

层状横观各向同性饱和地基上 圆板的非轴对称振动*

王小岗

(台州学院 建筑工程系, 浙江 台州 318000)

(我刊原编委黄义推荐)

摘要: 研究了层状横观各向同性饱和地基上弹性圆板的非轴对称振动问题. 首先, 通过方位角的 Fourier 变换, 将圆柱坐标系下横观各向同性饱和土的三维动力方程转化为一阶常微分方程组, 基于径向 Hankel 变换, 建立问题的状态方程, 求解状态方程后得到传递矩阵; 其次, 利用传递矩阵, 结合层状饱和地基的边界条件、排水条件及层间接触和连续条件, 给出了任意简谐激励力作用下层状横观各向同性饱和地基动力响应的通解; 然后, 按混合边值问题建立层状饱和地基上弹性圆板非轴对称振动的对偶积分方程, 并将对偶积分方程化为易于数值计算的第二类 Fredholm 积分方程, 并给出了算例.

关键词: 横观各向同性; 饱和层状地基; Biot 动力方程; 弹性圆板; Fredholm 积分方程

中图分类号: TU411. 8 **文献标识码:** A

引 言

层状饱和地基上板的振动是一个复杂的动力接触问题, 在地震学、地震工程学、土力学和地球物理等学科有着广泛的应用. 自 Biot 提出各向同性饱和多孔介质的动力方程^[1-3]后, 诸多学者基于 Biot 理论, 分别采用有限单元法(Zienkiewicz^[4]), 频域或 Laplace 域边界单元法(Chang 等^[5], Chen^[6]), 以及基于 Fourier 展开和 Hankel 变换的解析法(Philippacopoulos^[7-8], 黄义等^[9], 张引科等^[10])研究了饱和多孔介质的动力响应问题. 针对饱和地基与板的动力相互作用研究, 因饱和土介质力学模型的复杂性, 数学处理上相当困难, 目前主要成果大都局限于各向同性饱和地基(金波^[11], 陈龙珠等^[12], 陈胜利等^[13-14]), 很少涉及层状各向异性饱和介质.

考虑到天然饱和土体由于土颗粒在沉积过程中排列的取向性, 造成土体水平方向和竖直方向性质(变形模量、Poisson 比和剪切模量等)存在差异, 同一层内土体的应力应变关系多表现为各向异性, 因此, 采用层状横观各向同性饱和地基模型分析层状地基上板的动力问题, 是比较切合实际的. 近年来, 本文作者针对横观各向同性饱和地基的三维振动问题进行了一系列研究^[15-17], 取得了一定的成果, 但未涉及层状横观各向同性饱和地基与板的动力相互作用问题. 针对该问题的研究成果至今还未看到相关文献报道.

* 收稿日期: 2006-04-16; 修订日期: 2007-08-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50678108); 浙江省自然科学基金资助项目(Y106264)

作者简介: 王小岗(1967—), 男, 陕西人, 教授, 博士(Tel/Fax: + 86-576-88661960; E-mail: Wangxg824@tzc.edu.cn).

本文在作者以往工作的基础上,研究了层状横观各向同性饱和地基上弹性圆板的非轴对称振动问题. 首先基于横观各向同性饱和土的动力方程,通过方位角的 Fourier 变换,将圆柱坐标系下饱和土的 Biot 非轴对称波动方程转化为一阶常微分方程组;然后根据径向 Hankel 变换,并引入组合状态向量,建立问题的状态方程,求解状态方程后得到传递矩阵;其次,利用传递矩阵,结合饱和和层状地基的边界条件、排水条件及层间接触和连续条件,得到了任意激振力作用下,层状横观各向同性饱和地基的动力响应的频域通解;最后,按混合边值问题建立了层状饱和地基上弹性圆板非轴对称振动的对偶积分方程,并将对偶积分方程化为易于数值计算的第二类 Fredholm 积分方程. 文末算例给出了饱和地基表面及弹性圆板竖直和径向位移响应的数值解.

1 单层横观各向同性饱和土层动力方程及传递矩阵

设多层横观各向同性饱和地基由 N 层无限水平、层状、横观各向同性饱和土构成. 地表作用有任意分布的简谐力,如图 1 所示. 在柱坐标系下,取 z 轴平行于各层介质材料对称轴方向,且沿地基深度方向, $r-\theta$ 平面平行于介质的各向同性平面. 当以土骨架的平均位移 u 和孔隙流体相对于固体骨架运动的平均位移 w 为基本未知量时,多层横观各向同性饱和地基中第 i 层内两相介质中的土体运动方程为(为简化符号,略去各变量的角标 i)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \ddot{u}_r + \rho \dot{w}_r, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = \rho \dot{u}_\theta + \rho \dot{w}_\theta, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho \dot{u}_z + \rho \dot{w}_z, \tag{1c}$$

流体运动方程

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \dot{u}_r + m \dot{w}_r + \eta r_{11} \dot{w}_r, \tag{2a}$$

$$-\frac{\partial p}{r \partial \theta} = \rho \dot{u}_\theta + m \dot{w}_\theta + \eta r_{12} \dot{w}_\theta, \tag{2b}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \dot{u}_z + m \dot{w}_z + \eta r_{31} \dot{w}_z, \tag{2c}$$

方程(1)和方程(2)中, σ_j 是饱和多孔介质的总应力张量, p 是孔隙水压力; u_i 和 w_i 分别为 u 和 w 沿 r 、 θ 和 z 方向的位移分量; ρ 是饱和多孔介质密度, $\rho_0 = (1 - \phi) \rho_s + \phi \rho_f$, ρ_f 孔隙流体密度, ρ_s 是骨架固体材料密度, ϕ 是多孔介质的孔隙率; m_j 和 r_{j1} ($j = 1, 3$) 是反映 Biot 问题引入的量,可表示为 $m_j = \text{Re}[\alpha_j(\omega)] \rho_f / \phi$, $r_{j1} = \eta / (\text{Re}[K_j(\omega)])$; η 是孔隙流体动力粘滞系数, $\alpha_j(\omega)$ ($j = 1, 3$) 是水平和垂直动态孔隙弯曲度 $K_j(\omega)$, 是相应的动态渗透率, 它们之间存在关系: $\alpha_j(\omega) = i \eta \phi / (\text{Re}[K_j(\omega)] \rho_f)$. 考虑有效应力原理后,横观各向同性饱和土的应力-应变关系表示为

$$\sigma_r = 2B_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right) e + \left(B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{B_6}{B_8} p, \tag{3a}$$

$$\sigma_\theta = 2B_1 \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial w_\theta}{r \partial \theta} \right) + \left(B_2 - \frac{B_6^2}{B_8} \right) e + \left(B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{B_6}{B_8} p, \tag{3b}$$

$$\sigma_z = \left(B_3 - \frac{B_6 B_7}{B_8} \right) e + \left(B_4 - \frac{B_7^2}{B_8} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{B_7}{B_8} p, \tag{3c}$$

$$\tau_{\theta z} = B_5 \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \right), \quad \tau_{rz} = B_5 \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (3d, e)$$

$$\tau_{\theta} = B_1 \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} - \frac{u_{\theta}}{r} \right) \quad (3f)$$

