

混凝土材料的粘塑性损伤本构模型^{*}

刘长春¹, 吕和祥¹, 关 萍²

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 大连大学 建筑工程学院, 辽宁 大连 116622)

(本刊编委吕和祥来稿)

摘要: 基于不可逆热力学, 引入运动硬化、等向硬化和损伤内变量, 构造了相应的自由能函数和流动势函数, 推导出了混凝土材料的粘塑性损伤本构模型. 数值模拟的结果表明, 该模型能够避开屈服面和破坏准则的基本假设来描述混凝土材料的以下特性: 压缩载荷作用下的体积膨胀现象; 应变率敏感性; 峰值后由损伤和破坏引起的应力软化和刚度退化现象. 由于此模型避开了根据各种变形阶段选择与其相应的本构模型的繁琐计算, 因此更便于纳入复杂工况下应力分析有限元程序中.

关键词: 混凝土; 粘塑性; 损伤; 不可逆热力学

中图分类号: TU452; O344.3 **文献标识码:** A

引 言

混凝土作为结构材料被广泛应用于许多重要结构工程中, 如高层建筑、飞机棚、近海平台、反应容器、核控制结构物等. 这些结构的非线性分析变得越来越重要, 这是因为这些结构系统的实验研究是非常昂贵的, 且单靠经验方法不足以对极限状态做出合适的安全评估. 依据我们对混凝土行为的认识, 混凝土结构变形行为的非线性反应主要由 3 种材料效应引起: 1) 混凝土的塑性; 2) 混凝土开裂; 3) 与时间有关的特性, 如徐变、收缩、温度和载荷历史等.

混凝土材料宏观上的塑性行为可以用经典塑性理论来分析. 另一方面, 在循环载荷作用下由开裂过程引起的刚度退化现象却不能单单靠塑性理论来分析. 然而, 连续介质损伤力学却能够通过定义应力与有效应力之间的关系来表现这种退化行为. 简而言之, 能再现混凝土材料显著特性的力学模型是塑性损伤耦合模型. 近年来, 许多学者构建了很多种类的塑性损伤耦合模型并用于分析混凝土结构. Burlion 等^[1]发展了把压缩和拉伸开裂行为组合到一个损伤变量的塑性损伤本构模型, 此模型虽然简单但是对不考虑率效应的单轴压缩行为很有效; Lee 等^[2]构造了混凝土材料受循环载荷的损伤本构模型; Ragueneau 等^[3]建立了能够模拟在一定损伤水平下滞回行为的损伤本构模型; 李杰和吴建营^[4-5]建议了一类基于能量释放率的弹塑性损伤本构模型.

* 收稿日期: 2006-10-17; 修订日期: 2007-07-08

基金项目: 国家自然科学基金(重大)计划资助项目(90410012)

作者简介: 刘长春(1976—), 女, 四川德阳人, 博士(联系人. Tel: + 86-411-81285317; E-mail: liuchangchun1976@163.com).

应该注意, 现有的混凝土塑性损伤本构模型, 一般需要两个加载面, 即屈服面和破坏面. 然而, 对于混凝土这种力学行为复杂的材料来说, 确定这两个面是比较困难的. 且大多数耦合模型都没有考虑混凝土材料的一个重要特性: 粘性或率效应. 本文以含内变量的热力学理论为基础, 通过引入的连续非弹性乘子模拟粘性的影响, 建立了粘塑性损伤本构模型. 本模型能避开屈服面和破坏面的基本假设来描述混凝土材料在压缩载荷作用下的体积膨胀现象、软化行为、率敏感性和由损伤与破坏引起的刚度退化现象.

1 本构模型的构建

不可逆热力学为材料本构模型的建立提供了有效的理论框架, 以不可逆热力学为基础能够构建塑性损伤以及连续介质损伤本构模型, 由热力学势函数推导出来的本构关系是同热力学框架一致的. 在热力学方法中, 首先需要确定意义明确的势函数和选定状态变量与其相关热力学力之间的关系.

