

饱和地基上弹性基础的竖向 振动特性研究*

王国才, 王 哲, 孟凡丽

(浙江工业大学 建筑工程学院, 杭州 310014)

(郭兴明推荐)

摘要: 采用解析的方法研究了饱和地基上受一简谐竖向荷载作用下弹性基础的动力响应. 在分析中, 首先利用积分变换技术获得了饱和介质基本控制方程的变换解, 然后基于基础-半空间完全放松接触、半空间表面完全透水或不透水的假设, 建立了该动力混合边值问题的对偶积分方程, 并把该对偶积分方程进一步化为易于数值求解的第二类 Fredholm 积分方程. 文末数值算例给出了动力柔度系数、位移和孔隙水压力随振动频域和土-基础体系物理力学参数特性的变化曲线. 结果表明: 饱和地基上弹性基础的动力响应完全不同于饱和地基上刚性圆板的动力响应. 所用方法可用于研究波的传播、土-结构动力相互作用等许多问题.

关键词: 饱和地基; 弹性基础; 竖向振动; 动柔度; 对偶积分方程

中图分类号: TU476 文献标识码: A

引 言

对土-结构动力相互作用问题尤其是地震、机器振动等的研究, 确定基础的动柔度是非常重要的. Lamb^[1] 首先深入地研究了半空间表面或内部作用一集中力时弹性半空间的动力响应. 如果该集中荷载被换为一振动的刚性圆板, 则该问题将变为混合边值问题.

对土与基础动力相互作用问题, 国内外许多学者视半空间为理想弹性介质进行了相当多的研究工作. 在分析中, 多种方法如积分变换法、Green 函数法以及数值方法如有限单元法等被广泛采用^[2-5]. 然而, 把半空间视为理想弹性固体的假设并不符合实际情况, 此时如若假设其为两相饱和介质将更加符合实际. 1956 年 Biot^[6] 首先建立了流体饱和多孔介质中波的传播理论. 从那以后, 许多学者采用该理论重新研究了土与基础动力相互作用问题^[7-11].

一般来说, 基础总是有一定的高度和弹性, 而不能将其视为一理想的刚性圆板. 从工程实用角度出发, 此时如若把基础看作是一弹性体, 把半空间看作是一饱和两相介质将更加合理, 更加符合实际情况. 从本文第一作者所掌握的国内外文献资料来看, 对于饱和地基上弹性基础的竖向振动解答还未见报道. 为此, 本文的主要目的就是求解该问题, 获得饱和地基上弹性基础竖向振动的半解析解, 分析其与饱和地基上刚性圆板动力响应的差别. 在分析中, 首先采

* 收稿日期: 2007-03-13; 修订日期: 2007-07-09

基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目(Y105480); 浙江省教育厅基金资助项目(20051414)

作者简介: 王国才(1971—), 男, 安徽天长人, 副教授(联系人. Tel: + 86-571-88320460; Fax: + 86-571-88320124; E-mail: wanggzjt@hotmail.com).

用 Hankel 变换技术获得控制方程的解析解. 然后, 基于基础与半空间是完全放松接触、半空间表面完全透水或不透水的假设, 建立了该动力混合边值问题的对偶积分方程, 并进一步将其化为易于数值求解的第二类 Fredholm 积分方程. 文末数值结果表明影响基础动力响应的主要因素是饱和土-基础体系的物理力学参数和所施加的荷载, 其动力响应完全不同于饱和地基上刚性圆板的动力响应. 本文所用方法可用来研究波的传播、土-结构动力相互作用等许多问题, 所得结论对实际工程有一定的指导意义.

1 控制方程的基本解

一半径为 r_0 、高为 h 的弹性基础置于饱和半空间表面, 基础中心承受竖向简谐荷载 $P e^{i\omega t}$ 的作用 (ω 为振动圆频率、 t 为时间、 $i = \sqrt{-1}$), 饱和半空间本构方程采用 Biot 理论, 其力学模型如图 1 所示.

