

饱和粘土非线性渗流规律与径向固结^{*}

邓英尔^{1,2}, 谢和平², 黄润秋¹, 刘慈群³

(1. 成都理工大学 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室, 成都 610059;

2. 四川大学 工程科学与灾害力学研究所, 成都 610064;

3. 中国科学院 渗流流体力学研究所, 河北 廊坊 065000)

(我刊编委谢和平、刘慈群来稿)

摘要: 以多孔介质等效渗流概念得出粘土平均孔隙微尺度数量级范围在 $0.01 \mu\text{m}$ 至 $0.1 \mu\text{m}$, 与测试结果一致。实验结果表明饱和粘土微尺度孔隙渗流为非线性流。理论推导表明固液界面作用与渗透率平方根或孔隙半径成反比。固液界面相互作用是导致饱和粘土非线性渗流的重要原因。提出了精确描述饱和粘土微尺度孔隙非线性渗流基本规律的数学模型, 其参数量纲明确, 物理意义清楚。建立了饱和粘土非线性渗流新定律, 统一描述了从较低到较高水力梯度全过程渗流曲线特征, 达西定律是其特例。基于新定律, 建立了饱和粘土非线性渗流定流量径向固结数学模型。以粘性边界层思想与稳态依序替换法及积分方程法, 导出了粘土非线性渗流平均质量守恒方程及活动边界运动方程, 给出了饱和粘土非线性渗流超孔隙水压力分布公式与平均固结度计算公式, 获得了粘土层压力分布规律和平均固结度随时间变化规律。结果表明: 饱和粘土非线性渗流使活动边界运动速度减小。研究结果为粘土地质工程与岩土工程应用提供了新的科学依据。达西渗流径向固结计算是新的非线性渗流固结计算的特例。

关键词: 饱和粘土; 非线性渗流定律; 固结; 平均固结度; 活动边界

中图分类号: O357 **文献标识码:** A

引言

自从 1856 年达西建立多孔介质线性渗流定律以来, 它一直作为一个基本定律被广泛运用于多种学科与工程技术领域^[1-4]。然而, 有许多领域涉及非线性渗流^[5-8], Kutilek 曾经概括了 12 种可能的非线性渗流情形, 典型的非线性渗流曲线如图 1 所示^[9]。固结理论为土力学的精华, 受到岩土力学与工程研究者的高度关注。但值得注意的是: 经典的 Terzaghi Karl 固结理论建立在若干假定基础上, 例如假设渗流为达西线性渗流等。此外, 分析 Terzaghi Karl 固结理论可知, 该理论求出的固结度随时间的变化只能反映竣工后的固结规律, 不能反映施工期的固结规律。Elnaggar 和 Schmidt 等人研究了非达西流对粘土固结过程的影响^[10-11]。Pascal 等给出了

* 收稿日期: 2006-09-08; 修订日期: 2007-09-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40202036; 40572163; 50579042); 四川省青年科学基金资助项目(05ZQ026-043); 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室基金资助项目(GZ2004-05); 中国博士后科学基金资助项目(第 35 批)

作者简介: 邓英尔(1967—), 男, 湖南邵阳人, 研究员, 博士, 博士生导师(联系人, Fax: + 86-28-84077066; E-mail: dengye6789@sina.com)。

有起始水力梯度固结问题的近似解,但不能计算压力传播动边界的位置,且其近似解是用无穷级数表示的^[12]。刘慈群假定流量随土层深度线性递减,获得了有起始水力梯度的单向固结问题的近似解^[13]。这些学者的研究都基于饱和粘土渗流为具有起始水力梯度的非线性渗流的假定。但实验结果表明,饱和粘土渗流遵循新的非线性渗流定律。深入研究饱和粘土渗流基本规律及其应用问题,对渗流力学的发展及其应用范围的拓展具有重要意义。

