < c < 1$ 且 $\Delta_2 < 0$, 则方程(1) 有一个峰型的光滑孤立波解, 它其代数方程对应于 $H(\phi, y) = h^*$ (见图 2(a))•

其次, 讨论方程的(1)光滑周期波解•

结论 2

(i) 当 $\rho_1 > 0, c = 1, A_0 < 0$ 且 $\Delta_2 > 0$ 时, 方程(1) 有一族光滑周期波解, 它的代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_2, A_0/\Omega)$ (见图 1(a))•

(ii) 满足下列的条件之一, 方程(1) 有一族光滑周期波解, 它的代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_1, A_0/\Omega)$:

1*) $\rho_1 > 0, c = 1 - 3/(16\rho_1)$ 且 $\Delta_2 > 0$ (见图 1(f));

2*) $\rho_1 > 0$ 且 $c > 1$ (见图 1(o) ~ (s))• 此外, 若 $A_0 > 0$ 且 $\Delta_2 < 0$, 方程(1) 还有一族光滑周期波解, 它的代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_2, A_0/\Omega)$ (见图 1(s));

3*) $\rho_1 = 0$ 且 $c > 1$ (见图 2(e));

4*) $\rho_1 < 0, 1 < c < 1 + 3/(16(-\rho_1)), h_0 < h_2$ 且 $\Delta_2 < 0$ (见图 3(f))•

(iii) 满足下列的条件之一, 方程(1) 有一族光滑周期波解, 它的代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (A_0/\Omega, h_1)$:

1*) $\rho_1 > 0, c = 1 - 3/(16\rho_1)$ 且 $\Delta_2 > 0$ (见图 1(f));

2*) $\rho_1 > 0, 1 - 3/(16\rho_1) < c < 1$ 且 $\Delta_2 < 0$ (见图 1(j));

3*) $\rho_1 > 0$ 且 $1 - 3/(16\rho_1) < c < 1$ (见图 1(l) ~ (n))• 此外, 若 $h_1 < 0$ 且 $\Delta_2 > 0$, 方程(1) 有另外一族光滑周期波解, 它的代数方程对应 $H(\phi, y) = h, h \in (h_2, h_1)$ (见图 1(n));

4*) $\rho_1 < 0, 0 < c < 1$ 且 $\Delta_2 \leq 0$ (见图 3(g) ~ (h));

5*) $\rho_1 > 0, c = 1 - 3/(16\rho_1)$ 且 $\Delta_2 = 0$ (见图 1(g));

6*) $\rho_1 > 0, 1 - 3/(16\rho_1) < c < 1$ 且 $\Delta_2 = 0$ (见图 1(k))•

(iv) 若满足条件 $\rho_1 = 0, 0 < c < 1$ 且 $\Delta_2 \leq 0$ 时, 方程(1) 有一族周期波解, 其代数方程对应于 $H(\phi, y) = h^*, h \in (h_0, h^*)$ (见图 2(a) ~ (b))•

(v) 当 $\rho_1 < 0, 1 < c < 1 - 3/(16\rho_1), h_0 \geq h_2$ 且 $\Delta_2 < 0$ 时, 方程(1) 有一族周期波解, 其代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_1, h_2)$ (见图 3(d) ~ (e))•

最后, 我们讨论周期尖波存在的条件•

结论 3

(i) 满足下列的条件之一, 方程(1) 存在由不可数无穷多个周期波解组成的周期波解族,

且当 $h \rightarrow 0$ 时, 这些周期波从光滑周期波逐渐变为周期尖波:

1*) $\rho_1 > 0, c = 1, A_0 < 0$ 且 $\Delta_2 > 0$, 它的代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_0, 0), h_0 = A_0/\Omega$ (见图 1(a));

2*) $\rho_1 > 0, c = 1, A_0 \geq 0$ 且 $\Delta_2 > 0$, 它的代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_2, 0)$ (见图 1(b)~(c));

3*) $\rho_1 > 0, 0 < c \leq 1 - 3/(16\rho_1)$ 且 $\Delta_2 > 0$, 其代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_0, 0)$ (见图 1(h)~(i));

4*) $\rho_1 > 0, 1 - 3/(16\rho_1) < c < 1, h_1 \geq 0$ 且 $\Delta_2 > 0$, 它的代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_2, 0)$ (见图 1(l)~(m));