在圆柱坐标系下, 考虑小变形情况下的均质各向同性饱和土体的基本微分方程可写成 (Biot^[12], 1962):

$$\mu \cdot \ddot{u}_r + (\lambda_c + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} - \mu \frac{u_r}{r^2} - \alpha M \frac{\partial \xi}{\partial r} = \rho_i \ddot{u}_r + \rho_l \ddot{w}_r, \quad (1a)$$

$$\mu \cdot \ddot{u}_z + (\lambda_c + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} - \alpha M \frac{\partial \xi}{\partial z} = \rho_i \ddot{u}_z + \rho_l \ddot{w}_z, \quad (1b)$$

$$\alpha M \frac{\partial e}{\partial r} - M \frac{\partial \xi}{\partial r} = \rho_l \ddot{u}_r + m \ddot{w}_r + b w_r, \quad (1c)$$

$$\alpha M \frac{\partial e}{\partial z} - M \frac{\partial \xi}{\partial z} = \rho_l \ddot{u}_z + m \ddot{w}_z + b w_z, \quad (1d)$$

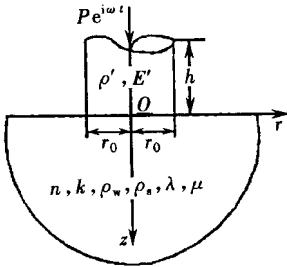


图 1 力学模型

式中, u_r 和 u_z 分别为固相的径向和竖向位移; w_r 和 w_z 分别为液相相对于固相的径向和竖向位移; e 和 ξ 分别为固相和液相相对于固相的体应变; λ, μ 为 Lamé 常数, $\lambda_c = \lambda + \alpha^2 M$, α 和 M 为描述两相饱和水介质压缩性的 Biot 参数 ($\alpha = 1$ 和 $M = \infty$ 分别表示不可压缩流体和不可压缩固体材料); $m = c\rho_l/n$ 是一个取决于孔隙比 n 、流体质量密度 ρ_l 和试验计算参数 c 的 Biot 参数; $\rho = n\rho_l + (1-n)\rho_s$ 为饱和土的质量密度, ρ_s 是土颗粒的质量密度; $b = \eta/k$, η 是流体的粘滞系数, k 为土体的渗透系数.

根据 Biot 理论^[12], 土体的应力可分为有效应力和孔隙水压力两部分:

$$\sigma_i = \dot{\sigma}_i - \alpha P_f \quad (i = r, \theta, z), \quad (2a)$$

$$\tau_{rz} = \dot{\tau}_{rz}, \quad (2b)$$

这里, 孔隙水压力 P_f 、固相和液相相对于固相的体应变分别为:

$$P_f = -\alpha M e + M \xi, \quad (3)$$

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \xi = - \left(\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right), \quad (4a, b)$$

而土颗粒的应力-位移关系可写成:

$$\dot{\sigma}_r = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \dot{\sigma}_\theta = \lambda e + 2\mu \frac{u_r}{r}, \quad (5a, b)$$

$$\dot{\sigma}_z = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \dot{\tau}_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (5c, d)$$

为便于分析, 引入无量纲参数和变量:

$$r = \frac{r}{r_0}, z = \frac{z}{r_0}, u_r = \frac{u_r}{r_0}, u_z = \frac{u_z}{r_0}, w_r = \frac{w_r}{r_0}, w_z = \frac{w_z}{r_0}, \lambda = \frac{\lambda}{\mu}, \lambda_c = \frac{\lambda_c}{\mu},$$

$$M = \frac{M}{\mu}, \rho_f = \frac{\rho_f}{\rho}, a = r_0 \omega \sqrt{\rho/\mu}, m = \frac{m}{\rho}, b = r_0 b / \sqrt{\rho\mu},$$

$$P_f = \frac{P_f}{\mu}, \alpha_z = \frac{\alpha_z}{\mu}, \tau_{zr} = \frac{\tau_{zr}}{\mu}.$$

这里, a 表示无量纲频率, r_0 是弹性基础的半径.