本文旨在分析粘土孔隙微尺度数量级范围,探索饱和粘土渗流固液界面相互作用的强弱与粘土微尺度孔隙半径的关系,初步揭示饱和粘土微尺度孔隙渗流机理;分析饱和粘土渗流实验结果,探讨饱和粘土微尺度孔隙渗流基本规律,概化饱和粘土渗流基本规律曲线特征,提出描述饱和粘土渗流基本规律的新模型,统一描述饱和粘土从较低到较高水力梯度全过程渗流曲线特征。然后,基于饱和粘土非线性渗流新模型,建立粘土非线性渗流定流量径向固结数学模型。以粘性边界层的思想^[14]与稳态依序替换法,构造数学模型解的结构,结合边界条件,给出含活动边界变量的试探解。应用积分方程法,导出粘土非线性渗流平均质量守恒方程,得出活动边界运动方程,导出饱和粘土径向非线性渗流平均固结度计算公式。进行实例分析,探讨饱和粘土微尺度孔隙非线性渗流固结活动边界运动速度和平均固结度的变化规律,为饱和粘土地质工程等领域的应用提供新的科学依据。

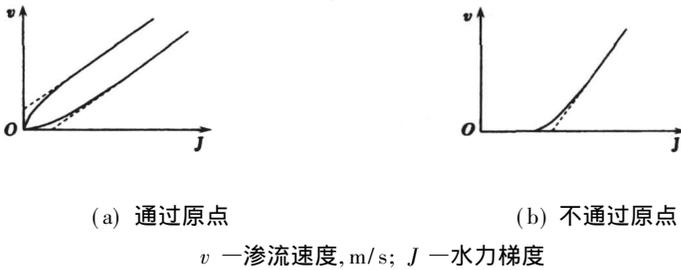


图1 典型的非线性渗流曲线(据 Kutilek, 稍有修改)

1 粘土平均孔隙的微尺度范围

以多孔介质等效渗流概念,导出的渗透率与平均孔隙大小的关系为^[1]

$$r_a = \left[\frac{8k}{n} \right]^{1/2}, \quad (1)$$

式中, k 为渗透率, m^2 ; r_a 为粘土平均孔隙大小, m ; n 为孔隙率。渗透率与渗透系数具有下列关系

$$k = \frac{K\mu}{\rho g}, \quad (2)$$

式中, K 为渗透系数, m/s ; μ 为流体动力粘性系数, $Pa \cdot s$; ρ 为密度, kg/m^3 ; g 为重力加速度, m/s^2 。粘土多孔介质与流体(20℃水)的基本参数^[15]如表1所示。

表1 粘土及流体(20℃水)的基本参数

$K/(m/s)$	n	$\mu/(Pa \cdot s)$	$\rho/(kg/m^3)$	$g/(m/s^2)$
$10^{-8} \sim 10^{-10}$	30% ~ 40%	1.002×10^{-3}	998.2	9.807

据此表,联立式(1)与式(2),计算得粘土平均孔隙微尺度数量级范围为 $10^{-8} m$ 至 $10^{-7} m$ 。而实验测试结果表明,成都粘土主要孔隙大小约小于或等于 $3.0 \times 10^{-8} m$,试验结果表明理论计

算结果合理。

2 粘土渗流基本规律

2.1 渗流基本规律曲线特征

饱和粘土渗流实验测试的渗流速度与水力梯度的关系曲线(据杜延龄等^[15])与达西渗流基本规律的比较如图2所示。显然,饱和粘土微尺度孔隙中水渗流规律,既不同于达西渗流定律,也不同于具起始水力梯度的非线性渗流^[1],即饱和粘土中水渗流基本规律曲线为通过原点的曲线,具有从较低水力梯度下的凹形曲线至较高水力梯度下的直线连续变化的全过程渗流曲线特征。

2.2 粘土非线性渗流机理探讨

饱和粘土渗流表现出非线性渗流规律的一个重要原因:水在粘土孔隙微管中渗流时存在不可忽略的固液界面作用的影响^[16],使得靠近粘土孔隙微管壁的流体与微管中心处的流体性质不同。由于分子间的相互作用复杂,故以能量形式进行理论分析。运用粘土微毛细管物理模型与分子力概念,参考液体在岩石多孔介质中渗流的情形^[17],得水在粘土孔隙中渗流时固液界面相互作用的强弱与粘土介质渗透率及微尺度孔隙平均半径的关系

$$E_{sl} \propto k^{-1/2} \propto r_a^{-1}, \quad (3)$$

式中, E_{sl} 为固液界面相互作用能, J/m^2 。上式表明:若多孔介质渗透率与孔隙半径愈小,则固液界面相互作用愈强,对渗流的影响就愈大。固液界面相互作用是破坏达西渗流动力学关系,导致粘土非线性渗流的重要原因。