及

$$p = B_6 e + B_7 \frac{\partial u_z}{\partial z} + B_8 E,$$

式中

$$E = -\operatorname{div} \mathbf{w}, \quad e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_{\theta}}{r},$$

$B_j (j = 1, 2, \dots, 8)$ 为弹性常数, 可用横观各向同性介质弹性常数 c_{ij} 、骨架固体体积模量 K_s 、孔隙流体体积模量 K_1 和孔隙率 ϕ 表示^[18]. 考虑简谐激励 $f e^{i\omega t}$ 下的稳态响应, 由式(2)可以得出

$$w_r = \beta_1 \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \rho_1 \omega^2 u_r \right), \quad w_{\theta} = \beta_1 \left(\frac{\partial p}{r \partial \theta} - \rho_1 \omega^2 u_{\theta} \right), \quad w_z = \beta_3 \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_1 \omega^2 u_z \right), \quad (5)$$

式中, p 是孔隙水压力幅值, $\beta_j = 1/(m_j \omega^2 - i\omega \tau_j)$ ($j = 1, 3$), ω 是简谐激励的圆频率; i 是虚数单位.

不失一般性, 设地表作用的非轴对称激励函数的幅值可以表示为

$$\begin{cases} F_r(r, \theta, z, \omega) \\ F_{\theta}(r, \theta, z, \omega) \\ F_z(r, \theta, z, \omega) \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} F_{rn}(r, z, \omega) \cos n\theta \\ F_{\theta n}(r, z, \omega) \sin n\theta \\ F_{zn}(r, z, \omega) \cos n\theta \end{cases}. \quad (6)$$

位移、应力和水压力的一般解表示为

$$\begin{cases} u_r(r, \theta, z, \omega) \\ u_z(r, \theta, z, \omega) \\ p(r, \theta, z, \omega) \\ \alpha_z(r, \theta, z, \omega) \\ \sigma_r(r, \theta, z, \omega) \\ \sigma_{\theta}(r, \theta, z, \omega) \\ \tau_{rz}(r, \theta, z, \omega) \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} u_{rn}(r, z, \omega) \\ u_{zn}(r, z, \omega) \\ p_n(r, z, \omega) \\ \alpha_{zn}(r, z, \omega) \\ \sigma_{rn}(r, z, \omega) \\ \sigma_{\theta n}(r, z, \omega) \\ \tau_{zn}(r, z, \omega) \end{cases} \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{cases} \quad (7)$$

及

$$\begin{cases} u_{\theta}(r, \theta, z, \omega) \\ \tau_{\theta}(r, \theta, z, \omega) \\ \tau_{r\theta}(r, \theta, z, \omega) \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} u_{\theta n}(r, z, \omega) \\ \tau_{\theta n}(r, z, \omega) \\ \tau_{r\theta n}(r, z, \omega) \end{cases} \sin n\theta. \quad (8)$$

将式(7)、式(8)分别代入式(1)、式(3)和式(4)进行简化, 令

$$U_n = u_{rn} + u_{\theta n}, \quad V_n = u_{rn} - u_{\theta n}, \quad (9)$$

$$T_{1n} = \tau_{zn} + \tau_{\theta n}, \quad T_{2n} = \tau_{zn} - \tau_{\theta n}. \quad (10)$$

整理后得到

$$\frac{\partial U_n}{\partial z} = \frac{1}{B_5} \left[T_{1n} - \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r} \right) u_{zn} \right], \quad (11)$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial z} = \frac{1}{B_5} \left[T_{2n} - \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n}{r} \right) u_{zn} \right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_{zn}}{\partial z} = \frac{1}{b_4} \left[\alpha_{zn} - f_3 e_n - \frac{B_7}{B_8} p_n \right], \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{1n}}{\partial z} = & -\frac{f_3}{b_4} \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r} \right] \alpha_{zn} - \left[b_6 - \frac{f_3 B_7}{b_4 B_8} \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r} \right] p_n - \\ & \left[b_2 - \frac{f_3^2}{b_4} \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r} \right] e_n - [B_1 \cdot \cdot^2_{(n+1)} + \rho_1^* \omega^2] U_n, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{2n}}{\partial z} = & -\frac{f_3}{b_4} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n}{r} \right] \alpha_{zn} - \left[b_6 - \frac{f_3 B_7}{b_4 B_8} \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n}{r} \right] p_n - \\ & \left[b_2 - \frac{f_3^2}{b_4} \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n}{r} \right] e_n - [B_1 \cdot \cdot^2_{(n-1)} + \rho_1^* \omega^2] V_n, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 p_n}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta_3} \frac{b_7}{b_4} \alpha_{zn} - \frac{1}{\beta_3} \left[\beta_1 \cdot \cdot^2_{(n)} + \frac{1}{B_8} + \frac{b_7 B_7}{b_4 B_8} \right] p_n + \frac{1}{\beta_3} \left[b_6 - \frac{f_3 b_7}{b_4} \right] e_n, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{zn}}{\partial z} = & -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n+1}{r} \right] T_{1n} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n-1}{r} \right] T_{2n} - \\ & \rho_3^* \omega^2 u_{zn} - \rho_1 \omega^2 \beta_3 \frac{\partial p_n}{\partial z}, \end{aligned} \quad (17)$$

式(14)至式(17)中

$$b_2 = B_1 + B_2 - \frac{B_6^2}{B_8}, \quad b_3 = B_3 + B_5 - \frac{B_6 B_7}{B_8}, \quad f_3 = b_3 - B_5, \quad b_4 = B_4 - \frac{B_7^2}{B_8},$$

$$b_6 = \frac{B_6}{B_8} + \omega^2 \rho_1 \beta_1, \quad b_7 = \frac{B_7}{B_8} + \omega^2 \rho_1 \beta_3, \quad \cdot \cdot^2_{(n)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} - \frac{n^2}{r^2}.$$

