

# 膜自由振动的多辛方法<sup>\*</sup>

胡伟鹏<sup>1</sup>, 邓子辰<sup>1,2</sup>, 李文成<sup>3</sup>

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023;

3. 西北工业大学 理学院, 西安 710072)

(岳珠峰推荐)

**摘要:** 基于 Hamilton 空间体系的多辛理论研究了膜自由振动问题, 讨论了构造复合离散多辛格式的方法, 并构造了一种典型的  $9 \times 3$  点半隐式多辛复合离散格式, 该格式满足多辛守恒律、能量守恒律和动量守恒律. 数值算例结果表明该多辛离散格式具有较好的长时间数值稳定性.

**关键词:** 多辛; 复合离散; Runge-Kutta 方法

**中图分类号:** O175.24      **文献标识码:** A

## 引 言

众所周知, Hamilton 系统具有一系列的几何特性, 其中最具吸引力的是其具有辛结构形式. 为了将这一理论应用于 Hamilton 体系下的偏微分方程求解, 学术界最近提出了多辛以及多辛积分方法等概念. 多辛是偏微分方程的几何特性, 而多辛积分方法正是保持偏微分方程这种几何特性的有效途径. 多辛积分方法的基本思想是设计一种在每一步迭代中保持偏微分方程的这种辛结构的数值方案. 基于这一理论, 许多保守型的偏微分方程, 如 Schrödinger 方程、KdV 方程等等, 都存在能够较好保持守恒律的多辛格式<sup>[1-4]</sup>, 但是对于空间是二维的偏微分方程, 由于不论是其多辛格式的构造还是其算法的实现都非常困难, 学术界很少讨论.

膜自由振动方程就是一个空间是二维的偏微分方程. 针对这一方程, 本文导出了其  $2+1$  维多辛形式及多种守恒律; 利用复合多辛格式构造方法, 独立地离散多辛偏微分方程组的各个方向, 复合这些多辛离散格式得到原偏微分方程的多辛算法. 对其离散, 得到相应的多辛算法, 并以 2 个典型的数值算例验证了多辛算法的有效性.

## 1 膜自由振动方程的几个守恒律

**考虑膜自由振动问题:**

\* 收稿日期: 2007-04-18; 修订日期: 2007-07-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572119; 10632030); 教育部新世纪优秀人才计划资助项目(NCEF-04-0958); 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目

作者简介: 胡伟鹏(1977—), 男, 湖北人, 博士(E-mail: huweipeng@mail.nwpu.edu.cn);

邓子辰(1964—), 男, 辽宁人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人, Tel: +86-29-88460403; E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn);

李文成(1978—), 男, 宁夏人, 博士.

$$\partial_{tt}u - c^2(\partial_{xx}u + \partial_{yy}u) = 0 \quad (x, y, t) \in u \subset R^3, \quad (1)$$

它具有典型的 Hamilton 体系下的多辛偏微分方程形式<sup>[1,2]</sup>:

$$\mathbf{M}\partial_t z + \mathbf{K}_1\partial_x z + \mathbf{K}_2\partial_y z = \cdot z S(z), \quad z \in R^d, \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{M}, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \in R^{d \times d}$  为反对称矩阵(可逆);  $S: R^d \rightarrow R$  是光滑函数, 为 Hamilton 函数, 膜自由振动方程(1)的多辛形式(2)推导过程如下:

引入正交动量:

$$v = \partial_{tt}u, \quad w = \partial_x u, \quad p = \partial_y u,$$

振动方程(1)就可以写成如下的偏微分方程形式:

$$-\partial_t v + c^2\partial_x w + c^2\partial_y p = 0, \quad \partial_t u = v, \quad -c^2\partial_x u = -c^2 w, \quad -c^2\partial_y u = -c^2 p. \quad (3)$$

定义状态变量  $z = [u, v, w, p]^T \in R^4$ , 就可以得到反对称矩阵:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以及 Hamilton 函数:

$$S(z) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}c^2(w^2 + p^2).$$

多辛形式(2)备受学术界关注的原因之一是其存在多辛守恒律. (2)式的多辛守恒律(CLS)为:

$$\partial_t \omega + \partial_x k_1 + \partial_y k_2 = 0 \quad (4)$$

其中  $\omega, k_1, k_2$  为外积<sup>[5]</sup>形式:

$$\omega = \frac{1}{2}dz \wedge \mathbf{M}dz, \quad k_1 = \frac{1}{2}dz \wedge \mathbf{K}_1 dz, \quad k_2 = \frac{1}{2}dz \wedge \mathbf{K}_2 dz.$$

