应用数学和力学,第 28 卷 第 11 期
2007 年 11 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 11, Nov. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 11-1281-06

一类广义 Boussinesq 型方程解的爆破*

王艳萍[1,2], 郭柏灵[2]

(1. 郑州航空工业管理学院 数理系, 郑州 450015;
2. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 研究一类广义 Boussinesq 型方程的初边值问题, 利用 Galerkin 方法证明问题局部广义解的存在性与唯一性• 同时, 通过使用凸性方法给出问题的解在有限时刻发生爆破的充分条件•

关 键 词: Boussinesq 型方程; 初边值问题; 局部解; 解的爆破

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

本文讨论如下广义 Boussinesq 型方程的初边值问题

$$u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + \beta u_{xxxxtt} = f(u)_{xx}, \qquad 0 < x < 1; 0 < t < T, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \qquad 0 \leqslant t < T, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$

其中, $u(x, t)$ 是关于变量 x 和 t 的未知函数, $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$ 是物理常数, $f(x)$ 是已知的非线性函数, $\varphi(x)$ 和 $\phi(x)$ 是给定的初始函数•

在晶格动力学和水波的研究中都提出了如下的模型方程(见文献[1])

$$u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + \beta u_{xxxxtt} = \gamma(u^2)_{xx}, \tag{4}$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 和 $\gamma \neq 0$ 是常数• 显然方程(1)是方程(4)的广义形式• 这种方程也被称为 Boussinesq 方程(简称 Bq 型方程)• 关于 Boussinesq 方程的孤立子波解和行波解的研究, 已经有大量的结果, 具体的可见文献[2-5]及其内参考文献• 另外, 文献[6-8]对一些 Bq 型方程的定解问题做了讨论•

本文首先证明问题(1)~(3)的局部广义解的存在性与唯一性, 然后利用凸性方法证明问题解的爆破•

文中分别用 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_{H^m}$ 表示 $L^2(0, 1)$ 和 Sobolev 空间 $H^m(0, 1)$ 中的范数, 有时也记 $\Omega = (0, 1)$•

1 局部解

本节将利用 Galerkin 方法和紧性原理证明问题(1)~(3)的解的存在性•

* 收稿日期: 2006-08-17; 修订日期: 2007-08-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671182); 河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目
作者简介: 王艳萍(1968—), 女, 河南周口人, 副教授, 博士(联系人. E-mail: wangyping1968@163.com).

设$\{y_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$是由特征值问题

$$y''+\lambda y=0,\quad y(0)=y(1)=0,\qquad 0<x<1$$

对应于特征值 $\lambda_j(j=1,2,\dots)$ 的特征函数构成的 $L^2(0,1)$ 中的一组标准正交基。

设问题(1)～(3)的近似解为

$$u_N(x,t)=\sum_{j=1}^{N}\mu_{Nj}(t)y_j(x),\tag{5}$$

其中 $\mu_{Nj}(t)\ (j=1,2,\dots,N)$ 是待定系数，N 是自然数。设初值函数 $\varphi(x)$ 和 $\phi(x)$ 能表示为

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{\infty}l_jy_j(x),\quad \phi(x)=\sum_{j=1}^{\infty}n_jy_j(x),$$

其中 l_j 和 $n_j(j=1,2,\dots)$ 是常数。把近似解(5)以及初值函数的近似

$$\varphi_N(x)=\sum_{j=1}^{N}l_jy_j(x),\quad \phi_N(x)=\sum_{j=1}^{N}n_jy_j(x),$$

分别代入方程(1)和方程(3)，然后对 x 在 Ω 上积分，得到

$$(1+\beta\lambda_s^2)\ddot{\mu}_{Ns}+\alpha\lambda_s^2\mu_{Ns}=(f(u_N)_{xx},y_s),\tag{6}$$

$$\mu_{Ns}(0)=l_s,\quad \dot{\mu}_{Ns}(0)=n_s,\qquad s=1,2,\dots,N,\tag{7}$$

$\dot{\mu}_{Ns}=\mathrm{d}\mu_{Ns}(t)/\mathrm{d}t$，$(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(0,1)$ 中的内积。