对式(1)至式(5)引入无量纲量并进行相应阶的Hankel变换后,可得

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - p^2 \right] u_z^0 + (\lambda_c + 1) \frac{de^0}{dz} - \alpha M \frac{d\xi^0}{dz} = -a^2 u_z^0 - \rho_f a^2 w_z^0, \quad (6a)$$

$$\alpha M \frac{de^0}{dz} - M \frac{d\xi^0}{dz} = -\rho_f a^2 u_z^0 - ma^2 w_z^0 + ibaw_z^0, \quad (6b)$$

$$(\lambda_c + 2) \left[\frac{d^2}{dz^2} e^0 - p^2 e^0 \right] - \alpha M \left[\frac{d^2}{dz^2} \xi^0 - p^2 \xi^0 \right] = -a^2 e^0 + \rho_f a^2 \xi^0, \quad (6c)$$

$$\alpha M \left[\frac{d^2}{dz^2} e^0 - p^2 e^0 \right] - M \left[\frac{d^2}{dz^2} \xi^0 - p^2 \xi^0 \right] = -\rho_f a^2 e^0 + ma^2 \xi^0 - iba \xi^0, \quad (6d)$$

$$P_f^0 = -\alpha M e^0 + M \xi^0, \quad (7)$$

$$\sigma_z^0(p, z) = \lambda e^0 + 2 \frac{\partial u_z^0}{\partial z} - \alpha P_f^0, \quad \tau_{zr}^1(p, z) = \frac{\partial u_r^1}{\partial z} - pu_z^0, \quad (8a, b)$$

$$u_r^1(p, z) = \frac{1}{p} \left[e^0 - \frac{\partial u_z^0}{\partial z} \right], \quad w_r^1(p, z) = \frac{1}{p} \left[-\xi^0 - \frac{dw_z^0}{dz} \right], \quad (9a, b)$$

这里, $f^V(p, z)$ 表示变量 $f(r, z)$ 的 V 阶 Hankel 变换, p 是变换参数.

考虑到波的辐射条件后, 求解常微分方程式(6a)至式(6d), 得

$$e^0 = -p_1^2 A_1 e^{-\alpha z} - p_2^2 A_2 e^{-dz}, \quad \xi^0 = \delta_1 p_1^2 A_1 e^{-\alpha z} + \delta_2 p_2^2 A_2 e^{-dz}, \quad (10a, b)$$

$$u_z^0 = -c A_1 e^{-\alpha z} - d A_2 e^{-dz} + p^2 A_3 e^{-jz}, \quad (10c)$$

$$w_z^0 = -c \delta_1 A_1 e^{-\alpha z} - d \delta_2 A_2 e^{-dz} + p^2 \delta_3 A_3 e^{-jz}, \quad (10d)$$

将式(10a)至式(10d)代入式(7)至式(9), 有

$$u_r^1 = -p A_1 e^{-\alpha z} - p A_2 e^{-dz} + pj A_3 e^{-jz}, \quad (11a)$$

$$w_r^1 = -p(\delta_1 A_1 e^{-\alpha z} + \delta_2 A_2 e^{-dz} - j \delta_3 A_3 e^{-jz}), \quad (11b)$$

$$\sigma_z^0 = [2c^2 - (\lambda + \alpha^2 M + \alpha M \delta_1) P_1^2] A_1 e^{-\alpha z} + [2d^2 - (\lambda + \alpha^2 M + \alpha M \delta_2) P_2^2] A_2 e^{-dz} - 2pj A_3 e^{-jz}, \quad (12a)$$

$$\tau_{zr}^1 = 2pc A_1 e^{-\alpha z} + 2pd A_2 e^{-dz} - p(p^2 + j^2) A_3 e^{-jz}, \quad (12b)$$

$$P_f^0 = -P_1^2 M(\alpha + \delta_1) A_1 e^{-\alpha z} - P_2^2 M(\alpha + \delta_2) A_2 e^{-dz}, \quad (12c)$$