5*) $\rho_1 > 0, 1 - 3/(16\rho_1) < c < 1, h_1 < 0$ 且 $\Delta_2 > 0$, 其代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_1, 0)$ (见图 1(n));

6*) $\rho_1 > 0, c > 1, \phi_s < \phi_2 < 0 < \phi_1, A_0 \geq 0$ 且 $\Delta_2 > 0$, 它的代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_2, 0)$ (见图 1(q)~(r));

7*) $\rho_1 > 0, c > 1, \phi_s < \phi_2 < 0 < \phi_1, A_0 < 0$ 且 $\Delta_2 > 0$, 它的代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_0, 0)$ (见图 1(s)).

(ii) 满足下列的条件之一, 方程(1)存在由不可数无穷多个周期波解组成的两族周期波解族, 且当 $h \rightarrow 0$ 时, 这些周期波的波形由光滑周期波逐渐变为周期尖波:

1*) $\rho_1 = 0, 0 < c < 1$ 且 $\Delta_2 > 0$, 其代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h^*, 0)$ 和 $h \in (h_0, 0)$ (见图 2(c));

2*) $\rho_1 < 0, 0 < c < 1, h_2 > 0$ 且 $\Delta_2 > 0$, 其代数方程对应于 $H(\phi, y) = h, h \in (h_1, 0)$ 和 $h \in (h_0, 0)$ (见图 3(i)).

3 对应于 $H(\phi, y) = 0$ 的行波解的精确显示参数表示

本节讨论方程(1)的光滑和非光滑孤立波解和周期波解的精确的参数表示.

3.1 孤立尖波解

当 $\rho_1 > 0, c = 1, \phi_s < \phi_2 < 0 = \phi_1, A_0 = 0$ (即 $(p+2)\rho_2 = 2\rho_1$) 且 $\Delta_2 > 0$ 时(见图 1(b)), $H(\phi, y) = 0$ 可化为 $(1 + \alpha\rho_2\phi)^{(p-1)} = 0$ 或

$$y^2 = -\frac{D_0}{\Omega}\phi^3 = -\frac{\alpha}{3\beta}\phi^3. \quad (9)$$

利用(9)式, 对(3)式的第一个方程积分, 可以得到方程(1)的如下孤立尖波解

$$u(x, t) = \phi(x - ct) = -\frac{4}{[\sqrt{\alpha/(3\beta)}(x - t) - 2\sqrt{\alpha\rho_2}]^2}, \quad 2\sqrt{3\beta\rho_2} < |x - t| < \infty \quad (10)$$

3.2 光滑孤立波解

当 $\rho_1 > 0, c = 1 - 3/(16\rho_1), \phi_s = \phi_{12} < 0$ 且 $\Delta_2 = 0$ (即 $\rho_2 = 1/(4(1-c))$) 时(见图 1(g)), $\rho_2 = (4/3)\rho_1, H(\phi, y) = 0$ 化为 $(1 + \alpha\rho_2\phi)^{(p-1)} = 0$ 或

$$y^2 = \frac{(1 + \alpha\rho_2\phi)^2 [1 - \alpha\rho_2(p+1)\phi]}{2\alpha^2\beta\rho_2^3(p+1)(p+2)}. \quad (11)$$

利用(11)式, 对(3)式的第一个方程积分, 得到方程(1)的峰型光滑孤立波解的参数表示

$$u(x, t) = \phi(x - ct) = \left[- (p + 1) + (p + 2) \times \operatorname{sech}^2 \left[\omega \left(x - \left[1 - \frac{3}{16\rho_1} \right] t \right) \right] \right] \backslash (\alpha \rho_2 (p + 1)). \quad (12)$$

