文章编号: 1000-0887(2007)09-1079-08　　

具有多个非线性源项的波动方程*

刘亚成,　徐润章,　于　涛

(哈尔滨工程大学 理学院, 哈尔滨 150001)

(郭兴明推荐)

摘要:　利用位势井方法研究在有界区域上具有多个非线性源项的波动方程初边值问题. 给出了位势井的结构和位势井深度函数的性质. 通过引进位势井族得到了在这些问题的流之下的一些集合不变性以及解的真空隔离, 揭示了只要问题的初值属于位势井内或位势井外, 则问题在今后所有时间内的解都存在于位势井内或井外, 同时存在一个没有解的空间区域. 进而给出了解的整体存在和不存在的门槛结果. 最后, 利用相同的方法讨论了具有临界初始条件的问题.

关　键　词:　波动方程;　位势井;　整体存在性;　不存在性

中图分类号:　O175.26; O175.27　　　文献标识码:　A

引　　言

自从 Sattinger[1] 在 1968 年引进位势井以后, 位势井方法已经成为研究非线性发展方程的最重要的方法之一, 并且已经有了许多结果[2-15]. 但是, 在已得到的几乎所有结果中, 用位势井方法研究的非线性发展方程仅含有一个半线性项 $f(u)$, 其中 $f(u)$ 必须满足增长条件: 对某一给定的常数 $p > 1$, 有 $|f(u)| = O(|u|^p)$ 或 $|uf(u)| = O(|u|^{p+1})$. 例如, 在文献[2]中对一给定常数 $\gamma > 2$, 假设 $f(u)$ 满足 $F(u) = \int_0^u f(s)\mathrm{d}s = O(|u|^\gamma)$. 再由假设 $|uf(u)| \leqslant \gamma |F(u)|$ 可得到 $|uf(u)| = O(|u|^\gamma)$. 在文献[3]中作者要求 $f(u)$ 是 $p > 2$ 阶齐次的. 即

$$f(\lambda u) = \lambda^p f(u), \qquad \forall \lambda > 0.$$

因此, 下面的具有多个非线性源项的波动方程

$$u_{tt} - \Delta u = f(u) \equiv \sum_{k=1}^{l} a_k |u|^{p_k - 1} u, \qquad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$

不能包括在使用位势井方法所得到的任何结果中. 方程(1)的物理意义是明显的. 在文献[4]和文献[5]中, 作者研究了半线性波动方程

$$u_{tt} - \Delta u = |u|^{p-1} u$$

和具有非线性阻尼项和源项的多维粘弹性方程

* 收稿日期:　2006-07-26;　修订日期:　2007-06-28
基金项目:　国家自然科学基金资助项目(10271034)
作者简介:　刘亚成(1941—), 男, 吉林人, 教授(Tel: +86-451-82518277);
徐润章(1982—), 男, 河北人, 博士(联系人. E-mail: xurunzh@yahoo.com.cn).

$$u_{tt} - \Delta u_t + f(u_t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_i(u_{x_i}) + g(u)$$

的初边值问题, 通过引进位势井族得到了一些新的整体解的存在性定理, 特别, 发现了在空间 $H_0^1(\Omega)$ 或 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中位势井和球之间的关系, 以及解的真空隔离性质. 在文献[6] 中证明了具有临界初始条件 $I(u_0) \geqslant 0, J(u_0) = d$ 的非线性抛物方程初边值问题的整体解的存在性.

本文研究方程(1) 具初边值条件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \ t \geqslant 0 \tag{3}$$

的初边值问题, 其中 $\Omega \subset R^n$ 是有界区域, $a_k > 0\ (1 \leqslant k \leqslant l)$, $p_k (1 \leqslant k \leqslant l)$ 满足

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} 1 < p = p_1 < p_2 < \cdots < p_l = q < \infty, & \text{若 } n = 1, 2, \\ 1 < p = p_1 < p_2 < \cdots < p_l = q \leqslant (n+2)/(n-2), & \text{若 } n \geqslant 3. \end{cases}$$

文中分别用 $\|\cdot\|_p$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ 和 $\|\cdot\|_2$, 且有$(u,v) = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$.