式中

$$c^2 = p^2 - p_1^2, \quad d^2 = p^2 - p_2^2, \quad j^2 = p^2 - s^2, \quad p_1^2 = \frac{1}{2}(\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_2}),$$

$$p_2^2 = \frac{1}{2}(\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_2}), \quad s^2 = \frac{iba^2 - (m - \rho_f^2)a^3}{ib - ma},$$

$$\delta_i = [a^2 - \alpha \rho_f a^2 - (\lambda + 2) P_i^2] / \kappa, \quad (i = 1, 2); \quad \delta_3 = [a^2 - \alpha \rho_f a^2 - s^2] / \kappa,$$

$$\beta_1 = \frac{a^2 - \alpha \rho_f a^2 + \alpha \kappa}{\lambda + 2} + \frac{ma^2 - iba}{M}, \quad \beta_2 = \frac{(m - \rho_f^2)a^4 - iba^3}{M(\lambda + 2)},$$

$$\kappa = \alpha ma^2 - \rho_f a^2 - iba.$$

为保证 $z \rightarrow \infty$ 时波的辐射条件, c, d 和 j 的实部必须大于 0, 即 $Re c > 0, Re d > 0$ 和 $Re j >$

0. p_1 和 p_2 分别对应于第一压缩波和第二压缩波的无量纲复波数, s 对应于剪切波的无量纲复波数. A_1, A_2 和 A_3 为积分常数, 可由边界条件确定.

2 对偶积分方程的建立

土-基础动力相互作用问题属于混合边值问题. 假设基础和半空间接触面是完全放松的, 即接触面光滑无摩擦、接触面位移连续, 接触面外的应力自由; 同时, 还假设饱和半空间表面完全透水或不透水. 对于透水情况(称为排水条件), 假设半空间表面的孔隙水压力为 0, 而对于不透水情况(称为不排水条件)则假设液相相对于固相的竖向位移为 0. 对于更复杂的接触面排水情况将要考虑到液相和气相的相互作用, 这里我们不作研究. 因此, 半空间表面 ($z = 0$) 的无量纲边界条件可表示为:

$$u_z(r, 0) = w'(0) \quad (0 \leq r \leq 1), \quad (13a)$$

$$\tau_{rz}(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (13b)$$

$$\alpha_z(r, 0) = 0 \quad (1 \leq r < \infty), \quad (13c)$$

对于排水条件:

$$P_t(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (14)$$

而对于不排水条件:

$$w_z(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (15)$$

这里, $w' = w'/r_0$; $w'(z)$ 是弹性基础的变形, 满足下列关系(Bishop, Johnson^[13], 1979):

$$E' \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = \rho' \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2}, \quad (16)$$

式中, ρ' 和 E' 分别表示弹性基础的质量密度和弹性模量.

考虑到简谐振动, 求解式(16), 有

$$w' = B_1 \cos \delta \alpha z + B_2 \sin \delta \alpha z, \quad (17)$$

其中, $\delta = \sqrt{(\rho' \mu)/(\rho E')}$, B_1 和 B_2 为积分常数, 由边界条件确定.

对弹性基础, 考虑到边界条件 ($z = -h$), 有如下的等式

$$w' = w_0, \quad P = A \sigma', \quad (18a, b)$$

这里, $\sigma' = E' (\partial w' / \partial z)$, $h = h/r_0$, $w_0 = w_0/r_0$, w_0 是施加的位移幅值, A 是基础的横截面面积.

结合式(10c)、式(12)至式(15)和式(17)和式(18), 并经过一系列繁琐的推导, 可得如下对偶积分方程:

$$\int_0^\infty p^{-1} (1 + H(p)) B(p) J_0(pr) dp = \left[\frac{P \delta_s \sin \delta a h}{\pi \rho' a} + w_0 \cos \delta a h \right] \Big|_l \quad (0 \leq r \leq 1), \quad (19a)$$

$$\int_0^\infty B(p) J_0(pr) dp = 0 \quad (1 < r < \infty). \quad (19b)$$

对于排水条件:

$$f(p) = \frac{s^2 (da_1 - ca_2)}{[(2d^2 - \mathcal{N}p^2)(p^2 + j^2) - 4p^2 dj] a_1 - [(2c^2 - \mathcal{N}p^2)(p^2 + j^2) - 4p^2 gj] a_2},$$

