

考虑大变形的刚柔耦合旋转智能 结构动力学分析*

黄永安^{1,2}, 邓子辰^{1,3}, 姚林晓¹

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072;

2. 华中科技大学 机械科学与工程学院, 武汉 430074;

3. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

(岳珠峰推荐)

摘要: 基于 Hamilton 原理对带端部质量的刚柔耦合旋转智能结构建立了耦合的非线性动力学模型. 根据一阶近似耦合(FOAC)模型理论, 通过有限元方法, 得到了系统的有限维模型. 模型中考虑了轴向、横向位移和转动角度的非线性几何效应, 以及压电材料和结构的大变形及离心刚化效应. 在有限元模型的基础上, 建立了 3 种实际系统模型方程, 分别是无压电层的结构, 有压电层开环状态和闭环状态. 最后基于简化模型的仿真结果显示有端部质量和没有端部质量的差异, 智能结构梁在闭环和开环的差异, 高速旋转梁的离心作用及结构外加电载荷的动力响应.

关键词: 刚柔结构; 智能结构; 有限元模型; 大变形

中图分类号: O313.3 **文献标识码:** A

引 言

近年来压电材料的理论研究和工程应用一直是固体力学和材料学领域的热点方向, 特别在复杂柔性结构行为控制问题引起了人们广泛的兴趣^[1,2]. 压电材料已经有效地被用来抑制振动^[3]. 然而当压电材料固定到主结构上就会出现复杂耦合和非线性特征. 当梁细长时, 几何非线性就会非常显著. 离心效应, 以及轴向、横向位移与旋转运动间的耦合作用是旋转系统和悬臂梁系统主要区别, 也是旋转系统比悬臂梁系统更难建模、计算的主要原因. 在智能结构中, 结构建模、分析和控制是一个具有挑战性的难题.

对于柔性智能结构大变形的非线性已有一定的研究, Mukherjee^[4] 在一阶剪切变形理论基础上建立了位移场方法, 给出了压电薄板结构非线性动力学分析一般方法; Reddy 给出了带传感器和作动器的大变形复合层薄板的精确描述^[5]; Icardi 和 Sciuva 研究了多层板结构的大变形

* 收稿日期: 2006-04-20; 修订日期: 2007-07-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572119; 10632030; 50625516); 教育部新世纪优秀人才计划资助项目(NCEF-04-0958); 国家重点基础研究发展计划(973)资助项目(2003CB716207); 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目

作者简介: 黄永安(1980—), 男, 博士(E-mail: yahuang@hust.edu.cn);

邓子辰(1964—), 男, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86-27-88492157; Fax: + 86-27-88460403; E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

和应力分析^[6]. 但是以上研究偏重于铁木辛柯梁的研究, 没有考虑欧拉梁的轴向、横向位移的耦合作用. 以往智能结构的研究对象一般是固定的悬臂梁或板, 研究对象不考虑旋转离心作用和轴向、横向位移与旋转之间的耦合作用. 最近, 基于连续介质力学和分析动力学, 并考虑柔性梁轴向位移与横向位移的二阶耦合项, 得到了一般轮毂-柔性梁的一阶耦合近似(FOAC)模型, 并通过物理实验对模型进行验证^[7]. 在研究高速旋转和高柔性结构时, 大变形几何非线性作用和离心效应不能忽略. 但是最近做大变形旋转柔性智能结构研究得很少, 尽管 Steven 建立了被用作结构的特征分析、检测和控制的简单有限元方法^[8], Thornburgh 给出了基于机电耦合的模型, 能够准确描述压电层机械响应和压电响应^[9], 但是没有考虑耦合作用和离心效应. 柔性结构的刚度和自然频率会因为离心作用而增加, 即离心刚化作用. 本文的研究对象是建立在蔡国平和洪嘉振研究基础上^[7], 他们已经深入研究了带有端部质点的轮毂-柔性梁系统, 并对 ZOAC 和 FOAC 模型进行了比较, 说明了 ZOAC 的应用范围.

本文将研究对象由通常的轮毂-柔性梁结构推广到轮毂-智能柔性梁结构, 模型中考虑了压电材料、柔性结构和旋转运动之间的耦合作用, 最后建立系统的有限元模型进行动力学分析.

1 几何非线性模型

本文研究水平面内的刚柔耦合智能旋转机构, 如图 1 所示, 主要包括: 轮毂、柔性智能梁和端部质量, 图 2 是其变形, 这个简单的结构可以用来模拟机械臂移动物体等复杂运动.