1 位势井族的引进

对于问题(1) 至问题(3), 定义

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{p_k+1}\|u\|_{p_k+1}^{p_k+1},$$

$$I(u) = \|\nabla u\|^2 - \sum_{k=1}^{l} a_k \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1},$$

$$I_\delta(u) = \delta\|\nabla u\|^2 - \sum_{k=1}^{l} a_k \|u\|_{p_k+1}^{p_k+1}, \qquad \delta > 0.$$

引理 1 设 $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|\nabla u\| \neq 0$. 则

(i) $\lim\limits_{\lambda \to 0} J(\lambda u) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} J(\lambda u) = -\infty$;

(ii) 在区间 $0 < \lambda < +\infty$ 上, 存在唯一的 $\lambda = \lambda(u)$ 使

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} J(\lambda u) \mid_{\lambda = \lambda} = 0;$$

(iii) $J(\lambda u)$ 于 $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda$ 单调增加, 于 $\lambda \leqslant \lambda < +\infty$ 单调减少, 于 $\lambda = \lambda$ 处取到最大值;

(iv) 当 $0 < \lambda < \lambda$ 时有 $I(\lambda u) > 0$, 当 $\lambda < \lambda < +\infty$ 时有 $I(\lambda u) < 0$, 且有 $I(\lambda u) = 0$.

引理 2 若 $0 < \|\nabla u\| < r(\delta)\ (\leqslant r(\delta))$, 则 $I_\delta(u) > 0\ (\geqslant 0)$. 特别, 若 $0 < \|\nabla u\| < r(1)\ (\leqslant r(1))$, 则 $I(u) > 0\ (\geqslant 0)$, 其中 $r(\delta)$ 是方程

$$\sum_{k=1}^{l} a_k C_k^{p_k+1} r^{p_k-1} = \delta$$

的唯一实根. $C_k (1 \leqslant k \leqslant l)$ 是从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $L^{p_k+1}(\Omega)$ 的嵌入常数.

引理 3 若 $I_\delta(u) < 0$, 则 $\|\nabla u\| > r(\delta)$. 特别, 若 $I(u) < 0$, 则有 $\|\nabla u\| > r(1)$.

引理 4 若 $I_\delta(u) = 0$ 且 $\|\nabla u\| \neq 0$, 则有 $\|\nabla u\| \geqslant r(\delta)$. 特别, 若 $I(u) = 0$ 且 $\|\nabla u\| \neq 0$, 则有 $\|\nabla u\| \geqslant r(1)$. 现在定义

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u),$$

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid I(u) = 0, \|\nabla u\| \neq 0 \right\}.$$

$$d(\delta) = \inf_{u \in \mathcal{N}_\delta} J(u), \qquad \delta > 0,$$

$$\mathcal{N}_\delta = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid I_\delta(u) = 0, \ \|\nabla u\| \neq 0 \right\}, \qquad \delta > 0.$$

引理 5 作为 δ 的函数, $d(\delta)$ 有如下性质

(i) 对于 $0 < \delta < (p+1)/2$, $a(\delta) = 1/2 - \delta/(p+1)$, 有 $d(\delta) > a(\delta) r^2(\delta)$;

(ii) $\lim\limits_{\delta \to 0} d(\delta) = 0$ 且存在常数 b 满足 $(p+1)/2 < b < (q+1)/2$ 使得 $d(b) = 0$ 且 $d(\delta) > 0$, 于 $0 < \delta < b$;

(iii) $d(\delta)$ 于 $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ 严格单调增加, 于 $1 \leqslant \delta \leqslant b$ 严格单调减少, 于 $\delta = 1$ 处取到最大值 $d = d(1)$. 现在我们可以如下定义位势井族

$$W = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid I(u) > 0, J(u) < d \right\} \cup \left\{ 0 \right\},$$

$$W_\delta = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid I_\delta(u) > 0, J(u) < d(\delta) \right\} \cup \left\{ 0 \right\}, \qquad 0 < \delta < b.$$

另外定义

$$V = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid I(u) < 0, J(u) < d \right\},$$

$$V_\delta = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid I_\delta(u) < 0, J(u) < d(\delta) \right\}, \qquad 0 < \delta < b.$$

2 问题(1)至问题(3)解的集合不变性和真空隔离

首先定义问题(1)至问题(3)的能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{p_k + 1}\|u\|_{p_k+1}^{p_k+1} \equiv \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(u).$$

利用类似于文献[4]中的方法可证明如下定理

定理 6 设 $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 假设 $0 < e < d$, $\delta_1 < \delta_2$ 分别为方程 $d(\delta) = e$ 的两个根. 则

(i) 若 $I(u_0) > 0$ 或 $\|\nabla u_0\| = 0$, 则问题(1)至问题(3)满足 $E(0) = e$ 的所有解属于 W_δ, 对 $\delta_1 < \delta < \delta_2$.