引入 n 阶 Hankel 变换和逆变换

$$f(k, z; \omega) = \int_0^\infty f(r, z; \omega) r J_n(kr) dr, \quad (18)$$

$$f(r, z; \omega) = \int_0^\infty f(k, z; \omega) k J_n(kr) dk. \quad (19)$$

分别对式(11)、式(12)和式(13)施加 $n+1$ 阶、 $n-1$ 阶和 n 阶 Hankel 变换; 对式(14)和式(15)施加 $n+1$ 阶和 $n-1$ 阶 Hankel 变换; 对式(16)和式(17)施加 n 阶 Hankel 变换, 同时定义

U_n, T_{1n} —— U_n, T_{1n} 的 $n+1$ 阶 Hankel 变换;

V_n, T_{2n} —— V_n, T_{2n} 的 $n-1$ 阶 Hankel 变换;

α_{zn}, p_n, u_{zn} —— α_{zn}, p_n, u_{zn} 的 n 阶 Hankel 变换.

整理后, 得到以下状态方程

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{Y}, \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = & [U_n \quad V_n \quad \alpha_{zn} \quad p_n \quad u_{zn} \quad T_{1n} \quad T_{2n} \quad t_n]^T, \quad t_n = \frac{\partial p_n}{\partial z}, \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} k & 1/B_5 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 1/B_5 & 0 \\ -\rho_3^* \omega^2 & -k/2 & k/2 & -\rho_1 \omega^2 \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{f_3 k}{2b_4} & \frac{f_3 k}{2b_4} & \frac{1}{b_4} & -\frac{1}{b_4} \frac{B_7}{B_8} \\ B_5 \lambda_0^2 + \frac{k}{2} M & -\frac{k}{2} M & \frac{f_3}{b_4} & N \\ -\frac{k}{2} M & B_5 \lambda_0^2 + \frac{k}{2} M & -\frac{f_3}{b_4} & -N \\ \frac{k}{2} Q & -\frac{k}{2} Q & -\frac{b_7}{\beta_3 b_4} & -P \end{bmatrix},$$

其中

$$\lambda_0^2 = \frac{B_1 k^2 - \omega^2 \rho_1^*}{B_5}, \quad M = b_2 - \frac{f_3^2}{b_4^2}, \quad N = b_6 - \frac{f_3}{b_4} \frac{B_7}{B_8},$$

$$P = \frac{1}{\beta_3} \left[b_8 + \frac{b_7}{b_4} \frac{B_7}{B_8} \right], \quad Q = \frac{1}{\beta_3} \left[b_6 - \frac{f_3 b_7}{b_4} \right], \quad b_8 = \frac{1}{B_8} - k^2 \beta_1.$$

求解方程组(20), 可以推出第 i 层内任意深度 z 的状态向量与该层表面上状态向量的关系式, 即

$$\dot{Y}^i(k, z; \omega) = \exp[za^i(k; \omega)] Y^i(k, 0; \omega) \tag{21}$$

或
$$Y^i(k, z; \omega) = T^i(k, z; \omega) Y^i(k, 0; \omega), \tag{22}$$

上式中, $T^i(k, z; \omega) = \exp[za^i(k; \omega)]$ 即为第 i 层介质的传递矩阵.

2 多层横观各向同性饱和地基动力响应的通解

图1所示 N 层横观各向同性饱和地基. 设各层厚度为 $h_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 设地基表面作用有任意分布的激振力 $F_r \exp(i\Omega t)$, $F_\theta \exp(i\Omega t)$, 和 $F_z \exp(i\Omega t)$, 地基底面不动, 且层间完全接触和连续. 在各层建立局部柱坐标系 (r, θ, z) . 按式(5)~式(7)对应力、位移、孔隙水压力等变量做相应 Fourier 展开, 并结合式(9)和式(10), 然后施加相应阶的 Hankel 变换后, 得到

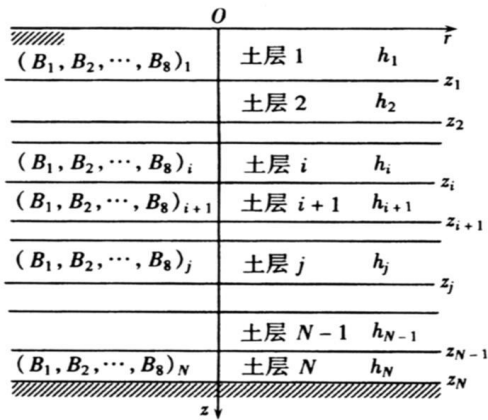


图1 成层横观各向同性饱和地基的力学模型

地基表面 $z = 0$ 处边界条件

$$\sigma_{zn}^1(k, 0; \omega) = F_{zn}(k, 0; \omega),$$

$$T_{1n}^1(k, 0; \omega) = F_{rn}(k, 0; \omega) + F_{\theta n}(k, 0; \omega),$$

$$T_{2n}^1(k, 0; \omega) = F_{zn}(k, 0; \omega) - F_{\theta n}(k, 0; \omega).$$

地表排水

$$p_n^1(k, 0; \omega) = 0; \tag{23a}$$

地表不排水

$$t_n^1(k, 0; \omega) = 0. \tag{23b}$$

层间完全接触, 满足以下连续条件

$$Y^i(k, h_i; \omega) = Y^{i+1}(k, 0; \omega). \tag{24}$$

地基底面 $z = h_N$ 处边界条件

$$U_n^N(k, h_N; \omega) = V_n^N(k, h_N; \omega) = u_{zn}^N(k, h_N; \omega) = 0.$$

底面排水

$$p_n^N(k, h_N; \omega) = 0; \quad (25a)$$

底面不排水

$$t_n^N(k, h_N; \omega) = 0. \quad (25b)$$

利用式(22)和式(24)逐层递推,可以得出第*i*层内任意深度*z*处的状态向量与地表状态向量之间的关系,即

$$Y^i(k, z; \omega) = G^i(k, z; \omega) Y^1(k, 0; \omega), \quad (26)$$

$$\text{式中 } G^i(k, z; \omega) = \prod_{i=1}^N T^i(k, h_i; \omega).$$

为计算地表状态向量 $Y^1(k, 0; \omega)$, 只需在式(26)中取 $i = N$, 再结合式(23)至式(25), 同时考虑地基表面和底面排水情况后, 得到