其中 $\omega = 1/(2\sqrt{2\beta\rho_2(p+1)})$ 。

3.3 光滑周期波解

3.3.1 当 $\rho_1 > 0, 1 - 3/(16\rho_1) < c < 1, \phi_2 < \phi_s = \phi_1 < 0$ 且 $\Delta_2 = 0$ 时(见图 1(k)), $\alpha\rho_2(C_0 + \alpha^2\rho_2^2pA_0) = D_0$, 则 $H(\phi, y) = 0$ 化为 $(1 + \alpha\rho_2\phi)^{(p-1)} = 0$ 或

$$y^2 = - \frac{D_0}{\Omega} \left[\frac{\alpha\rho_2 A_0}{D_0} - \frac{\alpha^2\rho_2^2 p A_0}{D_0} \phi_+ \phi^2 \right] \left[\phi_+ \frac{1}{\alpha\rho_2} \right] = \frac{2\alpha\rho_1}{3\beta(p+2)\rho_2} (\phi_M - \phi) \left[\phi_+ \frac{1}{\alpha\rho_2} \right] (\phi - \phi_m), \quad (13)$$

其中

$$\phi_M = \frac{\alpha^2\rho_2^2 p A_0}{2D_0} + \sqrt{\left[\frac{\alpha^2\rho_2^2 p A_0}{2D_0} \right]^2 - \frac{\alpha\rho_2 A_0}{D_0}}, \quad \phi_m = \frac{\alpha^2\rho_2^2 p A_0}{2D_0} - \sqrt{\left[\frac{\alpha^2\rho_2^2 p A_0}{2D_0} \right]^2 - \frac{\alpha\rho_2 A_0}{D_0}}.$$

利用(13)式,对(3)式的第 1 个方程积分,可得到方程(1)的光滑周期波解的参数表示

$$u(x, t) = \phi(x - ct) = \phi_M - (\phi_M + 1/(\alpha\rho_2)) \operatorname{sn}^2(\omega_1(x - ct), k), \quad (14)$$

其中 $\omega_1 = \sqrt{(\alpha\rho_1(\phi_M - \phi_m))/(6\beta(p+2)\rho_2)}, k = \sqrt{(\phi_M + 1/(\alpha\rho_2))/(\phi_M - \phi_m)}$ 。

3.3.2 当 $\rho_1 = 0, 0 < c < 1, \phi_s = \phi_0 < 0$ 且 $\Delta_2 = 0$ 时(见图 2(b)), $c = 1 - 1/(2\rho_2), D_0 = 0, A_0 = -3(p-1)(p+2)\rho_2 < 0$ 。那么, $H(\phi, y) = 0$ 化为 $(1 + \alpha\rho_2\phi)^{(p-1)} = 0$ 或

$$y^2 = \frac{C_0}{\Omega} \left[\frac{(-A_0)}{C_0} - \frac{\alpha\rho_2(p-1)(-A_0)}{C_0} \phi_- \phi^2 \right] = \frac{1}{\beta(p+1)\rho_2} \left[\frac{1}{\alpha\rho_2 p} - \phi \right] \left[\phi_+ \frac{1}{\alpha\rho_2} \right]. \quad (15)$$

利用(15)式对(3)式的第 1 个方程积分,可得到方程(1)的光滑的周期波解的参数表示

$$u(x, t) = \phi(x - ct) = ((p+1)\cos(\omega_2(x - ct)) - (p-1))/(2\alpha\rho_2 p), \quad (16)$$

其中 $\omega_2 = 1/\sqrt{\beta\rho_2(p+1)}$ 。

3.3.3 当 $\rho_1 < 0, 0 < c < 1, \phi_s = \phi_1 < 0 < \phi_2$ 且 $\Delta_2 = 0$ 时(见图 3(h)), 方程(5)有一条同宿到平衡点 $O(\phi_1, 0)$ 的同宿轨,其代数方程为

$$y^2 = \frac{(-D_0)}{\Omega} \left[\frac{\alpha\rho_2 A_0}{D_0} - \frac{\alpha^2\rho_2^2 p A_0}{D_0} \phi_+ \phi^2 \right] \left[\phi_+ \frac{1}{\alpha\rho_2} \right] = \frac{2\alpha(-\rho_1)}{3\beta(p+2)\rho_2} (\phi_F - \phi) \left[\phi_+ \frac{1}{\alpha\rho_2} \right] (\phi_M - \phi), \quad (17)$$

其中

$$\phi_F = \frac{\alpha^2\rho_2^2 p A_0}{2D_0} + \sqrt{\left[\frac{\alpha^2\rho_2^2 p A_0}{2D_0} \right]^2 - \frac{\alpha\rho_2 A_0}{D_0}}, \quad \phi_M = \frac{\alpha^2\rho_2^2 p A_0}{2D_0} - \sqrt{\left[\frac{\alpha^2\rho_2^2 p A_0}{2D_0} \right]^2 - \frac{\alpha\rho_2 A_0}{D_0}}.$$