对于膜振动方程(1), 多辛守恒律的具体形式为:

$$\partial_t (dv \wedge du) + c^2[\partial_x (du \wedge dw) + \partial_y (du \wedge dp)] = 0. \quad (5)$$

多辛形式(2)还存在局部能量守恒律(ECL)和局部动量守恒律(MCL). 其局部能量守恒律为:  $\partial_t e + \partial_x f_1 + \partial_y f_2 = 0$ , 其中能量密度  $e = S(z) - (1/2)z^T(\mathbf{K}_1\partial_x z + \mathbf{K}_2\partial_y z)$ , 能量通量  $f_1 = (1/2)z^T\mathbf{K}_1\partial_t z$ ,  $f_2 = (1/2)z^T\mathbf{K}_2\partial_t z$ .

对应于膜振动方程(1), 局部能量守恒律表述为:

$$\partial_t (v^2 - c^2 w^2 - c^2 p^2 - c^2 u \partial_x w - c^2 u \partial_y p + c^2 \partial_x u w + c^2 \partial_y u p) + c^2 \partial_x (-w \partial_t u + u \partial_t w) + c^2 \partial_y (-p \partial_t u + u \partial_t p) = 0. \quad (6)$$

多辛形式(2)的局部动量守恒律为:  $\sum_{i=1}^2 \partial_t h_i + (\partial_x g + \partial_y g) = 0$ , 其中:

$$h_1 = (1/2)z^T \mathbf{M} \partial_x z, \quad h_2 = (1/2)z^T \mathbf{M} \partial_y z, \quad g = S(z) - (1/2)z^T \mathbf{M} \partial_t z.$$

对应于膜振动方程(1), 局部动量守恒律表述为:

$$\partial_t [v(\partial_x u + \partial_y u) - u(\partial_x v + \partial_y v)] + (\partial_x + \partial_y)[v^2 + u \partial_t v - c^2 w^2 - c^2 p^2 - v \partial_t u] = 0. \quad (7)$$

## 2 复合多辛格式的构造

考虑二维相空间上标准的 Hamilton 系统:

$$\frac{dz}{dt} = J \cdot \dot{H}(z), \quad (8)$$

其中  $z$  为状态变量  $z = (p, q)^T$ ,  $J$  为 Jacobi 矩阵<sup>[6]</sup>  $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $H(z) \in C^\infty(R^2)$  为 Hamilton 函数.

假定 Hamilton 系统是可分的, 所谓可分的 Hamilton 系统, 是指该系统的 Hamilton 函数可以分成  $H(z) = H(p, q) = U(p) + V(q)$ .

这样, 可分的 Hamilton 系统的运动方程为:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} U_p' \\ V_q' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(q) \\ g(p) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其  $m$  级显辛格式为<sup>[4], [7]</sup>:

$$\begin{cases} (P^0, Q^0) = (p^k, q^k), \\ P^{i+1} = P^i + \Delta t e_{i+1} f(Q^i), & \text{当 } i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \\ Q^{i+1} = Q^i + \Delta t d_{i+1} g(P^i), & \text{当 } i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \\ (P^m, Q^m) = (p^{k+1}, q^{k+1}), \end{cases} \quad (10)$$

其中  $\Delta t$  是时间步长, 系数  $e_i, d_i$  满足阶条件<sup>[8-10]</sup>.

显然, 该格式满足辛条件, 即:

$$dp^{k+1} \wedge dq^{k+1} = dp^k \wedge dq^k,$$

同时, 系统 (9) 一个相容的  $m$  级 Runge-Kutta 格式为:

$$\begin{cases} z_{k+1} = z_k + h \sum_{i=1}^m b_i J \cdot \dot{H}(k_i), \\ k_i = z_k + h \sum_{j=1}^m a_{i,j} J \cdot \dot{H}(k_j), & \text{当 } i = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (11)$$

其中  $h$  是时间步长, 系数  $b_i, a_{i,j}$  满足阶条件<sup>[8-10]</sup>.