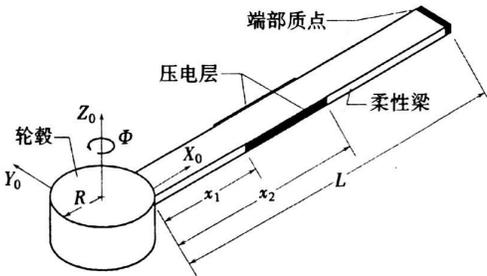


图 1 转柔性梁结构

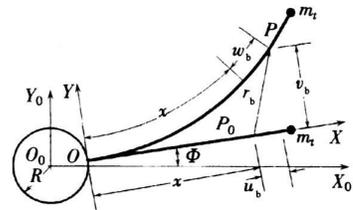


图 2 柔性智能梁的变形

图 2 中表示梁上任意点 P_0 的变形, x 是点 P_0 变形前的位置, 变形后 P_0 移动到 P 点. 基于 FOAC 模型 P 点在坐标系 $O_0-X_0Y_0$ 中表达式为^[7]:

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{O}_0\mathbf{P} = \mathbf{O}_0\mathbf{O} + \Theta(\mathbf{O}\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \mathbf{R} + \Theta \begin{bmatrix} x + u_b(x, t) \\ v_b(x, t) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中, $\mathbf{R} = \mathbf{O}_0\mathbf{O}$ 是原点 O 在坐标系 $O_0-X_0Y_0$ 中的位置, $\mathbf{O}\mathbf{P}_0 = [x, 0]^T$ 是点 P_0 变形之前在坐标系 $O-X-Y$ 中的位置, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ 是变形向量 $[u(x, t), v(x, t)]^T$, Θ 如下:

$$\mathbf{r}_b = \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(x, t) + u_2(x, t) \\ v_1(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v_1(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \\ v_1(x, t) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中, $u_1(x, t)$ 是轴向位移, $v_1(x, t)$ 是横向位移, $u_2(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v_1(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi$ 是横向位移 $v_1(x, t)$ 引起纵向位移的二阶耦合项, Θ 是从坐标系 $O-X-Y$ 到坐标系 $O_0-X_0Y_0$ 的转换矩阵.

对方程求一阶导数得到向量 $\mathbf{R}_{\dot{P}}$ 为

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_+ \ominus \mathbf{r}_p + \otimes \begin{bmatrix} x + u_b(x, t) \\ v_b(x, t) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

压电层中性轴的轴向位移:

$$u_{p1} = u_b - \frac{t_b + t_p}{2} \theta(x, t), \quad u_{p2} = u_b + \frac{t_b + t_p}{2} \theta(x, t), \quad (4)$$

式中, t_b 和 t_p 分别表示梁和压电层的厚度, u_{p1} 和 u_{p2} 分别表示顶部压电层和底部压电层的位移.

2 机电耦合本构模型

压电层极性沿着 Y 轴方向, 考虑到电能、弹性势能的能量原理, 带有压电传感器和激励的智能梁的响应可以通过以下方式建模:

$$\sigma = c\varepsilon - e^T E, \quad D = e\varepsilon + \xi E, \quad (5)$$

式中, σ 和 ε 分别表示应力及其应变, D 和 E 分别表示电位移和电场, c 、 e 和 ξ 分别是弹性矩阵、压电矩阵和绝缘矩阵. 因此有

$$c = E_p, \quad E = \phi(t)/t_p, \quad (6)$$

式中, E_p 是压电层弹性模数, $\phi(t)$ 是外部电压或根据传感器、激励情况引起压电材料电压.

3 柔性智能梁的动力学模型和公式

将柔性梁均分 n 等份, 节点数为 $n + 1$, 如图 3 所示.

$$x = Li + x, \quad (7)$$

单元的局部节点位移 \mathbf{q}^i 如下

$$\mathbf{q}^i = [u(L_i), v(L_i), \theta(L_i), u(L_{i+1}), v(L_{i+1}), \theta(L_{i+1})]^T. \quad (8)$$