利用(17)式对(3)式的第 1 个方程积分,可得到方程(1)的光滑的周期波解的参数表示

$$u(x, t) = \phi(x - ct) = (\phi_M - \phi_F k^2 \operatorname{sn}^2(\Omega_1(x - ct), k))/(\operatorname{dn}^2(\Omega_1(x - ct), k)), \quad (18)$$

其中 $\Omega_1 = \sqrt{(\alpha(-\rho_1)(\phi_F - \phi_s))/(6\beta(p+2)\rho_2)}$, $k = \sqrt{(\phi_M - \phi_s)/(\phi_F - \phi_s)}$.

3.4 孤立波解和孤立尖波解的共存性

3.4.1 当 $\rho_1 > 0$, $1 - 3/(16\rho_1) < c < 1$, $\phi_s < \phi_2 < \phi_1 < 0$, $h_1 = 0$ (即 $A_0 - \alpha\rho_2(p-1)A_0\phi_1 + C_0\phi_1^2 + D_0\phi_1^3 = 0$) 且 $\Delta_2 > 0$ 时(见图 1(m)), 方程(5) 有一条同宿轨和两条异宿轨连结到平衡点 $O(\phi_1, 0)$, 其代数方程为

$$y^2 = \frac{D_0}{\Omega} \left[\frac{(-A_0)}{D_0} - \frac{\alpha\rho_2(p-1)(-A_0)}{D_0} \phi - \frac{C_0}{D_0} \phi^2 - \phi^3 \right] = \frac{2\alpha\rho_1}{3\beta(p+2)\rho_2} (\phi_M - \phi)(\phi - \phi_1)^2, \quad (19)$$

其中 $\phi_M = (-A_0)/(D_0\phi_1^2)$, ϕ_1 由(7) 式确定.

利用(19) 式对(3) 式的第 1 个方程积分, 当 $\phi \in (\phi_1, \phi_M]$ 时, 可以得到方程(1) 的峰型光滑孤立波解的参数表示

$$u(x - ct) = \phi(x - ct) = \phi_1 + (\phi_M - \phi_1) \operatorname{sech}^2(\omega_3(x - ct)), \quad (20)$$

其中 $\omega_3 = \sqrt{(\alpha\rho_1(\phi_M - \phi_1))/(6\beta\rho_2(p+2))}$. 当 $\phi \in (\phi_s, \phi_1)$ 时, 可得到方程(1) 的另外一个谷型孤立尖波解的参数表示

$$u(x - ct) = \phi(x - ct) = \phi_1 + (\phi_M - \phi_1) \operatorname{sech}^2[(\omega_3(x - ct) + y_0)/2], \quad (21)$$

其中 $y_0 = \ln((\sqrt{\phi_M - \phi_s} + \sqrt{\phi_M - \phi_1})/(\sqrt{\phi_M - \phi_s} - \sqrt{\phi_M - \phi_1}))$.

3.4.2 当 $\rho_1 > 0$, $c > 1$, $\phi_s < \phi_2 < 0 < \phi_1$, $A_0 = 0$ (即 $h_0 = h_s = 0$) 且 $\Delta_2 > 0$ 时(见图 1(r)), 方程(5) 存在连结到平衡点 $O(0, 0)$ 的一条同宿轨和两条异宿轨, 其代数方程为

$$y^2 = \frac{2\alpha\rho_1}{3\beta\rho_2(p+2)} \phi^2 \left[\frac{3(2\rho_1 - (p+2)\rho_2)}{2\alpha\rho_1\rho_2(p+1)} - \phi \right] = \frac{2\alpha\rho_1}{3\beta\rho_2(p+2)} \phi^2 (\phi_M - \phi), \quad (22)$$

其中 $\phi_M = (3(2\rho_1 - (p+2)\rho_2))/(2\alpha\rho_1\rho_2(p+1))$. 利用(22) 式对(3) 式的第 1 个方程积分, 当 $\phi \in (0, \phi_M)$ 时, 可以得到方程(1) 的峰型光滑孤立波解的参数表示

$$u(x - ct) = \phi(x - ct) = \phi_M \operatorname{sech}^2(\omega_4(x - ct)), \quad (23)$$

其中 $\omega_4 = \sqrt{(\alpha\rho_1\phi_M)/(6\beta\rho_2(p+2))}$.