引理 1.1　假定 $f\in C^2$ 且 $f^{(j)}(s)\leqslant K_j|s|^{p+1-j}(j=0,1,2)$，这里 $K_j>0$ 是常数，p 是正整数。记

$$E_N(t)=\sum_{s=1}^{N}\left\{(1+\alpha\lambda_s^2+\alpha\lambda_s^4)\mu_{Ns}^2+(1+\lambda_s^2+\beta\lambda_s^2+\beta\lambda_s^4)\dot{\mu}_{Ns}^2\right\}+1.\tag{8}$$

如果

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left\{(1+\alpha\lambda_s^2+\alpha\lambda_s^4)l_s^2+(1+\lambda_s^2+\beta\lambda_s^2+\beta\lambda_s^4)n_s^2\right\}+1<\infty,\tag{9}$$

则常微分方程组的初值问题(6)、(7)在 $[0,t_0]$ 上存在古典解 $\mu(t)=(\mu_{N1}(t),\mu_{N2}(t),\dots,\mu_{NN}(t))$，并且

$$E_N(t)\leqslant E\left(1-\frac{p}{2}At_0E^{p/2}\right)^{-2/p}=B,\tag{10}$$

在区间 $[0,t_0]$ 上一致有界，其中 $t_0>0$，$A>0$ 以及界 B 都与 N 无关。

证明　问题(6)、(7)是关于 $\mu_{Ns}(t)\ (s=1,2,\dots,N)$ 的二阶常微分方程组的初边值问题，可以等价的地化为 $2N$ 维的一阶常微分方程组的初值问题，再注意到 f 的光滑性，局部解的存在性是显然的。记解的最大存在区间为 $[0,t_N)$，下面的估计表明 t_N 有与 N 无关的正下界。

方程组(6)的两端同乘以 $(1+\lambda_s^2)\dot{\mu}_{Ns}(t)$，然后对 $s=1,2,\dots,N$ 求和，并且两端都加上 (u_N,u_{Nt})，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_N(t)&=2(f(u_N)_{xx},u_{Nt}+u_{Nx^4t})+2(u_N,u_{Nt})=\\&\quad 2(f''(u_N)u_{Nx}^2+f'(u_N)u_{Nxx},u_{Nt}+u_{Nx^4t})+2(u_N,u_{Nt}).\end{aligned}\tag{11}$$

利用 Sobolev 空间的嵌入定理，注意到式(8)，有

$$\|u_N(\cdot,t)\|_{C^3(\Omega)}\leqslant C_0\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4(\Omega)}\leqslant C_1(E_N(t))^{1/2},\tag{12}$$

这里及下面出现的 C_i 均表示与 N 无关的常数。

利用 Hölder 不等式以及式(8)和式(12)，可以得到

$$|2(f''(u_N)u_{Nx}^2+f'(u_N)u_{Nxx},u_{Nt}+u_{Nx^4t})+2(u_N,u_{Nt})|\leqslant$$
$$(2K_2\|u_N(\cdot,t)\|_{C(\Omega)}^{p-1}\|u_{Nx}(\cdot,t)\|_{C(\Omega)}\|u_{Nx}(\cdot,t)\|+$$
$$2K_1\|u_N(\cdot,t)\|_{C(\Omega)}^{p}\|u_{Nxx}(\cdot,t)\|)(\|u_{Nt}(\cdot,t)\|+\|u_{Nx^4t}(\cdot,t)\|)+$$
$$2\|u_N(\cdot,t)\|\|u_{Nt}(\cdot,t)\|\leqslant A(E_N(t))^{(p+2)/2},\tag{13}$$

其中 $A>0$ 是与 N 无关的常数· 对于 $t\in[0,t_N)$，由式(11)和式(13)知

$$E_N(t)\leqslant\frac{E_N(0)}{[1-(p/2)At(E_N(0))^{p/2}]^{2/p}}\leqslant\frac{E}{1-(p/2)AtE^{p/2}}\cdot$$