而对于不排水条件:

$$f(p) = \frac{cds^2 (\delta_1 - \delta_2)}{de_2(2c^2 - b_1) - ce_1(2d^2 - b_2) - 4p^2 cdj (\delta_1 - \delta_2)},$$

这里

$$a_i = (\alpha + \delta_i) P_i^2, \quad b_i = (\lambda + \alpha^2 M + \alpha M \delta_i) P_i^2, \quad e_i = 2p^2 \delta_3 - \delta_i(p^2 + j^2), \quad (i = 1, 2);$$

$$P = P / (\mu r_0^2), \quad \sigma = \sigma' / \mu, \quad E' = E' / \mu, \quad \rho = \rho' / \rho,$$

$$l = \lim_{p \rightarrow \infty} pf(p) = - (2 + \lambda) / (2 + 2\lambda), \quad H(p) = pf(p) / l - 1.$$

上述对偶积分方程(19a)和方程(19b)的解已由 Erdelyi 和 Sneddon^[14] 及 Noble^[15] 解出. 根据 Noble^[15] 的解法, 定义如下的积分关系式:

$$B(p) = \frac{2pw_0}{\pi l} \int_0^\infty \theta(t) \cos(pt) dt. \tag{20}$$

将式(20)代入式(19a)和式(19b), 式(19b)自动满足, 而式(19a)等价于如下的积分方程:

$$\theta(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K'(t, \tau) \theta(\tau) d\tau = \frac{P \delta_3 \sin \delta ah}{\pi \rho' a w_0} + \cos \delta ah, \tag{21}$$

这里, $K'(t, \tau) = \int_0^\infty H(p) \cos(pt) \cos(p\tau) dp$.

考虑到基础的侧面没有外力作用, 有

$$E' \int_0^l r \left[\frac{\partial w'}{\partial z} \right]_{z=0} dr + \int_0^l r \alpha_z(r, 0) dr = 0. \tag{22}$$

将式(17)、式(20)和式(22)代入式(21), 可建立如下第二类 Fredholm 积分方程:

$$\theta(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K(t, \tau) \theta(\tau) d\tau = \frac{1}{\cos \delta ah}, \tag{23}$$

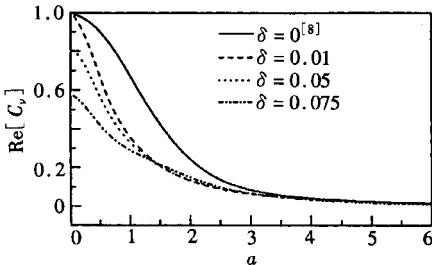
这里, 核函数 $K(t, \tau) = K'(t, \tau) + (2 \delta \operatorname{tg} \delta ah) / (\rho' al)$.

在上面的理论推导中, 如令 $\delta = 0, h = 0$, 并且忽略固-液相之间的惯性耦合, 则上述问题可退化到饱和地基上一无质量刚性圆板的竖向振动(Bo, Hua^[8]). 因此饱和地基上刚性圆板的竖向振动是本文所述弹性基础竖向振动的一个特例.

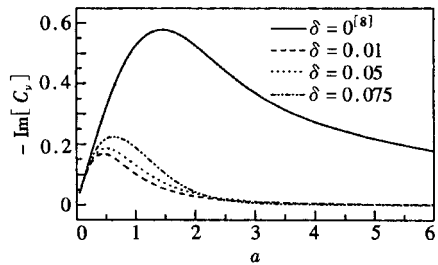
记弹性基础的静竖向位移 $w_0' = -Pl/4$, 则弹性基础的动柔度系数和竖向位移可表示为

$$C_v = \frac{w_0}{w_0'} = \frac{1}{-\frac{l}{4} \pi \rho' a \operatorname{tg} \delta ah + \left(\int_0^\infty \theta(t) dt \right) \sqrt{(\cos \delta ah)}}, \tag{24}$$

$$\frac{w_0'}{w_0} = \frac{1}{\cos \delta ah} - \left(4 \delta \operatorname{tg} \delta ah \int_0^\infty \theta(t) dt \right) \sqrt{(\pi \rho' al)}. \tag{25}$$