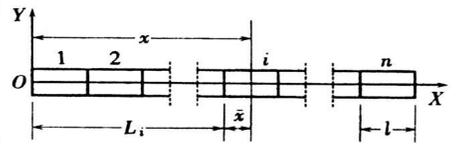


图3 柔性智能梁的有限元模型

将梁的轴向位移和横向位移作为广义变量, 点 P 的第 i 个单元的变形 u^i 、 v^i 和 θ^i 能够用这个单元的形状函数表达成 2 个节点坐标线性插值, 如下

$$u^i = N_u \mathbf{q}^i, \quad v^i = N_v \mathbf{q}^i, \quad \theta^i = N_\theta \mathbf{q}^i, \quad (9)$$

式中, N_u 和 u^i 表示轴向位移形状函数和轴向位移, N_v 和 v^i 表示横向位移形状函数和横向位移, N_θ 和 θ^i 表示倾角形状函数和倾角. 从方程(4)可得:

$$u_{p1} = N_p \mathbf{q}^i, \quad u_{p2} = N_p \mathbf{q}^i, \quad (10)$$

式中, $N_{p1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{t_b + t_p}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_u \\ N_\theta \end{bmatrix}$ 和 $N_{p2} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t_b + t_p}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_u \\ N_\theta \end{bmatrix}$ 是梁上下层压电层轴向位移形状函数.

3.1 梁

梁的总能量为:

$$\begin{aligned} V_{bb} + V_{be} + V_{be} + T_{br} + T_{be} = & \\ & \frac{1}{2} E_b I_b \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v_1(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} E_b A_b \int_0^L \left(\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L f_b v_1'^2 dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_b A_b \left(\frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} + (R + x + u_b) \Phi \right)^2 + \rho_b I_b \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \\ & \frac{1}{2} \rho_b A_b \int_0^L \left(\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v_1(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] - v_1 \Phi \right)^2 dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_{lbe} \mathbf{q}^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_{bce} \mathbf{q}^i + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \Phi^2 \mathbf{Q}_{bce} \mathbf{q} + \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{q}^{iT} \mathbf{M}_{bre} + \Phi \mathbf{q}^{iT} \mathbf{P}_{br1e} + \Phi \mathbf{P}_{br2e} \right) \mathbf{q}^i + \Phi^2 \left(\mathbf{q}^{iT} \mathbf{P}_{br3e} \mathbf{q}^i + \mathbf{q}^{iT} \mathbf{P}_{br4e} + \mathbf{P}_{br5e} \right) + \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{q}^{iT} \left(\mathbf{M}_{bce} + \mathbf{q}^{iT} \mathbf{G}_{be1} \mathbf{q}^i + \mathbf{q}^{iT} \mathbf{G}_{be2e} \mathbf{q}^i + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Phi \mathbf{q}^{iT} \left(\mathbf{G}_{be3e} \mathbf{q}^i + \mathbf{G}_{be4e} \right) \mathbf{q}^i + \Phi^2 \mathbf{q}^{iT} \mathbf{G}_{be5e} \mathbf{q}^i \right), \quad (11)
\end{aligned}$$

式中, V_{bb} 、 V_{be} 、 V_{bc} 分别为弯曲、伸缩和离心效应产生的势能, T_{br} 为横向振动和转动的动能, T_{be} 轴向运动动能, ρ_b 、 E_b 、 A_b 和 I_b 分别为梁密度、弹性模量、面积和截面距。

3.2 压电层的总机械能为

压电层的总机械能为

$$\begin{aligned}
& V_{pb} + V_{pe} + V_{pc} + T_{pr} + T_{pe} = \\
& \frac{1}{2} E_p I_p \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} E_p A_p \int_0^L \left(\frac{\partial u_p(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L f_p v'^2 dx + \\
& \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_p A_p \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + (R + x + u_p) \Phi \right)^2 + \rho_p I_p \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \\
& \frac{1}{2} \rho_p A_p \int_0^L \left(\frac{\partial u_p(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v_1(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] - v_1 \Phi \right)^2 dx = \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_{pbe} \mathbf{q}^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_{pee} \mathbf{q}^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Phi^2 \mathbf{q}^{iT} \mathbf{Q}_{pee} \mathbf{q}^i + \\
& \frac{1}{2} \left(\mathbf{q}^T \mathbf{M}_{pr} + \Phi \mathbf{q}^T \mathbf{P}_{pr1} + \Phi \mathbf{P}_{pr2} \right) \mathbf{q} + \Phi^2 \left(\mathbf{q}^T \mathbf{P}_{pr3} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{P}_{pr4} + \mathbf{P}_{pr5} \right) + \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{q}^{iT} \left(\mathbf{M}_{pee} + \mathbf{q}^{iT} \mathbf{G}_{pe1e} + \mathbf{q}^i \mathbf{q}^{iT} \mathbf{G}_{pe2e} \mathbf{q}^i + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Phi \mathbf{q}^{iT} \mathbf{G}_{pe3e} \mathbf{q}^i + \mathbf{q}^{iT} \mathbf{G}_{pe4e} \right) \mathbf{q}^i + \Phi^2 \mathbf{q}^{iT} \mathbf{G}_{pe5e} \mathbf{q}^i, \quad (12)
\end{aligned}$$