当 $\phi \in (\phi_s, 0)$ 时, 对应于两条异宿轨和 $\phi = \phi_s$ 的一部分, 可得到方程(1) 的谷型孤立尖波解的参数表示

$$u(x - ct) = \phi(x - ct) = \phi_M \operatorname{sech}^2((\omega_4(x - ct) + \delta_0)/2), \quad (24)$$

其中 $\delta_0 = \ln((\sqrt{\phi_M - \phi_s} + \sqrt{\phi_M})/(\sqrt{\phi_M - \phi_s} - \sqrt{\phi_M}))$.

3.5 谷型的周期尖波解

当 $\rho_1 > 0$ 时, 可得图 1 的 9 种情况, 它们分别是(a)、(c)、(f)、(h)、(i)、(l)、(n)、(q)、(s). 曲线 $H(\phi, y) = 0$ 表示系统(3) 的一条弧形异宿轨, 该水平曲线定义了方程(1) 的 1 个周期尖波解. 事实上, 对于以上 9 种情况都有:

$$y^2 = \frac{D_0}{\Omega} \left[-\frac{A_0}{D_0} + \frac{\alpha\rho_2(p-1)A_0}{D_0} \phi - \frac{C_0}{D_0} \phi^2 - \phi^3 \right] = \frac{2\alpha\rho_1}{3\beta(p+2)\rho_2} (\phi_M - \phi)[(\phi - b_1)^2 + a_1^2], \quad (25)$$

其中 $b_1 = -(\phi_M + C_0/D_0)/2$, $a_1^2 = -(\phi_M + 2\phi_M C_0/D_0 + C_0^2/D_0^2 + 4A_0/(\phi_M D_0))/4$ 且 $(\phi_M, 0)$ 是曲线和 ϕ 轴的交点. 因此, 我们得到方程(1) 的周期尖波解的参数表示

$$u(x, t) = \phi(x - ct) = \frac{(A + \phi_M) \operatorname{cn}(\Omega_2(x - ct), k) - (A - \phi_M)}{1 + \operatorname{cn}(\Omega_2(x - ct), k)}, \quad (26)$$

其中 $0 < \Omega_2(x - ct) < \phi^{-1}(\phi_s)$, $A^2 = (b_1 - \phi_M)^2 + a_1^2$, $k^2 = (A - b_1 + \phi_M)/(2A)$, $\Omega_2 = \sqrt{(2\alpha\rho_1 A)/(3\beta(p+2)\rho_2)}$.

3.6 峰型周期尖波解和谷型的周期尖波解的共存性

当 $\rho_1 = 0, 0 < c < 1, \phi_0 < \phi_s < 0$ 且 $\Delta_2 > 0$ 时(见图 2(c)), $D_0 = 0, H(\phi, y) = 0$ 可化为 $(1 + \alpha\rho_2\phi)^{(p-1)} = 0$ 或

$$y^2 = \frac{C_0}{\Omega} \left[-\frac{A_0}{C_0} + \frac{\alpha\rho_2(p-1)A_0}{C_0} \phi - \phi^2 \right] = \frac{1}{\beta(p+1)\rho_2} (\phi_M - \phi)(\phi - \phi_m). \quad (27)$$

利用 (27) 式对 (3) 式的第 1 个方程积分, 当 $\phi \in [\phi_m, \phi_s]$ 时, 可得方程 (1) 的周期尖波解的参数表示

$$u(x, t) = \phi(x - ct) = [(\phi_M + \phi_m) - (\phi_M - \phi_m) \cos(\omega_2(x - ct))]/2, \quad (28)$$