格式 (11) 成为辛格式当且仅当:

$$b_i a_{i,j} + b_j a_{j,i} - b_i b_j = 0, \quad \forall i, j.$$

为了构造格式的形式简单, 再次引入 3 个中间变量:  $T = \partial_v$ ,  $Q = \partial_x w$  和  $R = \partial_y p$ . 利用这些中间变量, 则多辛偏微分方程组 (3) 可以写成如下的 3 个不同方向上的微分方程组的联合形式:

$$\frac{d}{dt} v = T, \quad \frac{d}{dt} u = v, \quad (12a)$$

$$\frac{d}{dx} w = Q, \quad \frac{d}{dx} u = w, \quad (12b)$$

$$\frac{d}{dy} p = R, \quad \frac{d}{dy} u = p, \quad (12c)$$

其中式 (12a) 对应时间  $t$  方向, 式 (12b) 对应空间  $x$  方向, 式 (12c) 对应空间  $y$  方向, 同时中间变量  $T, Q, R$  满足:

$$T - c^2 Q - c^2 R = 0. \quad (13)$$

下面我们就结合以上格式离散联合的微分方程组 (12), 一种典型结合 (10) 式和 (11) 式对微分方程组进行离散的方式是采用  $r$  级 Runge-Kutta 辛格式离散时间  $t$  方向的方程 (12a), 分别

采用  $s$  级和  $l$  级显辛格式离散  $x$  方向和  $y$  方向的方程.

为了方便起见, 假定 3 个方向的离散都是从第  $n$  层到第  $n+1$  层,  $\Delta t$  为时间步长,  $\Delta x$  为空间  $x$  方向的步长,  $\Delta y$  为空间  $y$  方向的步长.

利用格式 (11) 对式 (12a) 进行离散得到:

$$\begin{cases} V_{i,j}^k = v_{i,j}^n + \Delta t \sum_{m=1}^r a_{k,m} T_{i,j}^m, & \text{当 } k = 1, 2, \dots, r, \\ U_{i,j}^k = u_{i,j}^n + \Delta t \sum_{m=1}^r a_{k,m} V_{i,j}^m, & \text{当 } k = 1, 2, \dots, r, \\ v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta t \sum_{m=1}^r b_m T_{i,j}^m, \quad u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \sum_{m=1}^r b_m V_{i,j}^m, \end{cases} \quad (14)$$

式 (14) 满足守恒律:

$$\frac{du_{i,j}^{n+1} \wedge dv_{i,j}^{n+1} - du_{i,j}^n \wedge dv_{i,j}^n}{\Delta t} = \sum_{m=1}^r b_m (dU_{i,j}^m \wedge dT_{i,j}^m). \quad (15)$$

利用格式 (10) 对式 (12b) 进行离散得到:

$$\begin{cases} W_{n,j}^k = w_{n,j}^k, \quad U_{n,j}^k = u_{n,j}^k, \\ W_{i,j}^k = W_{i-1,j}^k + \Delta x e_i Q_{i-1,j}^k, & \text{当 } i = 1, 2, \dots, s, \\ U_{i,j}^k = U_{i-1,j}^k + \Delta x d_i W_{i-1,j}^k, & \text{当 } i = 1, 2, \dots, s, \\ w_{n+1,j}^k = W_{s,j}^k, \quad u_{n+1,j}^k = U_{s,j}^k, \end{cases} \quad (16)$$

式 (16) 满足守恒律:

$$\frac{du_{n+1,j}^k \wedge dw_{n+1,j}^k - du_{n,j}^k \wedge dw_{n,j}^k}{\Delta x} = \sum_{m=0}^{s-1} e_m (dU_{m,j}^k \wedge dQ_{m,j}^k), \quad (17)$$

利用格式 (10) 对式 (12c) 进行离散得到:

$$\begin{cases} P_{i,n}^k = p_{i,n}^k, \quad U_{i,n}^k = u_{i,n}^k, \\ P_{i,j}^k = W_{i,j-1}^k + \Delta x \hat{e}_j R_{i,j-1}^k, & \text{当 } j = 1, 2, \dots, l, \\ U_{i,j}^k = U_{i,j-1}^k + \Delta x \hat{d}_j P_{i,j}^k, & \text{当 } j = 1, 2, \dots, l, \\ p_{i,n+1}^k = P_{i,l}^k, \quad u_{i,n+1}^k = U_{i,l}^k, \end{cases} \quad (18)$$

式 (18) 满足守恒律:

$$\frac{du_{i,n+1}^k \wedge dp_{i,n+1}^k - du_{i,n}^k \wedge dp_{i,n}^k}{\Delta y} = \sum_{m=0}^{l-1} \hat{e}_m (dU_{i,m}^k \wedge dQ_{i,m}^k). \quad (19)$$

在任意网格点上, 中间变量满足:

$$T_{i,j}^k - c^2 Q_{i,j}^k - c^2 R_{i,j}^k = 0. \quad (20)$$

联立式 (14)、式 (16)、式 (18) 和式 (20) 构成多辛偏微分方程组 (3) 的一个差分格式, 其截断误差为  $O(\Delta t^{2r}) + O(\Delta x^s) + O(\Delta y^l)$ . 下面首先证明该格式是多辛的.