3 粘土非线性渗流新定律

3.1 新规律的建立

要建立粘土微尺度孔隙非线性渗流新定律,即要提出精确描述粘土微尺度孔隙非线性渗流基本规律的数学模型,并要求模型参数量纲明确,物理意义清楚。通常,物理学家追求模型简洁,而数学家力求模型精确与理论严密,工程师却要求模型简单适用^[18]。力学是物理学的开端,是物理理论基础的重要组成部分,而渗流力学属于流体力学的独立分支,渗流属于流体力学的专门问题,处于多种学科交叉领域。建立饱和粘土渗流力学定律新模型时,应综合考虑上述不同要求,提出以下原则:模型尽可能简洁、适用性好、精确,经得起实验检验。分析饱和粘土渗流基本规律,总结渗流曲线基本特征,概化为图3中的实线,非线性渗流基本规律曲线存在拟起始水力梯度与临界水力梯度现象。

分析饱和粘土渗流基本规律曲线特征,并结合函数一阶、二阶导数的几何意义,考虑上述建立模型的原则,提出饱和粘土非线性渗流运动新数学模型

$$v \left[a_1 + \frac{a_2}{1 + b \cdot v} \right] = J, \quad (4)$$

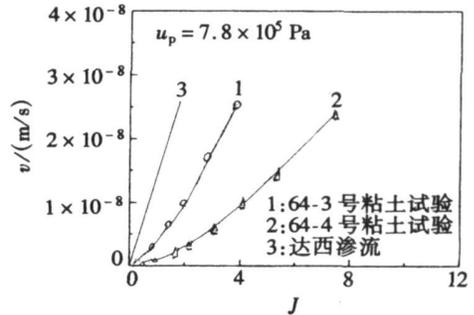
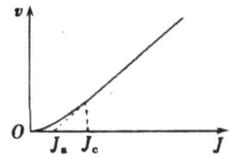


图2 粘土渗流基本规律与达西渗流规律的差别

式中, v 为渗流速度, m/s ; $J = -dh/dx$ 为水力梯度; h 为水头, m ; a_1, a_2, b 为由实验确定的参数, 其量纲均为 $L^{-1}T$ 。当 $v \rightarrow \infty$ 时, $a_1 \rightarrow (1/K)_{\infty}$, $a_2/b \rightarrow J_{\infty}$; 当 $v \rightarrow 0$ 时, $a_1 + a_2 \rightarrow (1/K)_0$ 。模型方程(4)的物理意义为: 粘土介质中流体渗流阻力由两部分组成, 第1部分为粘性阻力, 它与渗流速度成正比; 第2部分为非线性渗流附加阻力。当 $a_2 = 0, a_1 = 1/K$ (K 为渗透系数, m/s); 或 $b = 0, a_1 + a_2 = 1/K$; 或 $a_1 = 0, b = 0, a_2 = 1/K$ 时, 方程(4)均简化为达西渗流定律

$$v = KJ \quad (5)$$

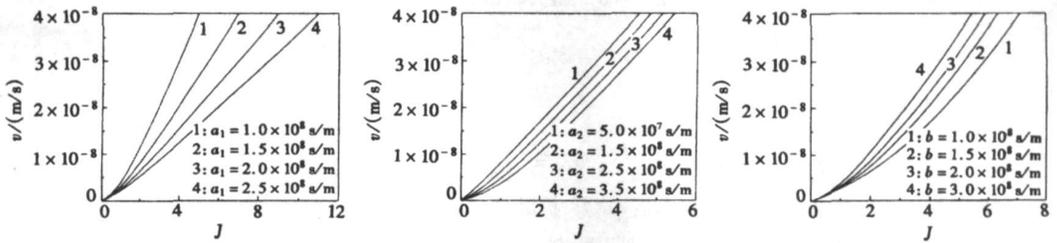


J_a —拟起始水力梯度;
 J_c —临界水力梯度

图3 非线性渗流规律

3.2 新模型的适用性

为了考察新定律模型描述饱和粘土渗流基本规律的适用性, 根据模型进行了理论计算, 曲线如图4所示。显然, 所提出的模型能统一描述粘土中的流体从较低水力梯度下的凹形曲线至较高水力梯度下的直线连续变化的全过程渗流曲线特征, 模型具有很好的适用性。