如果 t_0 满足 $1-(p/2)At_0E^{p/2}\leqslant\delta$，其中 $0<\delta<1$，则在区间 $[0,t_0]$ 上式(10)成立，且 $(2(1-\delta))/(pAE^{p/2})\leqslant t_0<2/(pAE^{p/2})$，其中 $(2(1-\delta))/(pAE^{p/2})>0$ 是常数，这表明 t_N 有正的下界· 引理证毕·

推论 1.2 在引理 1.1 的条件下，问题(1)~(3)的近似解 $u_N(x,t)$ 有估计式

$$\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4}+\|u_{Nt}(\cdot,t)\|_{H^4}+\|u_{Ntt}(\cdot,t)\|_{H^4}\leqslant C_2,\qquad t\in[0,t_0]\cdot$$

证明 利用式(10)，并注意到式(8)中 $E_N(t)$ 的表达式，易知

$$\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4}+\|u_{Nt}(\cdot,t)\|_{H^4}\leqslant C_3,\qquad t\in[0,t_0]\cdot\tag{14}$$

利用 Sobolev 嵌入定理知，

$$\|u_N(\cdot,t)\|_{C^3(\Omega)}\leqslant C_4,\qquad\forall t\in[0,t_0]\cdot\tag{15}$$

式(6)两端同乘以 $(1+\lambda_s^2)\ddot{\mu}_{Ns}(t)$，并对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和，得

$$\sum_{s=1}^{N}(1+\lambda_s^2)(1+\beta\lambda_s^2)\ddot{\mu}_{Ns}^2(t)+\sum_{s=1}^{N}\alpha\lambda_s^2(1+\lambda_s^2)\mu_{Ns}(t)\ddot{\mu}_{Ns}^2(t)=$$
$$(f(u_N)_{xx},u_{Ntt}+u_{Nx^4tt})$$

即

$$\|u_{Ntt}(\cdot,t)\|^2+(\beta+1)\|u_{Nx^2tt}(\cdot,t)\|^2+\beta\|u_{Nx^4tt}(\cdot,t)\|^2=$$
$$(f''(u_N)u_{Nx}^2+f'(u_N)u_{Nxx}-\alpha u_{Nx^4}u_{Ntt}+u_{Nx^4tt})\cdot\tag{16}$$

利用式(15)，对式(16)的右端使用 Young 不等式，并注意到式(14)，可得到

$$\|u_{Ntt}(\cdot,t)\|^2+(\beta+1)\|u_{Nx^2tt}(\cdot,t)\|^2+\beta\|u_{Nx^4tt}(\cdot,t)\|^2\leqslant C_5\cdot\tag{17}$$

由式(14)和式(17)知道，推论得证·

定理 1.3 在引理 1.1 的条件下，初边值问题(1)~(3)存在唯一的局部广义解 $u(x,t)$·

证明 在定理的假定条件下，问题(1)~(3)的近似解 $u_N(x,t)$ 有估计式(17)· 利用弱紧性原理和 Ascoli-Arzelà 定理知，存在 $\{u_N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ 中的子序列(还记为) $\{u_N(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ 和函数 $u(x,t)$，满足当 $N\to\infty$ 时，$\{u_{Nx^rt^j}(x,t)\}_{N=1}^{\infty}(r=0,1,2,3,4;j=1,2)$ 在 $L^2(0,t_0;L^2(\Omega))$ 中分别弱收敛于 $u(x,t)$ 相应的各阶导数 $u_{x^rt^j}(x,t)$ $(r=0,1,2,3,4;j=1,2)$，同时 $\{u_{Nx}(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ 和 $\{u_{Nxx}(x,t)\}_{N=1}^{\infty}$ 分别在 $[0,1]\times[0,t_0]$ 上一致收敛于 $u(x,t)$ 的相应导数 $u_x(x,t)$ 和 $u_{xx}(x,t)$· 易知 $u(x,t)$ 是初边值问题(1)~(3)的局部广义解·