其中 $\omega_2 = 1/(\sqrt{\beta\rho_2(p+1)})$. 当 $\phi \in (\phi_s, \phi_M]$ 时, 可得到方程 (1) 的周期尖波解的参数表示

$$u(x, t) = \phi(x - ct) = [(\phi_M + \phi_m) + (\phi_M - \phi_m) \cos(\omega_2(x - ct))]/2, \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_M &= \left\{ (p-1)[\rho_2(p+1)(c-1) + 1] + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{(p-1)(p+1)[\rho_2(p+1)(c-1) + 1][\rho_2(p-1)(c-1) - 1]} \right\} / (\alpha\rho_2p(p-1)), \\ \phi_m &= \left\{ (p-1)[\rho_2(p+1)(c-1) + 1] - \right. \\ &\quad \left. \sqrt{(p-1)(p+1)[\rho_2(p+1)(c-1) + 1][\rho_2(p-1)(c-1) - 1]} \right\} / (\alpha\rho_2p(p-1)). \end{aligned}$$

4 方程 (1) 的扭子波解和反扭子波解

本节讨论方程 (1) 的扭子波解和反扭子波解的存在性. 类似以第 2 节, 我们有如下结论成立.

结论 4 当 $\rho_1 < 0, \rho_2 > 0, 1 < c < 1 - 3/(16\rho_1), \phi_s < 0 < \phi_1 < \phi_2, h_0 = h_2$ 且 $\Delta_2 < 0$ 时, 在 (6) 式中对应于 $h = h_0 = h_2 = A_0/\Omega$, 方程 (1) 有一个扭子波解和一个反扭子波解. 此外, 若 $h \in (h_1, h_0)$, 则方程 (1) 有不可数无穷多个光滑的周期波解(见图 3(e)).

对这些扭子波解和反扭子波解, 通过椭圆函数, 我们总能给出它们的显示参数表示. 由于这些参数表示太复杂, 本文不作讨论.

[参 考 文 献]

- [1] Tzirtzilakis E, Xenos M, Marinakis V, et al. Interactions and stability of solitary waves in shallow water[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2002, **14**(1): 87-95.
- [2] Tzirtzilakis E, Marinakis V, Apokis C, et al. Soliton-like solutions of higher order wave equations of the Korteweg-de Vries type[J]. J Math Phys, 2002, **43**(12): 6151-6161.
- [3] Fokas A s. On a class of physically important integralequations[J]. Physica D, 1995, **87**(1/4): 145-150.
- [4] LONG Yao, RUI Wei-guo, HE Bin. Travelling wave solutions for a higher order wave equations of KdV type (I)[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, **23**(2): 469-475.
- [5] LI Ji-bin, DAI Hui-hui. On the studies of singular travelling wave equations[A]. Dynamical System Approach [C]. Beijing: Science Press, 2007.

- [6] Chow S N, Hale J K. Method of Bifurcation Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [7] Guckenheimer J, Holmes P J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [8] Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [9] Li Y A, Olver P J. Convergence of solitary wave solutions in a perturbed bi-Hamiltonian dynamical system I: Compactons and peakons [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 1997, 3(3): 419-432.
- [10] Li Y A, Olver P J. Convergence of solitary wave solutions in a perturbed bi-Hamiltonian dynamical system II: Complex analytic behaviour and convergence to non-analytic solutions [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 1998, 4(1): 159-191.
- [11] LI Ji-bin, LIU Zhen-rong. Smooth and non-smooth travelling waves in a nonlinearly dispersive equation [J]. Appl Math Modelling, 2000, 25(1): 41-56.
- [12] LI Ji-bin, LIU Zhen-rong. Travelling wave solutions for a class of nonlinear dispersive equations [J]. Chin Ann of Math, 2002, 23B(3): 397-418.

Travelling Wave Solutions for a High Order Wave Equation of KdV Type

LONG Yao¹, LI Ji-bin², RUI Wei-guo¹, HE Bin¹

(1. Department of Mathematics, Honghe University, Mengzi,
Yunnan 661100, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Zhejiang Normal University,
Jinhua, Zhejiang 321004, P. R. China;

3. School of Science, Kunming University of Science and Technology,
Kunming, Yunnan 650093, P. R. China)

Abstract: The theory of planar dynamical systems is used to study the dynamical behaviour of the travelling wave solutions of a nonlinear wave equations of KdV type. In different regions of the parametric space, sufficient conditions to guarantee the existence of solitary wave solutions, periodic wave solutions, kink and anti-kink wave solutions are given. All possible exact explicit parametric representations are obtained for these waves.

Key words: solitary wave solution; periodic wave solution; kink wave and anti-kink wave solutions; smooth and non-smooth periodic wave