(a) 参数 a_1 变化时的曲线

(b) 参数 a_2 变化时的曲线

(c) 参数 b 变化时的曲线

图4 新定律模型的适用性

3.3 新模型的求解方法

根据饱和粘土微尺度孔隙非线性渗流实验测试资料进行数理分析时, 已知 v_i 与 J_i 的数据序列, 其中下标 $i = 1, 2, \dots, m$ 为数据点数。记 α 为参数向量, 令目标函数为

$$E = \sum_{i=1}^m (J_i - J(\alpha, v_i))^2 \quad (6)$$

要求解的问题归结为求 α 使 E 取最小值。则

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0 \quad (7)$$

对目标函数做泰勒展开(取至二阶项), 则

$$E^* = E|_{\alpha^0} + \Delta\alpha \cdot g + \frac{1}{2} \Delta\alpha^T H \Delta\alpha \quad (8)$$

式中

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha^0, \quad g = \left\{ \frac{\partial E}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha^0} \right\},$$

$$H = \left\{ \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l} \Big|_{\alpha^0} \right\}.$$

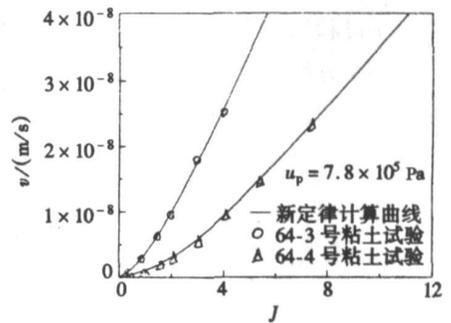


图5 饱和粘土非线性渗流定律模型的实验验证

则

$$\frac{\partial E^*}{\partial \Delta \alpha} = 0, \tag{9}$$

最后得线性化方程组

$$H \Delta \alpha = -g, \tag{10}$$

由该方程组可获得模型的解。上述方法是科学评价所建立的模型精确性的重要方法。

3.4 新模型的实验验证

根据新模型计算的渗流曲线与实验结果比较如图 5 所示。结果表明：新模型计算的理论曲线与实验数据吻合很好，能很好地描述粘土中流体全过程渗流曲线特征。以 643 号粘土为例，其参数 a_1 、 a_2 、 b 分别为 1.17×10^8 s/m、 3.48×10^8 s/m、 3.17×10^8 s/m。

4 粘土非线性渗流定律在固结中的应用

根据非线性渗流新定律，可得饱和粘土非线性径向定常渗流数学模型：

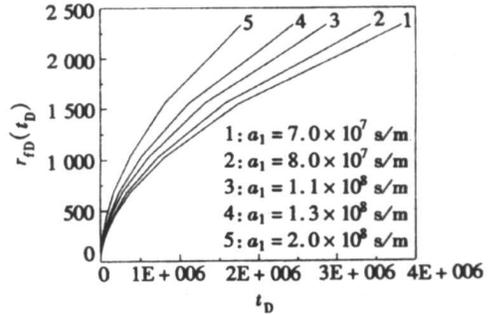
$$-\frac{du_D}{dr_D} = \frac{1}{r_D} + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{1}{r_D + b_D}, \tag{11}$$