现在证明局部广义解的唯一性· 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是初边值问题(1)~(3)的两个广义解· 记

$$U(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t),$$

则 $U(x,t)$ 满足

$$U_{tt}+\alpha U_{xxxx}+\beta U_{xxxxtt}=f(u_1)_{xx}-f(u_1)_{xx},\qquad 0<x<1;\ 0<t<t_0,\tag{18}$$

$$U(0,t)=U(1,t)=U_{xx}(0,t)=U_{xx}(1,t)=0,\qquad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{19}$$

$$U(x,0)=U_t(x,0)=0,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{20}$$

式(18)两边同乘以 $U_t(x,t)$, 并对 x 在(0,1)上积分, 通过分部积分, 并利用 Gargliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\|U(\cdot,t)\|^2+\|U_t(\cdot,t)\|^2+\alpha\|U_{xx}(\cdot,t)\|^2+\beta\|U_{xxt}(\cdot,t)\|^2\right\}=\\
&\quad -\int_0^1[f'(u_1)u_{1x}-f'(u_2)u_{2x}]U_{xt}\mathrm{d}x+2\int_0^1 UU_t\mathrm{d}x=\\
&\quad -\int_0^1\left\{[f'(u_1)-f'(u_2)]u_{1x}+f'(u_2)U_x\right\}U_{xt}\mathrm{d}x+2\int_0^1 UU_t\mathrm{d}x=\\
&\quad -\int_0^1\left\{f''(u_2+\theta(u_1-u_2))Uu_{1x}+f'(u_2)U_x\right\}U_{xt}\mathrm{d}x+2\int_0^1 UU_t\mathrm{d}x\leqslant\\
&\quad C_6\left\{\|U(\cdot,t)\|\,\|U_{xt}(\cdot,t)\|+\|U_x(\cdot,t)\|\,\|U_{xt}(\cdot,t)\|+\right.\\
&\quad \left.\|U(\cdot,t)\|\,\|U_t(\cdot,t)\|\right\}\leqslant\\
&\quad C_7\left\{\|U(\cdot,t)\|^2+\|U_t(\cdot,t)\|^2+\|U_{xx}(\cdot,t)\|^2+\|U_{xxt}(\cdot,t)\|^2\right\}.
\end{aligned}\tag{21}$$

注意到式(20), 利用 Gronwall 不等式, 由式(21)知

$$\|U(\cdot,t)\|^2+\|U_t(\cdot,t)\|^2+\alpha\|U_{xx}(\cdot,t)\|^2+\beta\|U_{xxt}(\cdot,t)\|^2=0,$$

这表明 $u_1(x,t)=u_2(x,t)$. 唯一性得证. 定理证毕.

2 解的爆破

引理 2.1(Jensen 不等式) 设 $G(x)$ 定义在 (a,b) 上, $G(x)\in[a_1,b_1]$, 其中 a、b、a_1 和 b_1 是有限数或 ∞, $F(x)$ 是 (a_1,b_1) 上的连续的凸函数. $Q(x)\in L^1[a,b]$, 且 $Q(x)\geqslant 0$, 则

$$F\left(\frac{\int_a^b G(x)Q(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b Q(x)\mathrm{d}x}\right)\leqslant\frac{\int_a^b F(G(x))Q(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b Q(x)\mathrm{d}x}$$

在右端有限时成立.

引理 2.2[9] 设 $z(t)\in C^2$ 满足 $\ddot z(t)\geqslant h(z)$ $(t\geqslant 0)$ 并且 $z(0)=\rho>0$, $\dot z(0)=\tau>0$. 如果对所有的 $s\geqslant\rho$, 都有 $h(s)\geqslant 0$, 则在 $z(t)$ 的定义域内有 $\dot z(t)>0$ 且成立不等式

$$t\leqslant\int_\rho^{z(t)}\left[\tau^2+2\int_\rho^s h(\xi)\mathrm{d}\xi\right]^{-1/2}\mathrm{d}s.$$

定理 2.3 设 $u(x,t)$ 是问题(1)~(3)的广义解. 假定如下条件满足:

(a) $-\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^1\varphi(x)\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\rho>0$, $-\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^1\psi(x)\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\tau>0$;