(i) 双面排水

$$\begin{Bmatrix} U_n^1(k, 0; \omega) \\ V_n^1(k, 0; \omega) \\ u_{zn}^1(k, 0; \omega) \\ t_n^1(k, 0; \omega) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{15} & G_{18} \\ G_{21} & G_{22} & G_{25} & G_{28} \\ G_{41} & G_{42} & G_{45} & G_{48} \\ G_{51} & G_{52} & G_{55} & G_{58} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_{13} & G_{14} & G_{16} & G_{17} \\ G_{23} & G_{24} & G_{26} & G_{27} \\ G_{43} & G_{44} & G_{46} & G_{47} \\ G_{53} & G_{54} & G_{56} & G_{57} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{zn}(k, 0; \omega) \\ p_n(k, 0; \omega) \\ T_{1n}(k, 0; \omega) \\ T_{2n}(k, 0; \omega) \end{Bmatrix}. \quad (27)$$

(ii) 双面不排水

$$\begin{Bmatrix} U_n^1(k, 0; \omega) \\ V_n^1(k, 0; \omega) \\ u_{zn}^1(k, 0; \omega) \\ p_n^1(k, 0; \omega) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{15} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{25} & G_{24} \\ G_{51} & G_{52} & G_{55} & G_{54} \\ G_{81} & G_{82} & G_{85} & G_{84} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_{13} & G_{16} & G_{17} & G_{18} \\ G_{23} & G_{26} & G_{27} & G_{28} \\ G_{53} & G_{56} & G_{57} & G_{58} \\ G_{83} & G_{86} & G_{87} & G_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{zn}(k, 0; \omega) \\ T_{1n}(k, 0; \omega) \\ T_{2n}(k, 0; \omega) \\ t_n(k, 0; \omega) \end{Bmatrix}. \quad (28)$$

(iii) 单面排水(底面不排水)

$$\begin{Bmatrix} U_n^1(k, 0; \omega) \\ V_n^1(k, 0; \omega) \\ u_{zn}^1(k, 0; \omega) \\ t_n^1(k, 0; \omega) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{15} & G_{18} \\ G_{21} & G_{22} & G_{25} & G_{28} \\ G_{51} & G_{52} & G_{55} & G_{58} \\ G_{81} & G_{82} & G_{85} & G_{88} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_{13} & G_{14} & G_{16} & G_{17} \\ G_{23} & G_{24} & G_{26} & G_{27} \\ G_{53} & G_{54} & G_{56} & G_{57} \\ G_{83} & G_{84} & G_{86} & G_{87} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{zn}(k, 0; \omega) \\ p_n(k, 0; \omega) \\ T_{1n}(k, 0; \omega) \\ T_{2n}(k, 0; \omega) \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

(iv) 单面排水(表面不排水)

$$\begin{Bmatrix} U_n^1(k, 0; \omega) \\ V_n^1(k, 0; \omega) \\ u_{zn}^1(k, 0; \omega) \\ p_n^1(k, 0; \omega) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{15} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{25} & G_{24} \\ G_{41} & G_{42} & G_{45} & G_{44} \\ G_{51} & G_{52} & G_{55} & G_{54} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_{13} & G_{16} & G_{17} & G_{18} \\ G_{23} & G_{26} & G_{27} & G_{28} \\ G_{43} & G_{46} & G_{47} & G_{48} \\ G_{53} & G_{56} & G_{57} & G_{58} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{zn}(k, 0; \omega) \\ T_{1n}(k, 0; \omega) \\ T_{2n}(k, 0; \omega) \\ t_n(k, 0; \omega) \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

式中, G_{mn} 为 8×8 阶矩阵 $G^N(k, z; \omega)$ 的对应元素. 利用式(27)至式(30)算出地表状态向量 $Y^1(k, 0; \omega)$ 后, 由式(26)即可算出第*i*层内任意深度*z*处的状态向量 $Y^i(k, z; \omega)$ 的通解. 进一步, 利用式(19)和式(9)、式(10), 得

$$u_{rn}^i(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty U_n^i(k, z; \omega) k J_{n+1}(kr) dk +$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} V_n^i(k, z; \omega) k J_{n-1}(kr) dk, \quad (31a)$$

$$u_{0n}^i(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} U_n^i(k, z; \omega) k J_{n+1}(kr) dk -$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} V_n^i(k, z; \omega) k J_{n-1}(kr) dk, \quad (31b)$$

$$u_{zn}^i(r, z; \omega) = \int_0^{\infty} u_{zn}^i(k, z; \omega) k J_n(kr) dk, \quad (31c)$$

$$p_n^i(r, z; \omega) = \int_0^{\infty} p_n^i(k, z; \omega) k J_n(kr) dk, \quad (31d)$$

$$\sigma_{zn}^i(r, z; \omega) = \int_0^{\infty} \sigma_{zn}^i(k, z; \omega) k J_n(kr) dk, \quad (31e)$$

$$\tau_{zn}^i(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} T_{1n}^i(k, z; \omega) k J_{n+1}(kr) dk +$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} T_{2n}^i(k, z; \omega) k J_{n-1}(kr) dk, \quad (31f)$$

$$\tau_{zn}^i(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} T_{1n}^i(k, z; \omega) k J_{n+1}(kr) dk -$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} T_{2n}^i(k, z; \omega) k J_{n-1}(kr) dk. \quad (31g)$$

如果需要计算问题的时域响应,可按下述积分求出

$$f(r, \theta, z; t) = \int_0^{\infty} f(r, \theta, z; \omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (32)$$

3 混合边值问题

半径为 a 的弹性圆板支承在层状横观各向同性饱和地基的表面,假设圆板与地基之间为光滑接触.圆板的 Poisson 比为 ν ,板密度为 ρ ,挠曲刚度为 D .设板受任意非轴对称简谐激励 $q(r, \theta) \exp(i\omega t)$ 作用,地基作用于圆板的竖向反力为 $F_z(r, \theta) \exp(i\omega t)$, ω 为激励的圆频率.板的动力方程表示为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w(r, \theta) - \rho h \omega^2 w(r, \theta) = q(r, \theta) - F_z(r, \theta), \quad (33)$$

式中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

将圆板的挠度、激励和地基反力的幅值沿 θ 方向作如下 Fourier 展开

$$\left\{ \begin{array}{l} w(r, \theta, \omega) \\ q(r, \theta, \omega) \\ F_z(r, \theta, \omega) \end{array} \right\} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \begin{array}{l} w_n(r, \omega) \cos n\theta \\ q_n(r, \omega) \cos n\theta \\ F_{zn}(r, \omega) \cos n\theta \end{array} \right\}. \quad (34)$$