(a) $\operatorname{Re}[C_v] \sim a$



(b) $-\operatorname{Im}[C_v] \sim a$

图2 排水情况下的动柔度系数与振动频率的关系

3 数值算例

第二类 Fredholm 积分方程式(23)可采用梯形积分公式将其化为区间[0, 1]上的线性代数方程组并进行求解. 获得式(23)的解后, 就可用式(24)和式(25)计算基础随无量纲振动频率的动力响应. 在本节给出的数值算例中, 取饱和地基土和弹性基础的无量纲物理力学参数为:

$h = 2.0, \alpha = 0.97, \beta = 1.21, \rho_f = 0.53, m = 1.1, M = 10.0, \lambda = 1.5$ 和 $b = 10.0$. 为了进一步分析基础刚度对动力响应的影响, 我们分别对无量纲参数 δ 取了 4 个值, 即 $\delta = 0.0, \delta = 0.01, \delta = 0.05$ 和 $\delta = 0.075$. δ 的值反映基础相对于半空间的刚度, 基础越硬, 则 δ 的值越小.

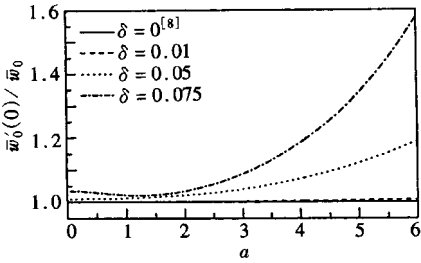
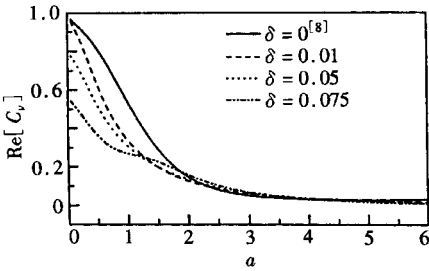
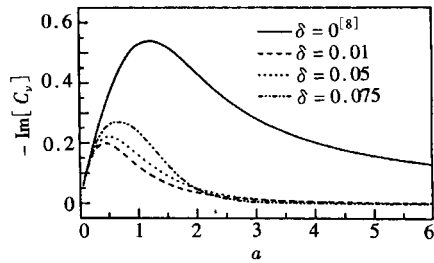


图3 排水情况下基础的竖向位移

图2和图3给出了排水条件下弹性基础的动柔度系数和竖向位移随无量纲频率 a 的变化情况. 从图2可看出 C_v 的实部随无量纲频率 a 的增大而减小, 而其虚部开始随振动频率 a 的增大而增大, 经过峰值后开始减小. 从图2还可看出: 对于不同的 δ 值, 随振动频率 a 的增大, C_v 的实部和虚部的变化规律与刚性情况 ($\delta = 0.0$) 类似, 但都比刚性基础 ($\delta = 0.0$) 的为小.