(ii) 若 $I(u_0) < 0$, 则问题(1)至问题(3)满足 $E(0) = e$ 的所有解属于 V_δ, 对 $\delta_1 < \delta < \delta_2$.

由定理 6 和引理 5 可得

定理 7 如果将定理 6 中的假设 $E(0) = e$ 改为 $0 < E(0) \leqslant e$, 则定理 6 仍然成立.

定理 8 设 $u_i(x)$ $(i = 0, 1)$, e 和 δ_i $(i = 1, 2)$ 均与定理 6 中相同. 若 $0 < E(0) \leqslant e$, 则对任意 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, 集合 W_δ 与 V_δ, 从而集合

$$W_{\delta_1 \delta_2} = \bigcup_{\delta_1 < \delta < \delta_2} W_\delta, \quad V_{\delta_1 \delta_2} = \bigcup_{\delta_1 < \delta < \delta_2} V_\delta$$

分别在问题(1)至问题(3)的流之下是不变的.

设 $u(t)$ 是问题(1)至问题(3)满足 $0 < E(0) \leqslant e < d$ 的任一解, T 是 $u(t)$ 的存在时间. 则由能量等式可得到

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(u) = E(0) < d(\delta), \qquad \delta_1 < \delta < \delta_2; 0 \leqslant t < T,$$

这表明, 如果 $0 < E(0) \leqslant e < d$, 则对任意 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, $u \in \mathcal{N}_\delta$ 是不可能的. 从而对问题(1)至问题(3)满足 $0 < E(0) \leqslant e < d$ 的解存在一个真空区域

$$U_e = \mathcal{N}_{\delta_1 \delta_2} = \bigcup_{\delta_1 < \delta < \delta_2} \mathcal{N}_\delta = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \|\nabla u\| \neq 0, \ I_\delta(u) = 0, \ \delta_1 < \delta < \delta_2 \right\}$$

使得问题(1)至问题(3)在 U_e 中不存在解. 真空区域 U_e 随 e 的减小而增大. 作为极限情形可得到

$$U_0 = \mathcal{N}_{0,b} = \bigcup_{0<\delta<b} \mathcal{N}_\delta = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \| \nabla u \| \neq 0,\ I_\delta(u) = 0,\ 0 < \delta < b \right\}.$$

定理 9 问题(1)至问题(3)满足 $E(0) = 0$ 的所有非平凡解属于

$$B_{r_0}^c = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \| \nabla u \| \geqslant r_0 \right\},$$

其中 r_0 是方程 $\psi(r) = \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{p_k + 1} C_k^{p_k+1} r^{p_k-1} = \frac{1}{2}$ 的唯一实根.

证 设 $u(t)$ 是问题(1)至问题(3)满足 $E(0) = 0$ 的任一解, T 是 $u(t)$ 的存在时间. 从能量等式

$$\| u_t \|^2/2 + J(u) \equiv E(0) = 0$$

可得 $J(u) \leqslant 0$, 于 $0 \leqslant t < T$. 故由

$$\frac{1}{2} \| \nabla u \|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{p_k + 1} \| u \|_{p_k+1}^{p_k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{p_k + 1} C_k^{p_k+1} \| \nabla u \|^{p_k+1} =$$

$$\psi(\| \nabla u \|) \| \nabla u \|^2, \qquad 0 \leqslant t < T.$$

可见必有 $\| \nabla u \| = 0$ 或 $\| \nabla u \| \geqslant r_0$. 如果 $\| \nabla u_0 \| = 0$, 则 $\| \nabla u \| \equiv 0$, 于 $0 \leqslant t < T$. 否则, 存在 $t_0 \in (0, T)$ 使得 $0 < \| \nabla u(t_0) \| < r_0$. 通过类似的讨论可证明如果 $\| \nabla u_0 \| \geqslant r_0$, 则 $\| \nabla u \| \geqslant r_0$, 于 $0 < t < T$.