将式(34)代入式(33),令 $\beta^4 = \rho h \omega^2 / D$,得到

$$\nabla^2 \nabla^2 w_n(r) - \beta^4 w_n(r) = [q_n(r) - F_{zn}(r)] / D, \quad (35)$$

这样,层状饱和地基表面的边值条件可在 Hankel 变换域内表示为

$$\begin{aligned} \sigma_{zn}^1(k, 0; \omega) &= -F_{zn}(k, 0; \omega) & (0 \leq r \leq a), \\ T_{1n}^1(k, 0; \omega) &= T_{2n}(k, 0; \omega) & (0 < r < \infty). \end{aligned}$$

表面排水

$$p_n^1(k, 0; \omega) = 0 \quad (0 \leq r < \infty); \quad (36a)$$

表面不排水

$$t_n^1(k, 0; \omega) = 0 \quad (0 \leq r < \infty); \tag{36b}$$

以及位移连续条件:

$$u_{zn}^1 = \Delta_n - w_n(r) \quad (0 \leq r \leq a), \tag{36c}$$

式中, Δ_n 为圆板中心位移的 Fourier 展开项, $w_n(r)$ 为圆板相对于板中心挠度的 Fourier 展开项, $q_n(k)$ 和 $F_{zn}(k)$ 分别为 $q_n(r)$ 和 $F_{zn}(r)$ 的 n 阶 Hankel 变换.

引入以下变换

$$w_n(r) = \frac{1}{D} \int_0^\infty k [q_n(k) - F_{zn}(k)] w(r, k) dk. \tag{37}$$

将式(37)代入式(35), 则 $w(r, k)$ 应满足以下方程:

$$\dots_{(n)}^2 \dots_{(n)}^2 w(k, r) - \beta^4 w(k, r) = J_n(kr), \tag{38}$$

解出 $w(k, r)$, 得到

$$w(k, r) = A_1 J_n(kr) + A_2 I_n(kr) + A_3 N_n(kr) + A_4 K_n(kr) + \frac{J_n(kr)}{k^4 - \beta^4}, \tag{39}$$

式中 $J_n(kr)$ 、 $I_n(kr)$ 、 $K_n(kr)$ 和 $N_n(kr)$ 分别为 n 阶第一类和第二类 Bessel 函数, 系数 A_1, A_2, A_3, A_4 应由以下板的边界条件确定

$$r = 0: w_n \text{ 及 } \frac{dw_n}{dr} \text{ 有限}, \tag{40a, b}$$

$$r = a: \frac{d^2 w_n}{dr^2} + \sqrt{\left[\frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right]} = 0, \tag{40c}$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right] + \frac{(1-\nu)n^2}{r^2} \left[-\frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{w_n}{r} \right] = 0. \tag{40d}$$

将式(39)代入式(38), 再代入式(40), 进一步解出 $w(r, k)$, 得

$$w(k, r) = \Delta [a_{22} b_1(k) - a_{12} b_2(k)] J_n(kr) + \Delta [a_{11} b_2(k) - a_{21} b_1(k)] I_n(kr) + \frac{J_n(kr)}{k^4 - \beta^4}, \tag{41}$$

式中

$$\begin{aligned} a_{11} &= [-\beta^2 + (1-\nu)(n^2-n)/a^2] J_n(\beta a) + (1-\nu)\beta / (a J_{n+1}(\beta a)), \\ a_{12} &= [\beta^2 + (1-\nu)(n^2-n)/a^2] I_n(\beta a) - (1-\nu)\beta / (a I_{n+1}(\beta a)), \\ a_{21} &= [-n\beta^2/a - (1-\nu)(n^3-n^2)/a^3] J_n(\beta a) + [\beta^3 + (1-\nu)n^2\beta/a^2] J_{n+1}(\beta a), \\ a_{22} &= [n\beta^2/a - (1-\nu)(n^3-n^2)/a^3] I_n(\beta a) + [\beta^3 - (1-\nu)n^2\beta/a^2] I_{n+1}(\beta a), \\ b_1(k) &= \left\{ [-k^2 + (1-\nu)(n^2-n)/a^2] J_n(ka) + (1-\nu)k / (a J_{n+1}(ka)) \right\} / (k^4 - \beta^4), \\ \Delta &= (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22})^{-1}. \end{aligned}$$

将式(27) ~ 式(31)代入边界条件(36)中, 得出以下积分方程

$$\int_0^\infty G(k) F_{zn}(k) J_n(kr) k dk = \Delta_n - \frac{1}{D} \int_0^\infty k [q_n(k) - F_{zn}(k)] w(r, k) dk \quad (0 \leq r \leq a), \tag{42a}$$

$$\int_0^\infty k F_{zn}(k) J_n(kr) dk = 0 \quad (a < r \leq \infty), \tag{42b}$$

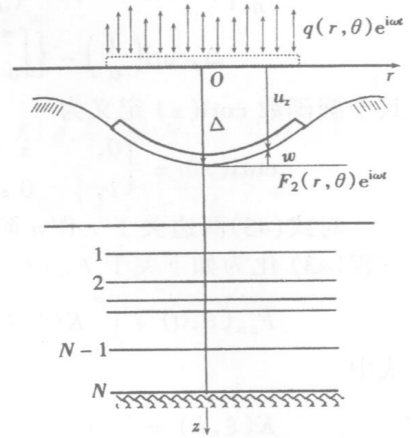


图 2 成层横观各向同性饱和地基上圆板振动的力学模型

式中 $G(k)$ 可根据地基表面和底面的排水条件, 由式(31)按相应公式算出. 将(42a)和(42b)两式合并, 得到

$$\int_0^{\infty} \left\{ [G(k) - 1] \operatorname{curl} \left[\frac{L}{a} \right] + 1 \right\} F_{zn}(k) J_n(kr) k dk = \Delta_n \operatorname{curl} \left[\frac{L}{a} \right] - \left\{ \int_0^{\infty} [q_n(k) - F_z(k)] w(r, k) dk \right\} \operatorname{curl} \left[\frac{L}{a} \right]. \quad (43)$$

其中圆函数 $\operatorname{curl}(x)$ 定义为

$$\operatorname{curl}(x) = \begin{cases} 0, & x > 1, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

对式(43)两边关于 r 作 n 阶 Hankel 变换, 对具体的激励荷载 $q_n(k, 0)$, 可将对称边界积分方程(43)化为如下关于 $F_{zn}(k, 0)$ 的第二类 Fredholm 积分方程

$$F_{zn}(\xi, 0) + \int_0^{\infty} K(\xi, k) F_{zn}(k, 0) k dk = H(\xi), \quad (44)$$

式中

$$K(\xi, k) = [G(k) - 1] \int_0^a r J_n(\xi r) J_n(kr) dr - \int_0^a r J_n(\xi r) w(k, r) dr,$$

$$H(\xi) = \Delta_n \int_0^a r J_n(\xi r) dr - \int_0^{\infty} q(k, 0) \left[\int_0^a r J_n(\xi r) w(k, r) dr \right] k dk.$$

由方程(44)解出 $F_{zn}(k, 0)$ 后, 就可方便地求出地基和圆板的各项响应.