式中, V_{pb} 、 V_{pe} 和 V_{pc} 分别为压电层弯曲势能、层伸缩产生势能和压电层离心效应产生的势能, T_{pr} 横向位移和转动产生的动能, T_{pe} 轴向运动产生的动能, E_p 为压电层弹性模量。

由压电效应产生的势能

$$\begin{aligned}
V_{pp} &= \sum_{i=1}^n \int_0^l d_{31} E_p \frac{\partial u_p}{\partial x} b \cdot g_{31} E_p \frac{\partial u_p}{\partial x} t_p dx = \\
& \sum_{i=1}^n d_{31} E_p b g_{31} E_p t_p \mathbf{q}^{iT} \int_0^l N_p'^T \cdot N_p' dx \mathbf{q}^i = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_{ppe} \mathbf{q}^i, \quad (13)
\end{aligned}$$

式中, $\mathbf{K}_{ppe} = d_{31} E_p b g_{31} E_p t_p \int_0^l N_p'^T \cdot N_p' dx$, b 为柔性梁的宽度。

3.3 端部质点和轮毂

端部质量总能量

$$\begin{aligned}
V_{mc} + T_{mr} + T_{be} &= \frac{1}{2} f_m v'^2 + \frac{1}{2} m_t \left[\left(\frac{\partial v(L, t)}{\partial t} + (R + L + u_L) \Phi \right)^2 \right] + \\
& \frac{1}{2} m_t \left(\frac{\partial u_1(L, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial v_1(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] - v_1(L, t) \Phi \right)^2 = \\
& \frac{1}{2} \mathbf{q}^{nT} \mathbf{K}_{mce} \mathbf{q}^n + \frac{1}{2} \mathbf{q}^{nT} \Phi^2 \mathbf{Q}_{mce} \mathbf{q}^n +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{q}^{iT} M_{mr} \mathbf{q}^n + \mathbf{q}^{iT} P_{mr1e} \mathbf{q}^n + \mathbf{q}^{iT} P_{mr2e} \mathbf{q}^n + \\
& \mathbf{q}^{iT} (P_{mr3e} \mathbf{q}^n + P_{mr4e} \mathbf{q}^n + P_{mr5e} \mathbf{q}^n) + \\
& \frac{1}{2} \mathbf{q}^{iT} (M_{me} + G_{me1e} \mathbf{q}^n + G_{me2e} \mathbf{q}^n) \mathbf{q}^n + \\
& \frac{1}{2} (\mathbf{q}^{iT} G_{me3e} \mathbf{q}^n + \mathbf{q}^{iT} G_{me4e} \mathbf{q}^n + \frac{1}{2} \mathbf{q}^{iT} G_{me5e} \mathbf{q}^n), \quad (14)
\end{aligned}$$

式中, V_{mc} 为质点由离心效应产生的势能, T_{mr} 为横向位移和转动产生的势能, T_{be} 为质点轴向运动产生的动能.

轮毂的动能为

$$T_{hr} = \frac{1}{2} J_h \dot{\Phi}^2, \quad (15)$$

式中, J_h 为轮毂的转动惯量.

3.4 虚功

外力矩虚功:

$$\partial W_m = \tau \cdot \partial \Phi, \quad (16)$$

式中, τ 是外力矩.

由于外部压电层所做的虚功为

$$\begin{aligned}
\partial W_p &= \sum_{i=1}^n \int_0^l E_p d_{31} b \phi_a(t) \frac{\partial u_p}{\partial x} dx = E_p d_{31} b \phi_a(t) \delta u_p |_{x=0}^l = \\
& \sum_{i=1}^n E_p d_{31} b \phi_a(t) \delta \mathbf{q}^{iT} (N_p(l) - N_p(0)) = \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{q}^{iT} \mathbf{P}_{ae}^i \phi_a(t), \quad (17)
\end{aligned}$$

式中, \mathbf{P}_{ae}^i 为压电单元力向量, 是由于应用激励电压引起的位移, r_a 是梁的中性轴到压电层中间层的距离, ϕ_a 为强制压电层的电压.