方程 (13) 对应的变分方程的离散形式是:

$$dT_{i,j}^k - c^2 dQ_{i,j}^k - c^2 dR_{i,j}^k = 0. \quad (21)$$

联立式 (15)、式 (17)、式 (19) 和式 (21) 式得到离散的多辛守恒律:

$$\sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{l-1} e_{i+1} \hat{e}_{j+1} \frac{du_{i,j}^{n+1} \wedge dv_{i,j}^{n+1} - du_{i,j}^n \wedge dv_{i,j}^n}{\Delta t} =$$

$$c^2 \sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{l-1} b_k \hat{e}_j \frac{du_{n+1,j}^k \wedge dw_{n+1,j}^k - du_{n,j}^k \wedge dw_{n,j}^k}{\Delta x} +$$

$$c^2 \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{k=1}^r e_i b_k \frac{du_{i,n+1}^k \wedge dp_{i,n+1}^k - du_{i,n}^k \wedge dw_{i,n}^k}{\Delta y}, \quad (22)$$

上式中, 由  $\sum_{i=0}^{s-1} e_{i+1} = 1$  和  $\sum_{j=0}^{l-1} \hat{e}_{j+1} = 1$  可以直接推得  $\sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{l-1} e_{i+1} \hat{e}_{j+1} = 1$ , 同理可得,  $\sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{l-1} b_k \hat{e}_{j+1} = 1$  和  $\sum_{i=0}^{s-1} \sum_{k=1}^r e_{i+1} b_k = 1$ , 因此可以肯定(22)式至少是(7)式的一阶离散逼近.

### 3 数值实验

下面我们利用数值算例进一步探讨利用所提出的多辛格式构造方法构造的复合多辛格式的性能.

在多辛格式(22)中令  $r = s = l = 1$ , 并以此离散膜自由振动方程:

$$\partial_{tt}u - c^2(\partial_{xx}u + \partial_{yy}u) = 0$$

及其对应的多辛偏微分方程组(12).

(12a) 及其守恒律对应的离散形式为:

$$\begin{cases} v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1/2} = v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k + \frac{1}{2} \Delta t T_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1/2}, \\ u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1/2} = u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k + \frac{1}{2} \Delta t v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1/2}, \\ v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} = v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k + \Delta t T_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1/2}, \\ u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} = u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k + \Delta t v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1/2}, \end{cases} \quad (23)$$

$$\frac{du_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} \wedge dv_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} - du_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k \wedge dv_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k}{\Delta t} = dU_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1/2} \wedge dT_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1/2}. \quad (24)$$

(12b) 及其守恒律对应的离散形式为:

$$w_{i+1,j}^k = w_{i,j}^k + \Delta x Q_{i,j}^k, \quad u_{i+1,j}^k = u_{i,j}^k + \Delta x w_{i+1,j}^k, \quad (25)$$

$$\frac{du_{i+1,j}^k \wedge dw_{i+1,j}^k - du_{i,j}^k \wedge dw_{i,j}^k}{\Delta x} = du_{i,j}^k \wedge dQ_{i,j}^k. \quad (26)$$

(12) 及其守恒律对应的离散形式为:

$$p_{i,j+1}^k = p_{i,j}^k + \Delta y R_{i,j}^k, \quad u_{i,j+1}^k = u_{i,j}^k + \Delta y p_{i,j+1}^k, \quad (27)$$

$$\frac{du_{i,j+1}^k \wedge dp_{i,j+1}^k - du_{i,j}^k \wedge dp_{i,j}^k}{\Delta y} = du_{i,j}^k \wedge dR_{i,j}^k. \quad (28)$$