特别, 对于轴对称问题, 取 $n = 0, \beta = 0, q =$ 常数, 式(44)中的 $K(\xi, k)$ 和 $H(\xi)$ 可以表示为

$$K(\xi, k) = \left\{ G(k) - 1 + \frac{1}{Dk^3} \right\} \int_0^a r J_0(\xi r) J_0(kr) dr + \left\{ \frac{1}{2Da(1+\nu)} \times \left[\frac{aJ_0(ka)}{k} + (1-\nu) \frac{J_1(ka)}{k^2} + \frac{(3+\nu)a^2}{8} J_1(ka) \right] \right\} \int_0^a r^3 J_0(\xi r) dr + \frac{1}{32Da} J_1(ka) \int_0^a r^5 J_0(\xi r) dr - \frac{1}{Dk^3} \int_0^a r J_0(\xi r) dr, \quad (45a)$$

$$H(\xi) = \Delta_0 \int_0^a r J_0(\xi r) dr. \quad (45b)$$

此时, 相对于板中心挠度幅值 $w(r, \theta)$ 可表示为

$$w(r) = \frac{r^4}{32Da} \int_0^{\infty} F_{z0} J_1(ka) dk - \frac{(3+\nu)ar^2}{16D(1+\nu)} \int_0^{\infty} F_{z0} J_1(ka) dk + \frac{r^2}{2D(1+\nu)} \int_0^{\infty} \frac{F_{z0}}{k} J_0(ka) dk + \frac{(1-\nu)r^2}{2D(1+\nu)a} \int_0^{\infty} \frac{F_{z0}}{k^2} J_1(ka) dk + \frac{1}{D} \int_0^{\infty} F_{z0} \left[\frac{1}{k^3} J_0(kr) - \frac{1}{k^3} \right] dk. \quad (46)$$

当板中心作用有竖向集中荷载 P , 式(44)中的 $K(\xi, k)$ 和 $H(\xi)$ 可以表示为

$$K(\xi, k) = \left[G(k) - 1 + \frac{a}{Dk^3} \right] \int_0^a r J_0(\xi r) J_0(kr) dr + \frac{1}{2D(1+\nu)} \times \left[\frac{aJ_0(ka)}{k} + \frac{(3+\nu)a^2}{8} J_1(ka) + (-1+\nu) \frac{J_1(ka)}{k^2 a^2} \right] \int_0^a r^3 J_0(\xi r) dr - \frac{a}{Dk^3} \int_0^a r J_0(\xi r) dr + \frac{a^2}{4D} J_1(ka) \int_0^a r^3 \ln \left[\frac{r}{a} \right] J_0(\xi r) dr, \quad (47a)$$

$$H(\xi) = \Delta_0 \int_0^a r J_0(\xi r) dr, \quad (47b)$$

此时, 相对于板中心挠度幅值 $w(r, \theta)$ 可表示为

$$w(r) = \frac{r^2 a^2 \ln(r/a)}{4D} \int_0^\infty F_{z0} J_1(ka) dr + \frac{(3+\nu)r^2 a^2}{8D(1+\nu)} \int_0^\infty F_{z0} J_1(ka) dr + \frac{r^2}{2D(1+\nu)} \int_0^\infty F_{z0} \left\{ \frac{a}{k} J_0(ka) + \frac{-1+\nu}{k^2} J_1(ka) \right\} dk + \frac{a}{D} \int_0^\infty F_{z0} \left\{ -\frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^3} J_0(kr) \right\} dk. \quad (48)$$

另外, 取 $n = 1, \beta = 0, q = (q_0 r/a) \cos \theta$ 时, 式(44) 中的 $K(\xi, k)$ 和 $H(\xi)$ 可以表示为

$$K(\xi, k) = \left\{ G(k) - 1 + \frac{1}{Dk^3} \right\} \int_0^a r J_1(\xi r) J_1(kr) dr + \frac{1}{2Da(3+\nu)} \left[\frac{J_1(ka)}{k} + (1-\nu) \frac{J_0(ka)}{ak^2} - 2(1-\nu) \frac{J_1(ka)}{a^2 k^3} + \frac{5+4\nu}{16} \int_0^a r J_1(kr) dr \right] \int_0^a r^4 J_1(\xi r) dr - \frac{1}{64Da^3} \left[\int_0^a r J_1(kr) \right] dr + \int_0^a r^6 J_1(\xi r) dr, \quad (49a)$$

$$H(\xi) = \Delta_1 \int_0^a r J_1(\xi r) dr. \quad (49b)$$

这时, 相对于板中心挠度幅值 $w(r, \theta)$ 可表示为

$$w(r, \theta) = \left\{ \left[\frac{r^5}{64Da^3} - \frac{(5+4\nu)r^3}{16Da(6+2\nu)} \right] \int_0^\infty k F_{z1} \left[\int_0^a r J_1(ka) dr \right] dk - \frac{r^3}{Da(6+2\nu)} \int_0^\infty \frac{F_{z1}}{k} J_1(ka) dk - \frac{(1-\nu)r^3}{Da^2(6+2\nu)} \int_0^\infty \frac{F_{z1}}{k^2} J_0(ka) dk - \frac{(1-\nu)r^3}{Da^2(3+\nu)} \int_0^\infty \frac{F_{z1}}{k^3} J_1(ka) dk - \frac{1}{D} \int_0^\infty \frac{F_{z1}}{k^3} J_1(ka) dk \right\} \cos \theta. \quad (50)$$

4 数值算例

作为本文解答的具体应用, 考虑 3 层横观各向同性饱和地基上圆板的简谐振动. 板的半径为 a , 厚度为 h , Poisson 比 $\nu = 0.167$, 弹性模量 $E = 30 \text{ GPa}$. 取板的 $\beta = 0$. 设板中心沿铅直方向作用有集中激振力, 激振圆频率为 ω . 多孔介质参数由表 1 给出, 各层的几何参数和物理参数如图 3 所示. 图 3 中参数 k_0, l_0, m_0 和 n_0 为引入的描述横观各向同性介质参数之间关系的量, 定义为 $K_3 = k_0 \times K_1, c_{33} = l_0 \times c_{11}, c_{13} = m_0 \times c_{12}, c_{44} = n_0 \times c_{66}$. 本文考虑地表排水而地基底面不排水情况.