定理 10 设 $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 若 $E(0) < 0$ 或 $E(0) = 0$, $\| \nabla u_0 \| \neq 0$. 则问题(1)至问题(3)的所有解属于 V_δ, 对所有 $0 < \delta < (p + 1)/2$.

证 设 $u(t)$ 是问题(1)至问题(3)满足 $E(0) < 0$ 或 $E(0) = 0$, $\| \nabla u_0 \| \neq 0$ 的任一解, T 是 $u(t)$ 的存在时间. 由能量等式对 $0 < \delta < (p + 1)/2$ 可得到

$$\frac{1}{2} \| u_t \|^2 + a(\delta) \| \nabla u \|^2 + \frac{1}{p + 1} I_\delta(u) \leqslant \frac{1}{2} \| u_t \|^2 + J(u) = E(0). \tag{4}$$

观察(4)式可知, 如果 $E(0) < 0$, 则 $I_\delta(u) < 0$, $J(u) < 0 < d(\delta)$, 于 $0 < \delta < (p + 1)/2$, 也即 $u(t) \in V_\delta$, 于 $0 < \delta < (p + 1)/2$, $0 \leqslant t < T$. 如果 $E(0) = 0$ 且 $\| \nabla u_0 \| \neq 0$, 则定理 9 给出 $\| \nabla u \| \geqslant r_0$, 于 $0 \leqslant t < T$. 由此可得 $I_\delta(u) < 0$, $J(u) < 0 < d(\delta)$, 也即 $u(t) \in V_\delta$, 于 $0 < \delta < (p + 1)/2$, $0 \leqslant t < T$.

3 问题(1)至问题(3)解的整体存在性和不存在性

定理 11 设 $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 若 $0 < E(0) < d$, $I(u_0) > 0$ 或 $\| \nabla u_0 \| = 0$. 则问题(1)至问题(3)有整体弱解 $u(t) \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, 且 $u_t(t) \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$, $u(t) \in W$, $\forall 0 \leqslant t < \infty$.

证 与文献[4]中方法相同, 构造问题(1)至问题(3)的近似解 $u_m(x, t)$. 则对于充分大的 m 及 $0 \leqslant t < \infty$ 可得到

$$\| u_{mt} \|^2/2 + J(u_m) = E_m(0) < d, \qquad 0 \leqslant t < \infty, \tag{5}$$

且有 $u_m \in W$. 因此, 由(5)式和

$$J(u_m) \geqslant \frac{1}{2} \| \nabla u_m \|^2 - \frac{1}{p + 1} \sum_{k=1}^{l} a_k \| u_m \|_{p_k+1}^{p_k+1} =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p + 1} \right) \| \nabla u_m \|^2 + \frac{1}{p + 1} I(u_m) \geqslant \frac{p - 1}{2(p + 1)} \| \nabla u_m \|^2,$$

可得对于充分大的 m 有

$$\frac{1}{2} \| u_{mt} \|^2 + \frac{p - 1}{2(p + 1)} \| \nabla u_m \|^2 < d, \qquad 0 \leqslant t < \infty, \tag{6}$$

(6) 式给出

$$\| \nabla u_m \|^2 < \frac{2(p+1)}{p-1} d, \qquad 0 \leqslant t < \infty, \tag{7}$$

$$\| u_m \|_{p_k+1}^2 \leqslant C_k^2 \| \nabla u_m \|^2 < C_k^2 \frac{2(p+1)}{p-1} d, \qquad 1 \leqslant k \leqslant l; 0 \leqslant t < \infty, \tag{8}$$

$$\| u_{mt} \|^2 < 2d, \qquad 0 \leqslant t < \infty. \tag{9}$$

由(7) 式至(9) 式和紧致性方法可得定理 11.

由定理 11 和定理 6 可得

推论 12 如果把定理 11 中的假设 $I(u_0) > 0$ 改为 $I_{\delta_2}(u_0) > 0$, 则问题(1) 至问题(3) 有整体弱解 $u(t) \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, $u_t(t) \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ 且 $u(t) \in W_\delta$, 对所有 $\delta_1 < \delta < \delta_2$, $0 \leqslant t < \infty$, 其中 $\delta_1 < \delta_2$ 是方程 $d(\delta) = E(0)$ 的两个根.