4 系统总体动力学方程

应用广义 Hamilton 原理:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0, \quad (18)$$

式中, δT 是动能变量, δV 是势能变量, δW 是外力的虚功.

应用广义 Hamilton 原理, 得到系统的一阶近似耦合动力学方程不同的形式:

$$\begin{cases} \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_2 \mathbf{q} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}, \\ \mathbf{M}_\theta \dot{\Phi} + \mathbf{C}_\theta \dot{\Phi} + \mathbf{K}_\theta \Phi = \mathbf{F}_\theta. \end{cases} \quad (19)$$

4.1 无外电压旋转动力学方程

总动能、总势能和总虚功分别为:

$$\begin{cases} T = T_{br} + T_{be} + T_{pr} + T_{pe} + T_{hb}, \\ V = V_{bb} + V_{be} + V_{bc} + V_{pb} + V_{pe} + V_{pc}, \\ W = W_m. \end{cases} \quad (20)$$

带端部质量的刚柔耦合旋转结构边界条件: $u(0, t) = 0$, $v(0, t) = 0$, $u'(0, t) = 0$, $v'(L, t) = 0$.

4.2 加外电压旋转闭环

总动能和总势能同第 4.1 节的完全相同,总虚功:

$$W = W_m + W_p, \quad (21)$$

式中, $F = -\dot{\Phi}P_2/2 + \Phi^2P_4/2 - P_a\phi_a(t)$, 其它变量与 4.1 节相同.

4.3 不加外电压开环旋转

总动能和总虚功同 4.1 节,总势能:

$$V = V_{bb} + V_{be} + V_{bc} + V_{pb} + V_{pe} + V_{pc} + V_{pp}, \quad (22)$$

其中

$$K = K_{bb} + K_{be} + K_{pb} + K_{pe} + K_{pp} + \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2(P_1 + qG_3 + G_4) + \Phi^2(Q - P_3 - G_5),$$

其它参数同 4.1 节.

5 数值仿真

通过数值仿真来分析系统动态特性,表 1 中系统参数^[10],梁端部质量为 $m_t = 0.085 \text{ kg}$.

旋转运动规律参考文献[7]、文献[11]、文献[12]中,如下:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{\omega_s}{T_s} \left\{ \frac{t^2}{2} + \left(\frac{T_s}{2\pi} \right)^2 \left[\cos \frac{2\pi}{T_s} t - 1 \right] \right\}, & t \leq 15, \\ \frac{\omega_s T_s}{2} + \omega_s t, & t > 15, \end{cases} \quad (23)$$

式中,在时刻 $T_s = 15 \text{ s}$ 时梁角速度达到 ω_s ,下面做数值仿真时选 $\omega_s = 0.4 \text{ rad/s}$.

表 1 刚柔旋转结构参量

		梁	压电层	单位
长度	L	8	8	m
宽度	W	1.985×10^{-3}	1.985×10^{-3}	m
厚度	t_b, t_p	3.6765×10^{-2}	2.667×10^{-4}	m
密度	ρ	2.7667×10^3	7.5×10^3	Kg/m^3
弹性模数	E_b, E_p	6.8952×10^{10}	1.39×10^{11}	N/m^2
压电常数	d_{31}		-3.20×10^{-10}	m/V
	g_{31}		-9.5×10^{-3}	Vm/N
额定电压	ϕ		30	$\text{V/}\mu\text{m}$
介电常数	β_{33}^T		4.6808×10^7	Vm/C

本文只考虑旋转和横向位移耦合项、旋转和轴向位移耦合项,由于横向位移引起的轴向数量上的减少使二阶耦合项被忽略,并以离心有势力代替,因此,包括 G_1, G_2, G_3 在内的矩阵将被忽略,有关二阶耦合项的详细描述可参考文献[7]. 有关于此类方程的求解参考文献[13].