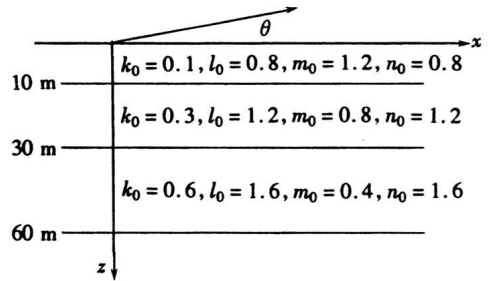
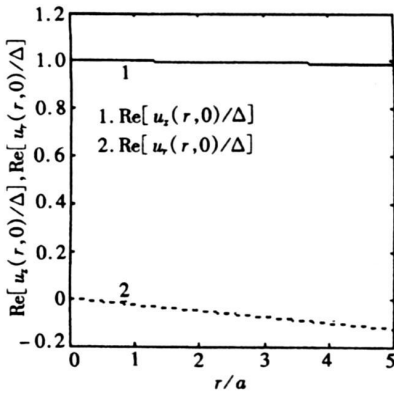


图 3 三层横观各向同性饱和地基模型

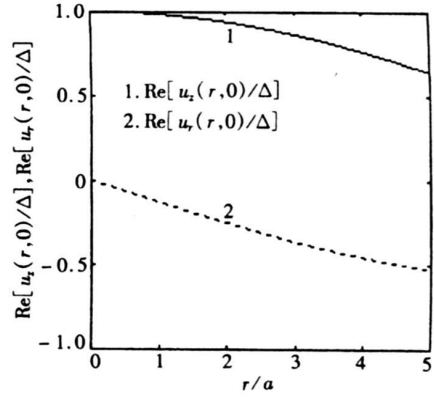
表 1 多孔介质参数

| c_{11}/Pa | c_{12}/Pa | c_{66}/Pa | K_1/Pa | K_1/Pa | $\rho_0/(\text{kg}/\text{m}^3)$ | $\rho_l/(\text{kg}/\text{m}^3)$ | $\eta/(\text{Pa} \cdot \text{s})$ | ϕ | m_1 | m_3 | $K_1/(\text{m}/\text{s})$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------|-----------------|---------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|--------|-------|-------|---------------------------|
| 10^7 | 2×10^6 | 4×10^6 | 3×10^7 | 3×10^6 | 2 600 | 1 000 | 10^{-3} | 0.2 | 8 | 8 | 10^{-7} |

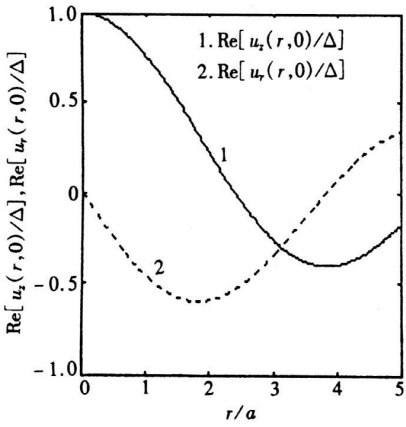
图 4 给出不同刚度的板上作用有相同频率(1 Hz) 的集中激振力时, 地基表面的竖向位移和径向位移的幅值随 r 的变化曲线, 其中曲线 1 代表 $\text{Re}[u_z(r, 0)/\Delta]$, 曲线 2 代表 $\text{Re}[u_r(r, 0)/\Delta]$. 图 4 给



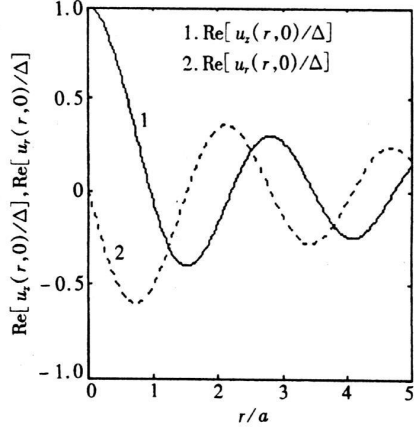
(a) $h/a = 2$



(b) $h/a = 1/5$

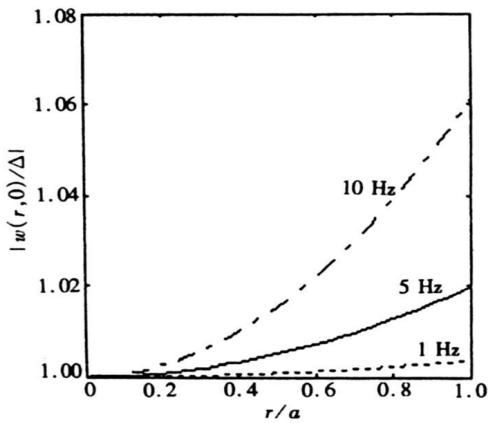


(c) $h/a = 1/20$



(d) $h/a = 1/50$

图4 $f = 1 \text{ Hz}$ 地表竖向和径向位移幅值随 r 的变化曲线



(a) $h/a = 2$

出了不同刚度和不同激振频率下, 板竖向位移幅值 $|w_z(r, 0)/\Delta|$ 随 r 的变化曲线.

由图3、图4可见, 当板 $h/a = 2$ 时, 地表和板的相对位移幅值关于 r 近似于1, 板上各点的相对位移幅值随频率的增大而稍有增大, 此时板可视为完全刚性板. 当 h/a 减小时, 地表和板的相对位移幅值随 r 逐渐减小, 当 h/a 减至很小时, 板对地基振动的影响程度减弱至0, 当 $h/a = 1/2000$ 时, 频率对板上各点位移的影响基本上可以忽略不计, 此时板可视为完全柔性. 对于一般的 h/a 值(弹性板), 地基表面上各点的位移响应随激振频率的增大而减小, 并随 r 的增大减幅振荡形式变化, 此时板上的最小相对位移幅值出现在板的边缘.