(b) $f(s)\in C^2(R)$ 是偶的凸函数且满足

(i) $f(0)=0$, $f(\rho)-\alpha\pi^2\rho\geqslant 0$;

(ii) 当 $s\to+\infty$ 时 $f(s)$ 增长得足够快, 使得积分

$$T=\int_\rho^{+\infty}\left[\tau^2+\frac{2\pi^2}{1+\beta\pi^4}\left(\int_\rho^s f(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{\alpha\pi^2}{2}s^2\right)+\frac{\alpha\pi^4\rho^2}{1+\beta\pi^4}\right]^{-1/2}\mathrm{d}s$$

收敛. 则存在有限时刻 $T_0\leqslant T$, 使得

$$\lim_{t\to T_0^-}\sup_{x\in(0,1)}|u(x,t)|=+\infty.$$

证明 记

$$z(t)=-\frac{\pi}{2}\int_0^1 u(x,t)\sin\pi x\,\mathrm{d}x.$$

方程(1)的两端同乘以 $(\pi/2)\sin\pi x$ 并在 $(0,1)$ 上积分, 得

$$-\ddot{z}(t)+\frac{\pi}{2}\alpha\int_0^1 u_{xxxx}\sin\pi x\,\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}\beta\int_0^1 u_{xxxxtt}\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(u)_{xx}\sin\pi x\,\mathrm{d}x. \tag{22}$$

注意到 $u(x,t)$ 满足的边界条件, 利用分部积分可得

$$\frac{\pi}{2}\alpha\int_0^1 u_{xxxx}\sin\pi x\,\mathrm{d}x=-\pi^4\alpha z(t), \tag{23}$$

$$\frac{\pi}{2}\beta\int_0^1 u_{xxxxtt}\sin\pi x\,\mathrm{d}x=-\pi^4\beta\ddot{z}(t), \tag{24}$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(u)_{xx}\sin\pi x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi^3}{2}\int_0^1 f(u)\sin\pi x\,\mathrm{d}x. \tag{25}$$

把式(23)~式(25)代入式(22)可得

$$(1+\beta\pi^4)\ddot{z}(t)+\alpha\pi^4 z(t)=\frac{\pi^3}{2}\int_0^1 f(u)\sin\pi x\,\mathrm{d}x. \tag{26}$$

利用 Jensen 不等式, 注意到关于 f 的假定, 知

$$\frac{\pi^3}{2}\int_0^1 f(u)\sin\pi x\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi^3}{2}\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x\cdot f\left(\frac{\int_0^1 u(x,t)\sin\pi x\,\mathrm{d}x}{\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x}\right)=$$

$$\pi^2 f(-z(t))=\pi^2 f(z(t)). \tag{27}$$

由式(26)和式(27)知,

$$\ddot{z}(t)\geqslant\frac{\pi^2}{1+\beta\pi^4}[f(z(t))-\alpha\pi^2 z(t)], \tag{28}$$

其中 $\quad z(0)=\rho>0,\ \dot{z}(0)=\tau>0.$

首先表明 $f(s)-\alpha\pi^2 s\geqslant 0$ 对于所有的 $s\geqslant\rho$ 成立. 事实上, 由于 $f\in C^2(R)$ 且是偶的凸函数, 则 $f''(s)\geqslant 0$ 且 $f'(0)=0$. 记 $f_0(s)=f(s)-\alpha\pi^2 s$, 则 $f_0''(s)=f''(s)\geqslant 0$. 则 $f_0'(s)$ 是单调增加函数. 由于

$$f_0(0)=f(0)=0,\ f_0'(0)=f'(0)-\alpha\pi^2=-\alpha\pi^2<0,$$

且 $f_0(\rho)=f(\rho)-\alpha\pi^2\rho\geqslant 0$, 则 $f_0(s)$ 在 $(0,\rho)$ 内的某个点 s_0 处取到最小值, 且 $f'(s_0)=0$. 由于 $f_0'(s)$ 的单调增加性质, 对 $s\geqslant s_0$, $f_0'(s)\geqslant f_0'(s_0)=0$, 从而 $s\geqslant s_0$ 时, $f_0(s)$ 是单增函数. 特别地, $f_0(s)$ 在 $[\rho,\infty)$ 上单增, 且 $f_0(s)\geqslant f_0(\rho)\geqslant 0$, 因而对 $\forall s\geqslant\rho$, $f(s)-\alpha\pi^2 s\geqslant 0$. 记