同时,已知系统的大范围旋转运动规律,旋转柔性系统动力学方程被改写成如下形式:

$$\begin{cases} M\dot{q} + \Phi C_2 \dot{q} + Kq = F, \\ M\theta \dot{\Phi} + C\theta \Phi + K\theta \Phi = F\theta, \end{cases} \quad (24)$$

式中

$$M = M_{be} + M_{br} + M_{pe} + M_{pr} + M_{me} + M_{mr},$$

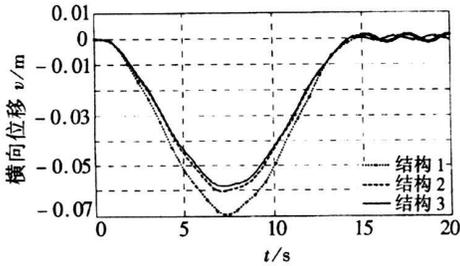
$$C_2 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}G_4 - \left(\frac{P_1}{2} + \frac{G_4}{2} \right)^T, \quad F = -\frac{1}{2}\dot{\Phi}P_2 + \frac{1}{2}\Phi^2P_4,$$

$$K = K_{bb} + K_{be} + K_{pb} + K_{pe} + \frac{1}{2} \Phi^T P_1 + \frac{1}{2} \Phi^T G_4 + \Phi^T Q - \Phi^T P_3 - \Phi^T G_5.$$

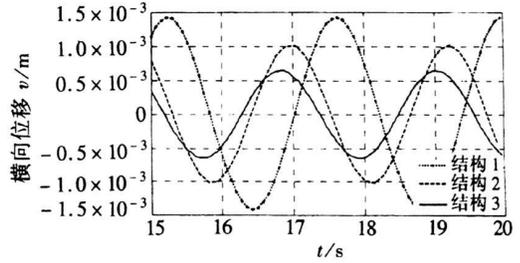
为了突出离心刚化作用的重要性,表明智能梁在闭环和开环的区别、系统在有端部质量和没有端部质量的区别,这里采用了7种结构形式,分别是:结构1为系统中没有压电层但有端部质量,结构2为闭环系统带压电层和端部质量,结构3为开环系统带压电层和端部质量,结构4表示闭环系统有压电层没有端部质量的情况,结构5表示开环系统有压电层及端部质量在外电压作用时的情况.结构6和结构7对应于结构1和结构3,但是没有端部质点.

5.1 有端部质量的系统响应和固有频率

结构1、结构2和结构3的前6阶频率如表2,可以看出在这3种结构中,结构3的频率最大,表明在这3种结构中它的刚度最大.依据已知的转动规律,图4(a)和图4(b)中显示出结构1、结构2、结构3的横向位移,结构1的位移比结构2和结构3的位移大.在图4(a)中3种结构最大位移分别是0.0696 m、0.0603 m、0.0582 m,在图4(b)中3种结构最大位移分别是0.0014 m、0.0010 m、0.00065 m,结构3的频率比相应结构2处的频率大.



(a) 3种结构最大位移



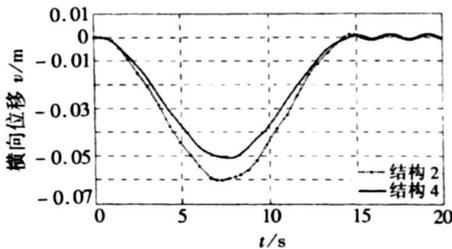
(b) 3种结构最大位移

图4 结构1、结构2和结构3横向变形及其比较的时间关系曲线

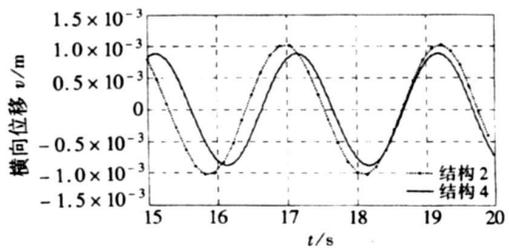
表2

带有端部质量系统的前六阶频率

	一阶频率	二阶频率	三阶频率	四阶频率	五阶频率	六阶频率
结构1	0.420 9	2.674 7	7.567 8	14.974 0	24.998 8	37.767 5
结构2	0.449 3	2.849 2	8.039 4	15.851 9	26.357 5	39.636 7
结构3	0.456 4	2.892 5	8.153 9	16.057 0	26.657 4	40.015 5



(a) 最大响应



(b) 最大响应

图5 结构2和结构4横向位移及其比较时间关系曲线

5.2 位移分析

表2中列出有端部质量系统前六阶频率,无端部质量的相应数据列在表3中.对比两个表,可发现表3中的频率均比表2中相应的频率大.对于这两个表的比较列在表4中,表4中数据表示(表3的频率-表2的频率)/表2的频率.