联立式(23)式至(28)式, 消去中间变量  $T, Q, R$ , 得到多辛偏微分方程组(2)的一个等价形式:

$$\begin{cases} \frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{\Delta t} - c^2 \frac{w_{i+1,j}^k - w_{i,j}^k}{\Delta x} - c^2 \frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k}{\Delta y} = 0, \\ \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = v_{i,j}^{k+1/2}, \\ \frac{v_{i+1,j}^{k+1/2} - u_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta x} = w_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1/2}, \quad \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k+1/2} - u_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1/2}}{\Delta y} = p_{i+\frac{1}{2},j+1/2}^k, \end{cases} \quad (29)$$

式中:  $u_{i,j}^{k+1/2} = (u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j}^k)/2$ ,  $u_{i+1/2,j}^{k+1/2} = (u_{i+1/2,j}^{k+1} + u_{i+1/2,j}^k)/2 = (u_{i+1,j}^{k+1} + u_{i,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k + u_{i,j}^k)/4$  等等.

进一步消去变量  $v$ 、 $w$  和  $p$  就得到一个半隐式的  $9 \times 3$  点格式:

$$\delta_t^2(u_{i+1/2,j+1/2}^k + u_{i+1/2,j-1/2}^k + u_{i-1/2,j+1/2}^k + u_{i-1/2,j-1/2}^k) = \frac{1}{4}c^2\delta_x^2(u_{i,j}^{k-1} + 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k+1}) + \frac{1}{4}c^2\delta_y^2(u_{i,j}^{k-1} + 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k+1}), \quad (30)$$

式中:  $\delta$  为二阶中心差商算子, 例如:  $\delta_x^2 u_{i,j}^k = (u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k)/(\Delta x^2)$

实验 1 针对膜自由振动方程 (1), 考虑如下的初始条件和边界条件:

$$u(x, y, 0) = 4\arctan e^{(\sqrt{3/3})x + (\sqrt{3/3})y}, \quad u(x, y, 0) |_{t=0} = 0 \quad (x, y) \in D,$$

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \quad t > 0, (x, y) \in D.$$

假定方程 (1) 中的系数  $c = 1$ , 利用格式 (30) 在空间区域  $D: [-40, 10] \times [-10, 10]$  内取时间步长  $\Delta t = 0.01$ , 空间步长  $\Delta x = 0.2$ 、 $\Delta y = 0.05$  对其进行数值模拟, 得到不同时刻的数值解, 图 1、图 2 分别给出了方程 (1) 在  $t = 1$  和  $t = 30$  时刻的数值解, 图 3 给出了数值解的局部能量误差和局部动量误差.