$$h(s)=\frac{\pi^2}{1+\beta\pi^4}(f(s)-\alpha\pi^2 s),$$

则当 $s\geqslant\rho$ 时, $h(s)\geqslant 0$. 再注意到 $z(0)=\rho>0$, $\dot{z}(0)=\tau>0$ 以及式(28), 利用引理 2.2 知, $\dot{z}(t)$ 在其定义域内有 $\dot{z}(t)>0$ 且

$$t\leqslant\int_\rho^{z(t)}\left[\tau^2+\frac{2\pi^2}{1+\beta\pi^4}\int_\rho^s(f(\xi)-\alpha\pi^2\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]^{-1/2}\mathrm{d}s.$$

因此, 在有限时刻 $T_0\leqslant T$, $z(t)$ 产生奇性, 其中

$$T=\int_\rho^{+\infty}\left[\tau^2+\frac{2\pi^2}{1+\beta\pi^4}\left(\int_\rho^s f(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\frac{\alpha\pi^2}{2}s^2\right)+\frac{\alpha\pi^4\rho^2}{1+\beta\pi^4}\right]^{-1/2}\mathrm{d}s.$$

由于 $z(t)>0$, 从而

$$z(t) \leqslant \sup_{0<x<1} |u(x,t)|.$$

则

$$\lim_{t\to T_0^-} \sup_{0<x<1} |u(x,t)| = +\infty.$$

定理证毕.

[参 考 文 献]

[1] Rosenau P. Dynamics of dense lattices[J]. Physical Review B, 1987, **36**(11): 5868-5876.

[2] Samsonov A M, Sokurinskaya E V. On existence of longitudinal strain solitons in an infinite nonlinearly elastic rod[J]. Soviet Phys Dokl, 1988, **4**(2): 298-300.

[3] Samsonov A M. Nonlinear strain waves in elastic waveguide[A]. In: Jeffrey A, Engelbrecht J Eds. Nonlinear Waves in Solids [M]. CISM Courses and Lecture, Vol. **341**, Wien. New York: Springer, 1994.

[4] Samsonov A M. On some exact travelling wave solutions for nonlinear hyperbolic equation[J]. Pitman Res Notes Math Ser, Longman, 1993, **227**(1): 123-132.

[5] Porubov A V. Strain solitary waves in an elastic rod with microstructure[J]. Rend Sem Mat Univ Politec Torino, 2000, **58**(1): 189-198.

[6] CHEN Guo-wang, WNAG Yan-ping, ZHAO Zhan-cai. Blow-up of solution of an initial boundary value problem for a damped nonlinear hyperbolic equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, **17**(5): 491-497.

[7] CHEN Guo-wang, WANG Yan-ping, WANG Shu-bin. Initial boundary value problem of the generalized cubic double dispersion equation[J]. J Math Anal Appl, 2004, **299**(2): 563-577.

[8] 王艳萍. 一类非线性波方程整体解的存在性[J]. 数学的实践与认识, 2004, **34**(10): 153-158.

[9] Glassey R T. Blow-up theorems for nonlinear wave equations[J]. Math Z, 1973, **132**(2): 183-203.

Blow-up of the Solution for a Generalized Boussinesq Equation

WANG Yan-ping[1,2], GUO Bo-ling[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, P. R. China;

2. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, P. R. China)

Abstract: The initial boundary value problem for a generalized Boussinesq equation was studied and the existence and uniqueness of the local generalized solutions of the problem by Galerkin method were proved. Moreover, the sufficient conditions of blow-up of the solution of the problem in finite time by the concavity method were given.

Key words: Boussinesq equation; initial boundary value problem; local solution; blow-up of the solution