图5是依据已知的旋转规律得出结构2和4的横向位移,图5(a)中结构2和结构4最大响应分别是0.0603 m和0.0507 m,在图5(b)中结构2和结构4最大响应分别是0.0010 m和0.00088 m,数据显示带端部质量结构振幅比无端部质量结构振幅大.

即使是端部质量非常小,对系统的影响也非常大.端部质量会增大结构的变形,减小其固有频率,从表4可以看出端部质量对频率影响非常大.

表3 不带端部质量系统的前六阶频率

	第一阶	第二阶	第三阶	第四阶	第五阶	第六阶
结构1	0.4633	2.9034	8.1340	15.9653	26.4852	39.8044
结构2	0.4930	3.0850	8.6232	16.8731	27.8856	41.7210
结构3	0.5007	3.1317	8.7453	17.0899	28.2000	42.1137

表4 系统带端部质量和不带端部质量前六阶频率比较

二者比较	第一阶	第二阶	第三阶	第四阶	第五阶	第六阶
结构1和结构6	10.07%	8.55%	7.48%	6.62%	5.95%	5.39%
结构2和结构4	9.73%	8.28%	7.26%	6.44%	5.80%	5.26%
结构3和结构7	9.71%	8.27%	7.25%	6.43%	5.79%	5.24%

5.3 固定系统和旋转系统比较

为说明系统的离心刚化效应,系统的旋转运动规律采用下列方程:

$$\Phi = t^2 \tag{25}$$

这里目的是证明系统固有频率随速度的变化趋势.

频率1到频率6表示前六阶固有频率.结构3的一阶到六阶频率分别如图6所示.从这个例子中明显看出离心刚化作用.按照上面给定的旋转规律,频率会随时间变的越来越大.

表5中是结构1、结构2和结构3频率在第20s的数据,从表6可知端部质量的离心效应对二阶频率影响最大.

表5 结构1、结构2和结构3在第20s前六阶频率

	第一阶	第二阶	第三阶	第四阶	第五阶	第六阶
结构1	1.0183	8.287	15.672	24.781	35.947	49.490
结构2	1.0426	8.3307	15.875	25.286	36.865	50.887
结构3	1.0485	8.3452	15.932	25.415	37.081	51.185

表6 带端部质量系统的前六阶频率

	第一阶	第二阶	第三阶	第四阶	第五阶	第六阶
结构1	141.9%	209.8%	107.1%	65.5%	43.9%	31.0%
结构2	132.0%	192.4%	97.5%	59.5%	39.9%	28.4%
结构3	129.7%	188.2%	95.4%	58.3%	39.1%	27.9%

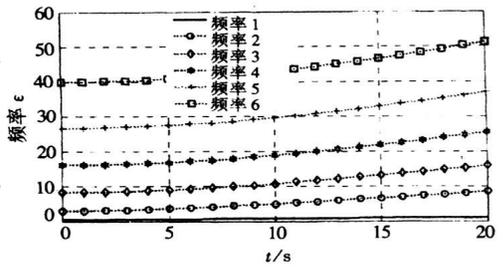


图6 结构3前六阶频率随时间的变化规律

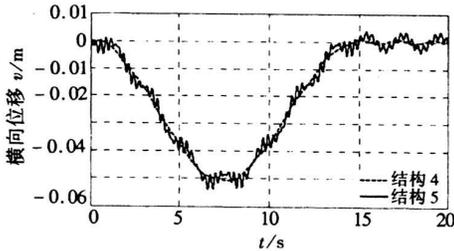
注 表6中数据为(表5频率-表2频率对应)/表2频率.