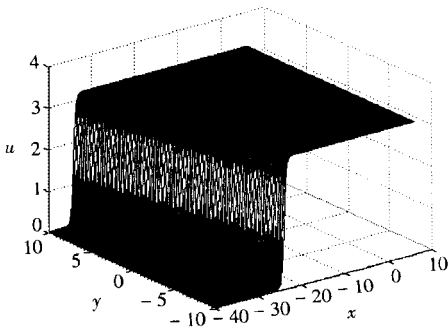


图 1  $t = 1$  时刻的数值波形图

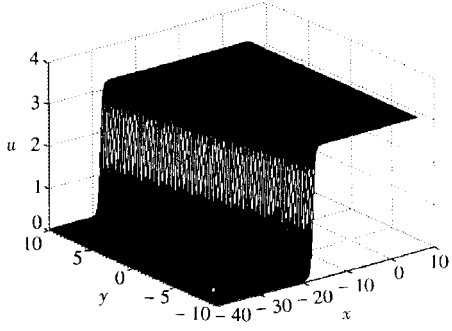


图 2  $t = 30$  时刻的数值波形图

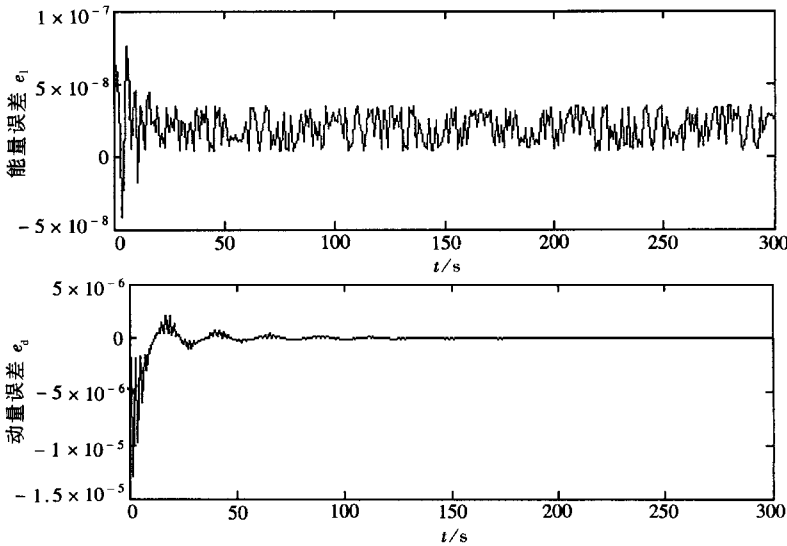


图 3 时间  $[0, 300]$  内数值解的局部能量误差和局部动量误差

实验 2 针对膜自由振动方程 (1), 考虑如下的初始条件和边界条件:

$$u(x, y, 0) = 4\text{sine}(\sqrt{6/4}x + (\sqrt{6/4})y), \quad u(x, y, 0) |_{t=0} \quad (x, y) \in D,$$

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \quad t > 0, (x, y) \in D.$$

假定方程(1)中的系数  $c = 2$ , 利用格式(30) 在空间区域  $D: [0, 50] \times [0, 20]$  内取时间步长  $\Delta t = 0.02$ , 空间步长  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta y = 0.025$  对其进行数值模拟, 得到不同时刻的数值解, 图 4 和图 5 分别给出了方程(1) 在  $t = 15$  和  $t = 45$  时刻的数值解, 图 6 给出了数值解的局部能量和局部动量误差.

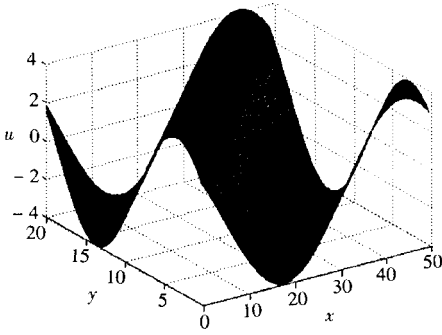


图 4  $t = 15$  时刻的数值波形图

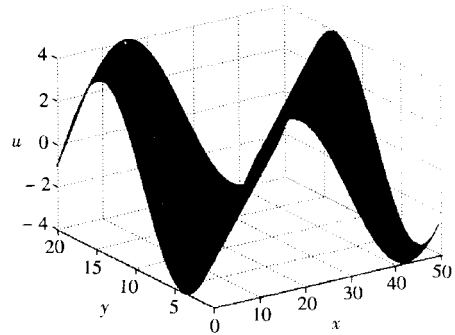


图 5  $t = 45$  时刻的数值波形图

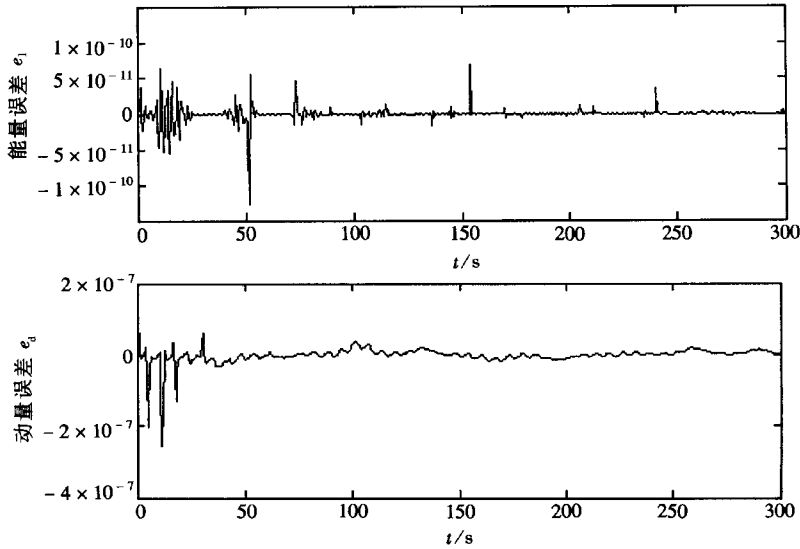


图 6 时间  $[0, 300]$  内数值解的局部能量误差和局部动量误差

从实验 1 和实验 2 的结果可以看出: 本文构造的复合多辛格式不仅能够较好地模拟膜自由振动过程; 而且在模拟过程中, 膜振动的振幅值没有减小; 同时图 3 和图 6 中反映出在  $t \in [0, 300]$  时段内系统的局部能量误差和局部动量误差均在  $10^{-6}$  数量级以下, 这说明本文构造的复合多辛格式能够很好地保持系统的能量值和动量值, 这进一步证明在模拟过程中膜的振动速度和振动波的传播速度也都没有减小. 从局部能量误差图和局部动量误差图不难看出, 在模拟时间 300 s 内, 本文构造的多辛格式表现出了良好的长时间数值稳定性.