式中，无量纲量定义为

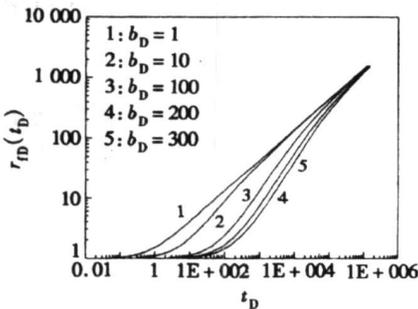
$$u_D = \frac{2\pi M(u_i - u)}{a_1 Q \gamma}, \quad r_D = \frac{r}{r_w}, \quad b_D = \frac{Qb}{2\pi M r_w},$$

u 为超孔隙水压力，Pa； r 为半径，m； Q 为流量， m^3/s ； γ 为容重， $kg/(m^2 \cdot s^2)$ ； M 为粘土层厚度，m；下标 w 、 i 分别为井壁、初始时刻。运用影响半径的概念和稳态依序替换法，由此得非常渗流固结问题的模型。所谓稳态依序替换法是指将非常渗流过程的每个瞬间状态看作定态进行研究的方法。由方程(11)，得饱和粘土微尺度孔隙非线性渗流径向固结控制方程

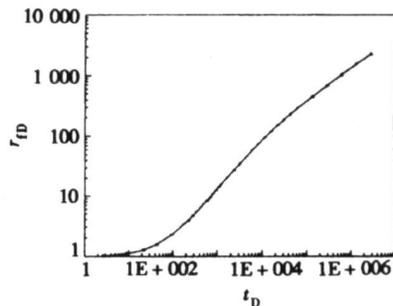
$$-\frac{\partial u_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \frac{1}{r_D} + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{1}{r_D + b_D}, \quad 1 < r_D < r_{fD}(t_D), \tag{12}$$



(a) a_1 对活动边界运动的影响



(b) b_D 对活动边界运动的影响



(c) 643 号饱和粘土

图 6 饱和粘土非线性渗流活动边界的运动规律

式中,无量纲量定义为 $t_D = t / (a_1 m_h^2 \gamma)$; $r_{fD}(t_D) = r_f(t) / r_w$; t 为时间, s; m_h 为压缩系数, 1/Pa; r_f 为影响半径, m. 初始条件为

$$u_D(r_D, 0) = 0, \quad (13)$$

$$r_{fD}(0) = 0, \quad (14)$$

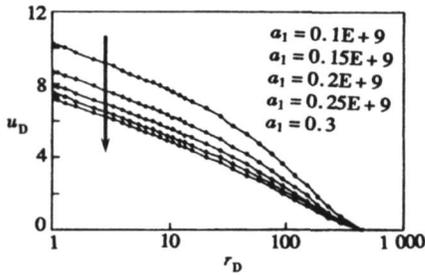
内边界条件为

$$-\frac{\partial u_D(1, t_D)}{\partial r_D} = 1 + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{1}{1 + b_D}, \quad (15)$$

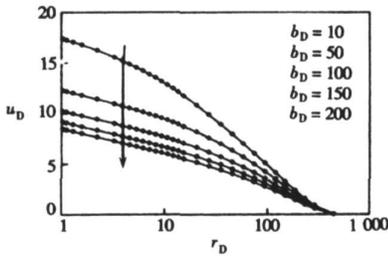
活动外边界条件为

$$u_D(r_{fD}(t_D), t_D) = 0, \quad (16)$$

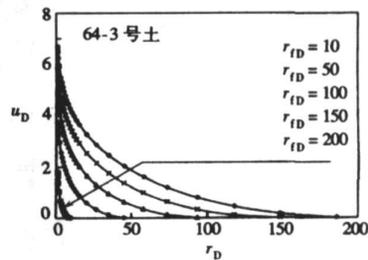
$$\frac{\partial u_D(r_{fD}(t_D), t_D)}{\partial r_D} = 0, \quad (17)$$



(a) 参数 a_1 的影响



(b) 参数 b_D 的影响



(c) 64-3 号饱和粘土

图7 饱和粘土非线性渗流压力分布

其中

$$u_{1D} = \ln \frac{r_{fD}(t_D)}{r_D} - \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{r_D^2}{r_{fD}^2(t_D)} \right], \quad (21)$$

$$u_{2D} = \frac{a_2}{a_1} \left[\ln \frac{r_{fD}(t_D) + b_D}{r_D + b_D} - \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{(r_D + b_D)^2}{(r_{fD}(t_D) + b_D)^2} \right] \right], \quad (22)$$

将式(20)至式(22)代入式(19), 得影响半径的计算式

$$t_D = w \cdot \left[\frac{1}{8} \cdot (r_{fD}^2(t_D) - 1) + \frac{1}{8} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot ((r_{fD}(t_D) + b_D)^2 - (1 + b_D)^2) \right], \quad (23)$$