(a) $Re[C_v] \sim a$



(b) $Im[C_v] \sim a$

图4 不排水情况下的动柔度系数与振动频率的关系

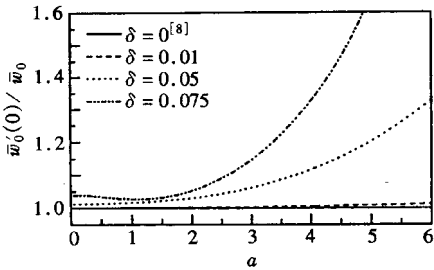


图5 不排水情况下基础的竖向位移

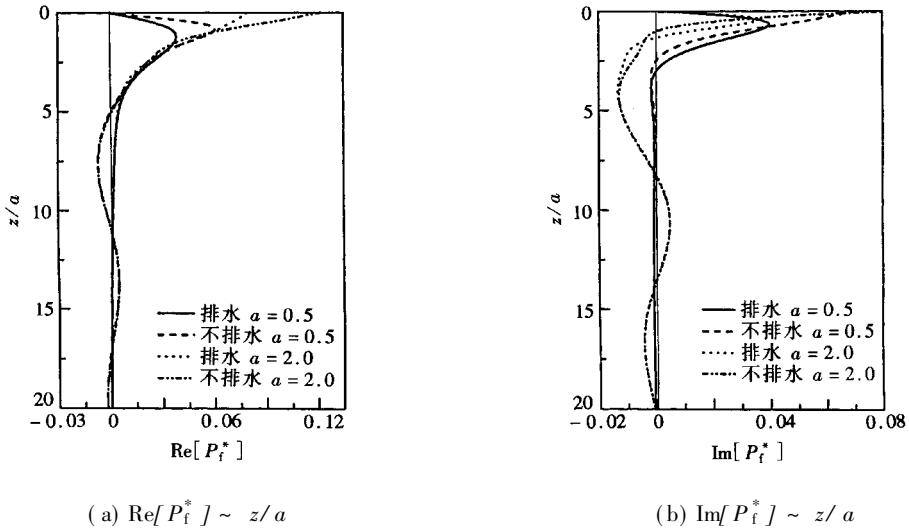
从图2还可发现基础的弹性对动力柔度系数的影响主要集中在低频范围内 ($a \leq 3.0$). 当频率 $a > 3.0$ 时, 对于不同的 δ 值动柔度系数曲线几乎完全重合.

从图3可更清晰地看出不排水条件下基础的弹性对动力响应的影响. 随着 δ 的值从0开始增大, 弹性基础的位移曲线立即互相分开. δ 和 a 的值越大, 曲线分开的更加明显.

图4和图5是不排水条件下的计算结果. 从图4和图5可看出: 基础动力响应的变化趋势和排水条件下的变化趋势是类似的, 但其数值不同于排水条件. 不排水条件下基础的弹性对动力响应的影响要大于排水条件, 尤其当基础刚度较小时.

为了进一步揭示地基土表面的排水条件对基础动力响应的影响, 我们还计算了孔隙水压力随深度的变化情况. 图6给出了无量纲孔隙水压力 P_f^* ($= P_f/P$) 沿 z 轴的产生和消散过程. 正如预料的一样, 在低频段 ($a = 0.5$), 排水情况下孔隙水压力随深度的增大从0逐渐增大到峰值后快速消散, 而对于不排水情况则随深度的增大从最大值迅速消散. 随着振动频率的增大 (如达到 $a = 2.0$), 孔隙水压力沿深度则出现振荡现象, 尤其对于不排水情况, 此现象更加明显. 这可解释为对于不排水情况可导致固-液相之间相对摩擦和流体粘滞性的增大从而导致孔隙水压力的增大.

上述这些差异可归因于3种波(2个压缩波和1个剪切波)的传播和衰减、土颗粒间的相

图6 孔隙水压力随深度 z 的变化

互摩擦、孔隙流体的粘滞性、弹性基础的变形、边界排水条件和所施加的荷载。在分析基础竖向振动的动力响应时,所有这些影响因素是不能忽略而不加考虑的。

4 结 论

本文采用解析的方法分析了均质饱和地基上弹性基础在竖向荷载作用下的动力响应。在分析中,把基础视为一弹性体、把半空间视为一三维多孔饱和介质建立了土与基础动力相互作用的第二类 Fredholm 积分方程。文末数值算例表明饱和多孔介质的物理力学参数、基础的弹性、排水条件和所施加的外荷载对基础的动力响应有重要的影响。这些影响可归因于3种波(2个压缩波和1个剪切波)的传播和衰减、土-基础的物理力学参数特性和所施加的荷载。