由于目前没有膜自由振动问题的数值解的相关文献作对比, 本文只能与文献[11] 中的解析解进行对比, 对比结果见表 1. 在对比中我们发现利用多辛格式(30) 得到的数值解能够精确到 10 位有效数字以上, 这充分显示出了多辛算法的精确性.

表 1 数值解与精确解对比表

节点号	实验 1		实验 1	
	精确解	数值解	精确解	数值解
1	2.351 667 309 22	2.351 667 309 29	3.834 547 250 51	3.834 547 250 57
2	3.004 195 217 37	3.004 195 217 11	0.941 002 739 58	- 0.941 002 739 90
3	0.279 335 910 82	0.279 335 910 73	1.339 470 506 63	- 1.339 470 506 71
4	0.760 608 375 91	0.760 608 375 80	1.670 850 640 07	1.670 850 640 10

## 6 结 论

本文基于哈密尔顿空间体系的多辛理论研究了膜自由振动方程, 讨论了构造复合离散多辛格式的方法, 并构造了一种  $9 \times 3$  点半隐式的多辛复合离散格式. 数值实验的结果表明: 利用本文提出的复合辛格式构造方法构造的多辛格式是有效的, 该格式能较好地保持系统的能量和动量特性, 并具有良好的长时间数值行为及稳定性.

### [参 考 文 献]

- [1] Bridge T J, Reich S. Multi-symplectic integrators: numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity[J]. Phys Lett A, 2001, **284**(4/5): 184-193.
- [2] Moore B E, Reich S. Multi-symplectic integration methods for Hamiltonian PDEs[J]. Future Generation Computer Systems, 2003, **19**(3): 395-402.
- [3] Bridges T J. Multi-symplectic structures and wave propagation[J]. Math Proc Camb Philos Soc, 1997, **121**(1): 147.
- [4] Reich S. Multi-symplectic Runge-Kutta collocation methods for Hamiltonian wave equations[J]. Computational Physics, 2000, **157**(2): 473-499.
- [5] Izu Vaisman. Symplectic Geometry and Secondary Characteristic Classes[M]. Boston: Birkhuser, 1987.
- [6] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [7] HONG Jia-lin, LI Chun. Multi-symplectic Runge-Kutta methods for nonlinear Dirac equations[J]. Computational Physics, 2006, **211**(2): 448-472.
- [8] SUN Jian-qiang, QIN Meng-zhao. Multi-symplectic methods for the coupled 1D nonlinear Schrödinger system[J]. Computer Physics Communications, 2003, **155**(3): 221-235.
- [9] Qin M Z, Zhang M Q. Multi-stage symplectic schemes of two kinds of Hamiltonian systems for wave equation[J]. Comput Math Appl, 1990, **19**(10): 51.
- [10] Yoshida H. Construction of higher order symplectic integrators[J]. Phys Lett A, 1990, **150**(5/7): 262-269.
- [11] 哈尔滨工业大学数学系组. 数学物理方程[M]. 北京: 科学出版社, 2001.



# Multi-Symplectic Methods for Membrane Free Vibration Equation

HU Wei-peng<sup>1</sup>, DENG Zi-chen<sup>1,2</sup>, LI Wen-cheng<sup>3</sup>

- (1. School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R. China;  
2. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P.R. China;  
3. School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R. China)

**Abstract:** The multi-symplectic formulations of the membrane free vibration equation with periodic boundary conditions in Hamilton space were considered. The complex method was introduced and a semi-implicit twenty-seven-point scheme with certain discrete conservation laws— a multi-symplectic conservation law (CLS), an energy conservation law (ECL) as well as a momentum conservation law (MCL)— is constructed to discrete the PDEs that are derived from the membrane free vibration equation. The results of the numerical experiments show that the multi-symplectic scheme has excellent long-time numerical behavior.

**Key words:** multi-symplectic; complex discretization; Runge-Kutta method