式(20)至式(23)为饱和粘土微尺度孔隙非线性渗流固结模型式(12)~式(17)的近似解. 通常用固结度的概念, 描述土层固结完成的程度. 但从工程应用的角度而言, 研究整个粘土层的平均固结度更有意义. 饱和粘土非线性渗流径向平均固结度计算式为

$$U = \frac{u_i - u}{u_i} = \frac{2a_{1D}t_D}{r_{iD}^2(t_D) - 1} \quad (24)$$

式中, 上标 $-$ 表示平均值, U 为平均固结度, 无量纲量 $a_{1D} = a_1 Q / (2\pi M u_i)$ 。应当指出: 正如前述, 经典的 Terzaghi Karl 固结理论反映竣工后的固结规律, 而式(24)反映施工期的固结规律。

5 实例分析与讨论

下面分析参数 a_1 、 b 的影响, 参数 a_2 的影响可类似进行分析, 并以 643 号粘土为例, 进行讨论。饱和粘土非线性渗流活动边界运动规律、粘土层压力分布、粘土层平均固结度随时间的变化, 分别如图 6 至图 8 所示。可知, 非线性渗流影响了饱和粘土层超孔隙水压力的分布, 并使饱和粘土径向固结活动边界运动速度和平均固结度减小。

6 结 论

1) 以多孔介质等效渗流概念得出成都粘土平均孔隙微尺度数量级范围在 $0.01 \mu\text{m}$ 至 $0.1 \mu\text{m}$, 与试验测试结果一致。

2) 饱和粘土微尺度孔隙渗流表现出非线性渗流规律, 固液界面作用与渗透率平方根或孔隙半径成反比。固液界面相互作用是导致粘土非线性渗流的重要原因。

3) 提出了描述饱和粘土非线性渗流基本规律的数学模型, 其参数量纲明确, 物理意义清楚。统一描述了从较低到较高水力梯度全过程渗流曲线特征; 达西定律是其特例。

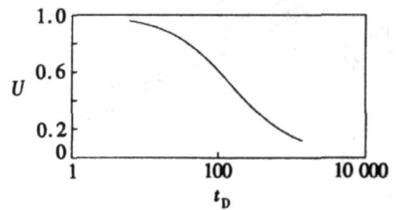
4) 基于粘土非线性渗流新规律, 建立了饱和粘土非线性渗流定流量径向固结数学模型。导出了饱和粘土非线性渗流平均质量守恒方程及活动边界运动方程, 饱和粘土非线性渗流使活动边界运动速度减小。

5) 给出了饱和粘土非线性渗流超孔隙水压力分布公式与平均固结度计算公式, 获得了粘土层孔隙水压力分布规律和平均固结度随时间变化规律。研究结果为粘土地质工程与岩土工程应用提供了新的科学依据。

致谢 在研究过程中, 得到了中科院院士郭尚平研究员、贾疏源教授、马宝岐教授等专家的关注与帮助, 在此谨致衷心谢意。

[参 考 文 献]

- [1] 贝尔 J. 多孔介质流体动力学[M]. 李竟生, 陈崇希译. 北京: 中国建筑业出版社, 1983, 9-11.
- [2] 郭尚平, 刘慈群, 阎庆来, 等. 渗流力学的近况和展望[J]. 力学与实践, 1981, 13(3): 11-16.
- [3] 刘慈群, 郭尚平. 多重介质渗流研究进展[J]. 力学进展, 1982, 12(4), 360-364.
- [4] 郭尚平, 刘慈群, 阎庆来, 等. 渗流力学的新发展[J]. 力学进展, 1986, 16(4): 441-454.
- [5] 郭尚平, 张盛宗, 桓冠仁, 等. 渗流研究和应用的一些动态[A]. 见: 渗流所主编. 渗流力学进展[C]. 北京: 石油工业出版社, 1996: 1-12.
- [6] 刘慈群. 双重介质非线性渗流[J]. 科学通报, 1981, 17(1): 1081-1085