定理 13 如果把推论 12 中的假设"$I_{\delta_2}(u_0) > 0$ 或 $\| \nabla u_0 \| = 0$" 改为"$\| \nabla u_0 \| < r(\delta_2)$", 则问题(1) 至问题(3) 有整体弱解 $u(t) \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, $u_t(t) \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ 且满足

$$\| \nabla u \|^2 \leqslant \frac{E(0)}{a(\delta_1)}, \qquad \| u_t \|^2 < 2E(0); 0 \leqslant t < \infty. \tag{10}$$

证 首先由 $\| \nabla u_0 \| < r(\delta_2)$ 和引理 2 可得 $I_{\delta_2}(u_0) > 0$ 或 $\| \nabla u_0 \| = 0$. 则由推论 12 可得问题(1) 至问题(3) 有整体弱解 $u(t) \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, $u_t(t) \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ 且 $u(t) \in W_\delta$, 对 $\delta_1 < \delta < \delta_2$ 和 $0 \leqslant t < \infty$. 最后, 在

$$\frac{1}{2} \| u_t \|^2 + a(\delta) \| \nabla u \|^2 + \frac{1}{p+1} I_\delta(u) \leqslant \frac{1}{2} \| u_t \|^2 + J(u) = E(0)$$

中令 $\delta \to \delta_1$, 可得(10) 式.

定理 14 设 $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 若 $E(0) < d$, $I(u_0) < 0$. 则问题(1) 至问题(3) 的解的存在时间是有限的.

证 设 $u(t)$ 是问题(1) 至问题(3) 满足 $E(0) < d$, $I(u_0) < 0$ 的任一解, T 是 $u(t)$ 的存在时间. 我们证明 $T < \infty$. 若不然, 则 $T = +\infty$. 设 $F(t) = \| u(t) \|^2$. 则 $\dot F(t) = 2(u_t, u)$,

$$\ddot F(t) = 2 \| u_t \|^2 + 2(u_{tt}, u) = 2 \| u_t \|^2 - 2I(u). \tag{11}$$

因此

$$\begin{aligned} \ddot F(t) &\geqslant 2 \| u_t \|^2 - 2 \| \nabla u \|^2 + 2(p+1) \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{p_k+1} \| u \|_{p_k+1}^{p_k+1} = \\ &(p+3) \| u_t \|^2 + (p-1) \| \nabla u \|^2 - 2(p+1) E(0) \geqslant \\ &(p+3) \| u_t \|^2 + (p-1) \lambda_1 F(t) - 2(p+1) E(0), \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\lambda_1 > 0$ 是问题 $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ 的第一特征值.

(i) 若 $0 < E(0) < d$, 则由定理 6 可得 $u(t) \in V_\delta$, 于 $\delta_1 < \delta < \delta_2$, $t > 0$, 其中 $\delta_1 < \delta_2$ 是方程 $d(\delta) = E(0)$ 的两个根. 因此 $I_\delta(u) < 0$ 且(由引理 3) $\| \nabla u \| > r(\delta)$, 于 $1 < \delta < \delta_2$, $t > 0$. 进而有 $I_{\delta_2}(u) \leqslant 0$ 且 $\| \nabla u \| \geqslant r(\delta_2)$, $t > 0$. 再由(11) 式可得

$$\ddot F(t) \geqslant 2(\delta_2 - 1) \| \nabla u \|^2 - 2I_{\delta_2}(u) \geqslant 2(\delta_2 - 1) r^2(\delta_2) > 0, \qquad t \geqslant 0,$$

$$\dot F(t) \geqslant 2(\delta_2 - 1) r^2(\delta_2) t + \dot F(0), \qquad t \geqslant 0,$$

这表明存在一 $t_0 \geqslant 0$ 使

$$\dot F(t) \geqslant \dot F(t_0) > 0,$$
$$F(t) \geqslant \dot F(t_0)(t - t_0) + F(t_0), \qquad t \geqslant t_0.$$

因此对于充分大的 t 有$(p-1)\lambda_1 F(t) > 2(p+1)E(0)$ 及

$$\ddot F(t) > (p+3)\|u_t\|^2. \tag{13}$$

最后,由(13)式可得(参看文献[2]293)

$$F(t)\ddot F(t) - \frac{p+3}{4}(\dot F(t))^2 \geqslant (p+3)(\|u\|^2\|u_t\|^2 - (u, u_t)^2) \geqslant 0, \tag{14}$$

$$(F^{-\alpha}(t))'' = -\frac{\alpha}{F^{\alpha+2}(t)}(F(t)\ddot F(t) - (\alpha+1)(\dot F(t))^2) \leqslant 0, \qquad \alpha = \frac{p-1}{4}.$$

从而对于充分大的 t, $F^{-\alpha}(t) > 0$, $F^{-\alpha}(t)$ 是单调减少的和凹的. 因此,存在一 $T_1 > 0$ 使

$$\lim_{t \to T_1} F^{-\alpha}(t) = 0, \quad \lim_{t \to T_1} F(t) = +\infty,$$

这与 $T = +\infty$ 矛盾.