近些年来,饱和/部分饱和地基上基础动力响应问题的研究逐渐引起人们的重视,本文仅是对此课题的研究进行了一个初步尝试,对该课题仍需要采用解析、数值或试验的方法进行系统而深入的研究。希望本文的研究能促进人们对地基基础动力相互作用理论和工程实践的理解,以便花更多精力去研究该课题。

[参 考 文 献]

- [1] Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid [J]. Philos T Roy Soc A, Ser A, 1904, **203**: 1-42.
- [2] Meek J W, Wolf J P. Approximate Green's function for surface foundations[J]. J Geotech Eng, 1993, **119**(10): 1499-1514.
- [3] Vrettos C. Vertical and rocking impedances for rigid rectangular foundations on soils with bounded non-homogeneity[J]. Earthq Eng Struct D, 1999, **28**(12): 1525-1540.
- [4] Genes M C, Kocak S. Dynamic soil-structure interaction analysis of layered unbounded media via a coupled finite element/ boundary element/ scaled boundary finite element model[J]. Int J Numer Meth Enng, 2005, **62**(6): 798-823.
- [5] Barros P L A. Impedances of rigid cylindrical foundations embedded in transversely isotropic soils [J]. Int J Numer Anal Methods Geomech, 2006, **30**(7): 683-702.
- [6] Biot M A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid[J]. J Acoust Soc Am, 1956, **28**(2): 168-191.

- [7] Kassir M K, Xu J, Bandyopadhyay K. Rotatory and horizontal vibrations of a circular surface footing on a saturated elastic half space[J]. *Int J Solids Struct*, 1996, **33**(12): 265-281.
- [8] Bo J, Hua L. Vertical dynamic response of a disk on a saturated poroelastic half space[J]. *Soil Dyn Earthq Eng*, 1999, **18**(6): 437-443.
- [9] Chen L, Wang G. Torsional vibrations of elastic foundation on saturated media[J]. *Soil Dyn Earthq Eng*, 2002, **22**(3): 223-227.
- [10] Senjuntichai T, Sapsathiarn Y. Forced vertical vibration of circular plate in multilayered poroelastic medium[J]. *J Eng Mech-ASCE*, 2003, **129**(11): 1130-1141.
- [11] Wang G, Chen L, Song C. Finite-infinite element for dynamic analysis of axisymmetrically saturated composite foundations[J]. *Int J Numer Meth Engng*, 2006, **67**(7): 916-932.
- [12] Biot M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. *J Appl Phys*, 1962, **33**(4): 1482-1498.
- [13] Bishop R E D, Johnson D C. *The Mechanics of Vibration* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
- [14] Erdelyi A, Sneddon I N. Fractional integration and dual integral Equations [J]. *Can J Math*, 1962, **14**(4): 686-693.
- [15] Noble B. The solution of Bessel function dual integral equation by a multiplying-factor method[J]. *Proc Camb Phil Soc A*, 1963, **59**(2): 351-362.

Vertical Vibrations of Elastic Foundation Resting on Saturated Half-Space

WANG Guo-cai, WANG Zhe, MENG Fan-li

(School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University of Technology,
Hangzhou 310014, P. R. China)

Abstract: The dynamic response of an elastic foundation of finite height bonded to the surface of a saturated half-space is mainly concerned with. The foundation is subjected to time-harmonic vertical loadings. First, the transform solutions for the governing equations of the saturated media were obtained. Then, based on the assumption that the contact between the foundation and the half-space was fully relaxed and the half space was completely pervious or impervious, this dynamic mixed boundary-value problem can lead to dual integral equations, which can be further reduced to the Fredholm integral equations of the second kind and solved by numerical procedures. In the numerical examples, the dynamic compliances, displacements and pore pressure are developed for a wide range of frequencies and material/ geometrical properties of the saturated soil-foundation system. In most cases, the dynamic behavior of an elastic foundation resting on the saturated media significantly differs from that of a rigid disc on the saturated half-space. The solutions obtained can be used to study a variety of wave propagation problems and dynamic soil-structure interactions.

Key words: saturated medium; elastic foundation; vertical vibration; dynamic compliance; dual integral equation