643号饱和粘土

图8 粘土层平均固结度随时间的变化

- [7] 邓英尔, 刘慈群, 黄润秋, 等. 高等渗流理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2004, 1-15.
- [8] DENG Ying-er, LIU Ci-qun. Numerical simulation of unsteady flow through porous media with moving boundary[A]. In: ZHANG Feng-gan, Ed. Proceedings of the Third International Conference on Fluid Mechanics [C]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1998: 759-765
- [9] 薛定谔 A E. 多孔介质中的渗流物理[M]. 王鸿勋, 张朝琛, 孙书琛译. 北京: 石油工业出版社, 1982.
- [10] Elnaggar H A, Krizek R J, Karadi G M. Effect of non-darcian flow on time rate of consolidation[J]. J Franklin Inst, 1973, **296**(5): 323-337.
- [11] Schmidt J D, Westmann R A. Consolidation of porous media with non-darcy flow[J]. J Engng Mech Div Proc Am Soc Civ Eng, 1973, **99**(3): 1201-1215.
- [12] Pascal F, Pascal H, Murray D W. Consolidation with threshold gradients[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1981, **5**(1): 247-261.
- [13] 刘慈群. 有起始比降固结问题的近似解[J]. 岩土工程学报, 1982, **4**(3): 107-109.
- [14] 庄礼贤, 尹协远, 马晖扬. 流体力学[M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 1997, 366-378.
- [15] 杜延龄, 许国安. 渗流分析的有限元法和电网络法[M]. 北京: 水利电力出版社, 1991, 14-16.
- [16] 阎庆来. 单相均质液体低速渗流机理及流动规律[A]. 见: 中国力学学会主编. 第二届全国流体力学会议论文集[C]. 北京: 科学出版社, 1983, 325-326.
- [17] 邓英尔, 阎庆来, 马宝歧, 等. 界面分子力作用与渗透率的关系及其对渗流的影响[J]. 石油勘探与开发, 1998, **25**(2): 46-49.
- [18] 谢和平. 分形-岩石力学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2005, 1-12.

Law of Nonlinear Flow in Saturated Clays and Radial Consolidation

DENG Ying-er^{1,2}, XIE He-ping², HUANG Run-qiu¹, LIU Ci-qun³

(1. State Key Laboratory of Geohazard Prevention and Geoenvironment Protection,

Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, P. R. China;

2. Institute of Engineering Science and Hazard Mechanics, Sichuan University,

Chengdu 610064, P. R. China;

3. Institute of Porous Flow and Fluid Mechanics, Chinese Academy of Sciences,

Langfang, Hebei 065000, P. R. China)

Abstract: It was derived that micro-scale amount level of average pore radius of clay changed from 0.01 to 0.1 micron by an equivalent concept of flow in porous media. There is good agreement between the derived results and test ones. Results of experiments show that flow in micro-scale pore of saturated clays follows law of nonlinear flow. Theoretical analyses demonstrate that an interaction of solid-liquid interfaces varies inversely with the square root of permeability or porous radius. The interaction is an important reason why nonlinear flow in saturated clays occurs. An exact mathematical model was presented for nonlinear flow in micro-scale pore of saturated clays. Dimension and physical meanings of parameters of it are definite. A new law of nonlinear flow in saturated clays was established. It can describe characteristics of flow curve of the whole process of the nonlinear flow from

low hydraulic gradient to high one. Darcy law is a special case of the new law. A mathematical model was presented for consolidation of nonlinear flow in radius direction in saturated clays with constant rate based on the new law of nonlinear flow. Equations of average mass conservation and moving boundary, and formula of excess pore pressure distribution and average degree of consolidation for nonlinear flow in saturated clay were derived by using an idea of viscous boundary layer, a method of steady state instead of transient state and a method of integral of an equation. Laws of excess pore pressure distribution and changes of average degree of consolidation with time were obtained. Results show that velocity of moving boundary decreases because of the nonlinear flow in saturated clay. The results can provide geology engineering and geotechnical engineering of saturated clay with new scientific bases. Calculations of average degree of consolidation of Darcy flow are a special case of that of the nonlinear flow.

Key words: saturated clay; nonlinear flow law; consolidation; average degree of consolidation; moving boundary