(ii) 若 $E(0) \leqslant 0$,则由(12)式可以立即得出(13)式. 因 $I(u_0) < 0$ 蕴含 $\|\nabla u_0\| \neq 0$, 定理 10 给出 $u(t) \in V_\delta$, 于 $0 < \delta < (p+1)/2$. 如果把(i)中"$1 < \delta < \delta_2$"改为"$1 < \delta < (p+1)/2$". 则其余部分的证明与(i)中的证明相同.

4 具有临界初始条件 $I(u_0) \geqslant 0$, $E(0) = d$ 的问题(1)至问题(3)

定理 15 设 $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 若 $E(0) = d$, $I(u_0) \geqslant 0$. 则问题(1)至问题(3)存在一个整体弱解 $u(t) \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, $u_t(t) \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ 且 $u(t) \in \bar W = W \cup \partial W$, $\forall 0 \leqslant t < \infty$.

证 分以下两种情况(i)和(ii)证明整个定理.

(i) $\|\nabla u_0\| \neq 0$.

设 $\lambda_m = 1 - 1/m$, $u_{0m}(x) = \lambda_m u_0(x)$, $m = 2, 3, \cdots$. 考虑初始条件

$$u(x, 0) = u_{0m}(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \tag{15}$$

和相应的问题(1)、问题(15)、问题(3). 由 $I(u_0) \geqslant 0$ 和引理 1 可得 $\lambda = \lambda(u_0) \geqslant 1$. 因此有 $I(u_{0m}) > 0$,

$$J(u_{0m}) \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|^2 - \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{l} a_k \|u_{0m}\|_{p_k+1}^{p_k+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|\nabla u_{0m}\|^2 + \frac{1}{p+1}I(u_{0m}) > 0$$

及

$$0 < E_m(0) \equiv \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + J(u_{0m}) < \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + J(u_0) = E(0) = d.$$

故由定理 11 可得,对每一个 m,问题(1)、问题(15)、问题(3)有一个整体弱解 $u_m(t) \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, $u_{mt} \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$, $u_m(t) \in W$, $0 \leqslant t < \infty$,

$$(u_{mt}, v) + \int_0^t (\nabla u_m, \nabla v)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t (f(u_m), v)\,\mathrm{d}\tau + (u_1, v),$$
$$v \in H_0^1(\Omega), \ 0 \leqslant t < \infty \tag{16}$$

及

$$\|u_{mt}\|^2/2 + J(u_m) = E_m(0) < d. \tag{17}$$

由(17)式和

$$J(u_m) \geqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|\nabla u_m\|^2+\frac{1}{p+1}I(u_m) \geqslant \frac{p-1}{2(p+1)}\|\nabla u_m\|^2,$$

可得

$$\|\nabla u_m\|^2 \leqslant \frac{2(p+1)}{p-1}d, \qquad 0 \leqslant t < \infty.$$

$$\|u_m\|_{p_k+1} \leqslant C_k\|\nabla u_m\| \leqslant C_k\left(\frac{2(p+1)}{p-1}d\right)^{1/2}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant l, 0 \leqslant t < \infty$$

及 $$\|u_{mt}\|^2 \leqslant 2d, \qquad 0 \leqslant t < \infty.$$

其余部分的证明与定理 11 中的证明类似.

(ii) $\|\nabla u_0\| = 0$.

$\|\nabla u_0\| = 0$ 意味 $J(u_0) = 0$ 及 $\|u_1\|^2/2 = E(0) = d$. 设 $\lambda_m = 1 - 1/m$, $u_{1m}(x) = \lambda_m u_1(x)$, $m = 2, 3, \cdots$.