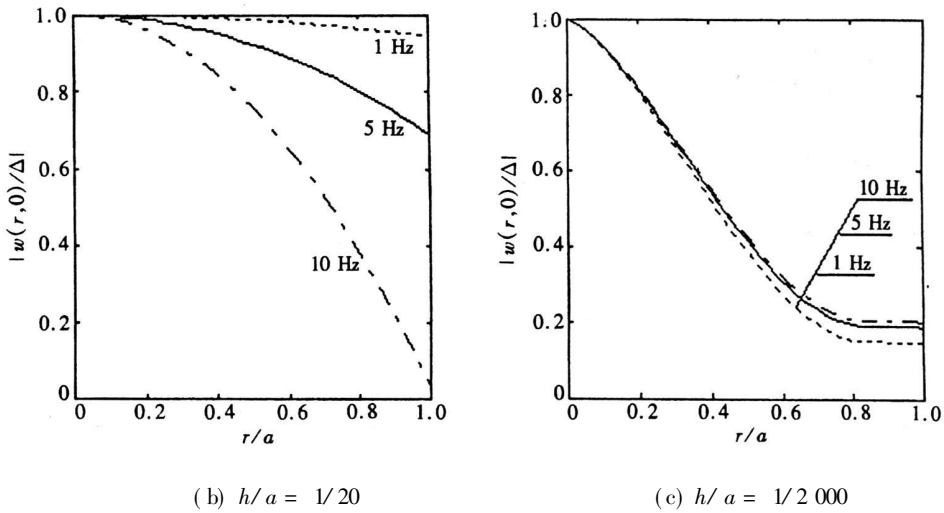


图5 板竖向位移幅值 $|w_z(r, 0)| / \Delta$ 随 r 的变化曲线

4 结 论

本文就横观各向同性饱和多层地基上圆板的非轴对称振动问题,给出了一般的解析表达式.由本文结果可以很方便地退化出多层各向同性饱和地基上圆板的非轴对称或轴对称振动问题的解答.本文对于集中荷载下圆板的轴对称振动的算例分析表明,当板的弯曲刚度很大时,弹性板的振动特性类似于刚性板;当弯曲刚度很小时,弹性板的振动特性逐渐变得与激振频率无关;对于一般刚度的弹性板,其表面各点的位移响应幅值随激振频率的增大而减小.

[参 考 文 献]

- [1] Biot M A. The theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1956, **28**(2): 168-191.
- [2] Biot M A. General theory of acoustic propagation in porous dissipative media[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1962, **34**(9): 1254-1264.
- [3] Biot M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. Journal of Applied Physics, 1962, **33**(4): 1482-1498.
- [4] Zienkiewicz O C, Shiomi T. Dynamic behavior of saturated porous media, the general Biot formulation and its numerical solution[J]. International Journal of the Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1984, **8**(1): 71-96.
- [5] Cheng A H-D, Badmus J, Beskos D E. Integral equations for dynamic poroelasticity in frequency domain with BEM solution[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1991, **117**(5): 1136-1157.
- [6] Chen J, Dargush G F. Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analysis [J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, **32**(15): 2257-2278.
- [7] Philippacopoulos A J. Waves in partially saturated medium due to surface loads[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1988, **114**(10): 1740-1759.
- [8] Philippacopoulos A J. Lamb's problem for fluid-saturated porous media[J]. Bull Seism Society of America, 1988, **78**(2): 908-932.
- [9] 黄义, 张玉红. 饱和土三维非轴对称 Lamb 问题[J]. 中国科学(E 辑), 2000, **30**(4): 375-384.
- [10] 张引科, 黄义. 横观各向同性饱和弹性多孔介质非轴对称动力响应[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**

- (1): 56-70.
- [11] 金波. 具有混合边界透水条件的多孔饱和半空间上刚性圆板的垂直振动[J]. 固体力学学报, 1999, **20**(3): 267-271.
- [12] 陈龙珠, 陈胜利. 饱和地基上弹性圆板的动力响应[J]. 力学学报, 2001, **33**(6): 821-827.
- [13] 陈胜利, 陈龙珠. 饱和地基上含刚性圆核弹性圆板的竖向振动分析[J]. 力学学报, 2002, **34**(1): 77-84.
- [14] 陈胜利, 陈龙珠. 上覆单相弹性层的饱和地基上刚性基础竖向振动的轴对称混合边值问题[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(2): 201-206.
- [15] 王小岗. 土与基础结构动力相互作用的饱和弹性半空间理论[D]. 博士论文. 西安: 西安建筑科技大学, 2004, 41-48.
- [16] 黄义, 王小岗. 横观各向同性饱和弹性多孔介质三维非轴对称 Lamb 问题[J]. 中国科学(E 辑), 2004, **34**(9): 1037-1060.
- [17] 王小岗, 黄义. 横观各向同性饱和地基的三维动力响应[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(11): 1278-1286.
- [18] Kazi-Aoual, Guy Bonnet, Paul Jouanna. Green's function in an infinite transversely isotropic saturated poroelastic medium[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1988, **84**(5): 1883-1889.

Non-Axisymmetrical Vibration of Elastic Circular Plate on Layered Transversely Isotropic Saturated Ground

WANG Xiao-gang

(Department of Civil Engineering and Architecture, Taizhou University,
Taizhou, Zhejiang 318000, P. R. China)

Abstract: The non-axisymmetrical vibration of elastic circular plate resting on a layered transversely isotropic saturated ground is studied. First, the 3-d dynamic equations in cylindrical coordinate for transversely isotropic saturated soil were transformed into a group of governing differential equations with 1-order by the technique of Fourier expanding with respect to azimuth, and the state equation was established by Hankel integral transform method, furthermore the transfer matrixes within layered media were derived based on the solutions of the state equation. Secondly, by the transfer matrixes, the general solutions of dynamic response for layered transversely isotropic saturated ground excited by an arbitrary harmonic force were established under the boundary conditions, drainage conditions on the surface of ground as well as the contact conditions. Thirdly, the problem was led to a pair of dual integral equations describing the mixed boundary-value problem which can be reduced to the Fredholm integral equations of the second kind solved by numerical procedure easily. At the end, a numerical result concerning vertical and radial displacements of both the surface of saturated ground and plate was evaluated.

Key words: transversely isotropic; layered saturated ground; Biot's motion equation; elastic circular plate; Fredholm integral equation