5.4 施加外部电压

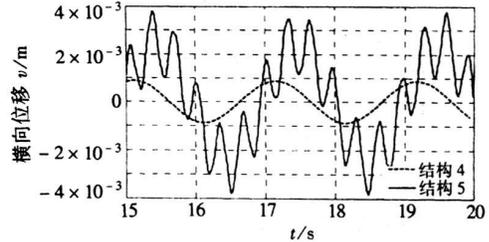
计算带作动器的旋转刚柔耦合梁在受外部电压作用时的结构响应, 电压规律:

$$\phi_a = 20 \times \sin\left(\frac{T_s \times t}{2\pi}\right), \quad (26)$$

图 7 中是不带端部质量智能闭环结构在加外电压和不加外电压激励下的横向响应, 图 7 (b) 中结构 5 响应最大值是 0.003 8 m, 结构 4 是 0.000 9 m, 前者是后者的 4.2 倍。



(a) 最大响应



(b) 最大响应

图 7 结构 4 和结构 5 横向位移

6 结 论

本文对带有智能材料的旋转刚柔耦合结构进行了动力学建模与分析. 采用新的模型对旋转柔性智能梁结构进行瞬态响应分析. 完全耦合的动力学模型是在 FOAC 模型理论上建立的, 考虑了离心效应和旋转和变形直接的几何非线性. 本文考虑的开闭环状态下动力学分析, 以适合传感器和作动器两种情况.

本文采用的几个数值仿真说明模型的有效性. 第 1 个仿真表明智能结构带端部质量和不带端部质量明显的区别, 第 2 个仿真是结构 1, 结构 2 和结构 3 的响应. 第 3 个仿真分析离心刚化效应. 最后 1 个仿真得到旋转系统在受外部电压激励下结构的响应.

[参 考 文 献]

- [1] Tzou H S, Wang D W, Chai W K. Dynamics and distributed control of conical shells laminated with full and diagonal actuators[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 256(1): 65-79.
- [2] Zhou Y-H, Tzou H S. Active control of nonlinear piezoelectric circular shallow spherical shells[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37(12): 1663-1677.
- [3] Tzou H S, Ye R. Piezothermoelasticity and precision control of piezoelectric systems: theory and finite element analysis[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1994, 116(4): 489-495.
- [4] Mukherjee A, Chaudhuri A Saha. Piezolaminated beams with large deformations[J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(17): 4567-4582.
- [5] Reddy J N. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators[J]. Engineering Structures, 1999, 21(7): 568-593.
- [6] Icardi U, Sciurva M D. Large deflection and stress analysis of multilayered plates with induced-strain actuators[J]. Smart Materials and Structures, 1996, 5(2): 140-164.
- [7] Cai G-P, Hong J-Z, Yang S-X. Dynamic analysis of a flexible hub-beam system with tip mass[J]. Mechanics Research Communications, 2005, 32(2): 173-190.
- [8] Lai S-H-Y. Dynamic modeling and control of a rotating piezo-bonded beam-mass system[J]. Mechanics Research Communications, 1994, 21(2): 181-188.

- [9] Thornburgh R P, Chattopadhyay A, Ghoshal A. Transient vibration of smart structures using a coupled piezoelectric-mechanical theory[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **274**(1/2): 53-72.
- [10] Benjeddou A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey[J]. *Computers & Structures*, 2000, **76**(1/3): 347-363.
- [11] Ryu J, Kim S-S, Kim S S. A criterion on inclusion of stress stiffening effects in flexible multibody dynamic system simulation[J]. *Computers & Structures*, 1997, **62**(6): 1035-1048.
- [12] Wu S C, Haug E J. Geometric nonlinear substructuring for dynamics of flexible mechanical systems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, **26**(10): 2211-2226.
- [13] HUANG Yong-an, DENG Zi-chen, YAO Lin-xiao. An improved symplectic precise integration method for analysis of the rotating rigid-flexible coupled system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, **299**(1/2): 229-246.

Dynamic Analysis of a Rotating Rigid-Flexible Coupled Smart Structure With Large Deformations

HUANG Yong-an^{1,2}, DENG Zi-chen^{1,3}, YAO Lin-xiao¹

(1. School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China;

2. School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P. R. China;

3. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P. R. China)

Abstract: Based on Hamilton's principle, a new kind of fully coupled nonlinear dynamic model for a rotating rigid-flexible smart structure with a tip mass is proposed. The geometrically nonlinear effects of the axial, transverse displacement and rotation angle are considered by means of the first-order approximation coupling (FOAC) model theory, in which the large deformations and the centrifugal stiffening effects are considered. Three kinds of systems are established respectively, which are a structure without piezoelectric layer, with piezoelectric layer in open circuit and closed circuit. Several simulations based on simplified models are presented to show the differences in characteristics between structures with and without the tip mass, between smart beams in closed and open circuit, and between the centrifugal effects in high speed rotating state or not. The last simulation calculates the dynamic response of the structure subjected to external electrical loading.

Key words: multibody system; smart beam; finite element method; large deformation