考虑初始条件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_{1m}(x) \tag{18}$$

和相应的问题(1)、问题(18)、问题(3). 由 $\|\nabla u_0\| = 0$,

$$0 < E_m(0) = \|u_{1m}\|^2/2 + J(u_0) = \|\lambda_m u_1\|^2/2 < E(0) = d$$

和定理 11 可得, 对每一个 m 问题(1)、问题(18)、问题(3) 有一个整体弱解 $u_m(t) \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega))$, $u_{mt}(t) \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$ 及 $u_m(t) \in W$, $0 \leqslant t < \infty$, 且满足(16)式和(17)式. 其余部分的证明与该定理的第(i)部分的证明相同.

5 结 论

本文研究了一类非线性波动方程整体界的存在性与不存在性的问题. 利用位势井族的性质, 得到了不变集合和真空隔离行为. 接着, 给出了整体存在与不存在的锐利条件. 根据位势井族的特殊性质, 具有相同非线性源项的反应扩散方程也可以通过此方法得到解决.

致谢 感谢哈尔滨工程大学基础研究基金项目(HEUF04012)的资助

[参 考 文 献]

[1] Sattinger D H. On global solution of nonlinear hyperbolic equations[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1968, **30**: 148-172.

[2] Payne L E, Sattinger D H. Sadle points and instability of nonlinear hyperbolic equations[J]. *Israel Journal of Mathematics*, 1975, **22**: 273-303.

[3] Tsutsumi M. On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space[J]. *Math Japan*, 1972, **17**: 173-193.

[4] LIU Ya-cheng. On potential wells and vacuum isolating of solutions for semilinear wave equations [J]. *Journal of Differential Equations*, 2003, **192**(1): 155-169.

[5] LIU Ya-cheng, ZHAO Jun-sheng. Multidimensional viscoelasticity equations with nonlinear damping and source terms[J]. *Nonlinear Analysis*, 2004, **56**(6): 851-865.

[6] LIU Ya-cheng, ZHAO Jun-sheng. Nonlinear parabolic equations with critical initial conditions $J(u_0) = d$ or $I(u_0) = 0$[J]. *Nonlinear Analysis*, 2004, **58**(7/8): 873-883.

[7] Tsutsumi M. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations[J].

Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 1972/1973, **8**: 211-229.

[8] Lions J L. Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Nonlinéaires[M]. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969.

[9] Ikehata R. Some remarks on the wave equations with nonlinear damping and source terms[J]. Nonlinear Analysis, 1996, **27**(10): 1165-1175.

[10] Nakao N, Ono K. Existence of global solutions to the Cauchy problem for the semilinear dissipative wave equations[J]. Mathematische Zeitschrift, 1993, **214**(2): 325-342.

[11] Marcelo M, Cavalcanti, Valéria N. Domingos Cavalcanti, Existence and asymptotic stability for evolution problems on manifolds with damping and source terms[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, **291**(1): 109-127.

[12] Marcelo M, Cavalcanti, Valéria N, Domingos Cavalcanti, Patrick Martinez. Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term[J]. Journal of Differential Equations, 2004, **203**(1): 119-158.

[13] Zhang J. On the standing wave in coupled non-linear Klein-Gordon equations[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2003, **26**(1): 11-25.

[14] Vitillaro E. A potential well theory for the wave equation with nonlinear source and boundary damping terms[J]. Glasgow Mathematical Journal, 2002, **44**(3): 375-395.

[15] Ono K. On global existence, asymptotic stability and blowing up of solutions for some degenerate non-linear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation[J]. Mathematical Methods inthe Applied Sciences, 1997, **20**(2): 151-177.

Wave Equations With Several Nonlinear Source Terms

LIU Ya-cheng, XU Run-zhang, YU Tao

(College of Science, Harbin Engineering University, Harbin 150001, P.R. China)

Abstract: The initial boundary value problem of nonlinear wave equations with several nonlinear source terms in a bounded domain is studied by potential well method. The structure of potential wells and some properties of depth function of potential well are given. The invariance of some sets under the flow of these problems and the vacuum isolating of solutions are obtained by introducing a family of potential wells, which indicates that if initial value of the problem belongs to potential well or its outside, all the solutions for the problem are in the same potential well or its outside respectively in any time. At the same time, there exists a region, in which there are no any solutions. Then the threshold result of global existence and nonexistence of solutions are given. Finally the problems with critical initial conditions are discussed.

Key words: wave equation; potential well; global existence; nonexistence