1.1 本构方程

以不可逆热力学为基础构建本构关系主要有如下几个步骤: 首先要确定状态变量. 如果状态变量的演化方程满足 Clausius-Duhem 不等式, 即热力学第 2 定律, 那么此过程遵循热力学规律. 假定一个凸的状态势函数, 由其导出的演化方程将首先满足热力学稳定条件. 其次是选定单位质量的 Helmholtz 自由能函数, 它应该是状态变量的函数.

基于随后数值计算的考虑, 状态变量应该选为弹性应变 ε_{ij}^e 、温度 T 和一组内变量 V_k , 即自由能函数为

$$\psi = \psi(\varepsilon_{ij}^e, V_k, T), \quad (1)$$

所要得到的状态方程, 必须遵从热力学规律, 即耗散能必须为正. 不考虑温度的影响, Clausius-Duhem 不等式为

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \dot{\psi} \geq 0, \quad (2)$$

式中 ε_{ij} 为总应变, ρ 为材料密度, σ_{ij} 为应力. 依照所选的变量, 方程(1)对时间的导数为

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k. \quad (3)$$

受载时材料的总应变分解为弹性应变和非弹性应变, 即

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^I, \quad (4)$$

式中 ε_{ij}^I 为非弹性应变.

将方程(3)、方程(4)代入方程(2)得

$$\left[\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right] \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^I - \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \geq 0, \quad (5)$$

由于 $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ 和 $\dot{\varepsilon}_{ij}^I$ 、 \dot{V}_k 间是相互独立的, 从方程(5)得到热力学状态方程为

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e}, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^I + A_k \dot{V}_k \geq 0, \quad A_k = - \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k}, \quad (7)$$

方程(7)给出了内变量 V_k 与其相关的热力学力 A_k 之间的关系.

Helmholtz 自由能函数取为其内部状态变量的 2 次形式, 即

$$\rho \psi = \frac{1}{2} [2\mu(1-d) \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{ij}^e + \lambda(1-d) \varepsilon_{kk}^e \varepsilon_{kk}^e] + \frac{1}{2} k_1 \alpha_j \alpha_j + \frac{1}{2} k_2 B^2, \quad (8)$$

式中 μ, λ 为 Lam 常数, d 为等向损伤变量, α_{ij} 为与热力学力 —— 背应力 Ω_{ij} 相关的内变量, B 为与热力学力 —— 拉应力 Z 相关的内变量, k_1, k_2 是与材料性质相关的常数.

由方程 (8) 可推出如下状态方程

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}^e} = 2\mu(1-d)\epsilon_{ij}^e + \lambda(1-d)\epsilon_{kk}^e \delta_{ij}, \tag{9}$$

$$\Omega_{ij} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_{ij}} = -k_1 \alpha_{ij}, \tag{10}$$

$$Z = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial B} = -k_2 B. \tag{11}$$

为了满足 Clausius-Duhem 不等式, 取势函数为

$$\Phi = J_2(\dot{\alpha}_{ij} - \dot{\Omega}_{ij}) + c(\alpha_{kk} - \Omega_{kk}) + \frac{1}{2}a\Omega_{ij}\Omega_{ij} + \frac{1}{2}bZ^2 - Z, \tag{12}$$

式中

$$J_2(\dot{\alpha}_{ij} - \dot{\Omega}_{ij}) = [(3/2)(\dot{\alpha}_{ij} - \dot{\Omega}_{ij})(\dot{\alpha}_{ij} - \dot{\Omega}_{ij})]^{1/2} \tag{13}$$

及

$$\sigma_{ij}^d = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_{ij}} = \lambda \left[\frac{3}{2J_2}(\dot{\alpha}_{ij} - \dot{\Omega}_{ij}) + c\delta_{ij} \right], \tag{14}$$

$$\Omega_{ij} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega_{ij}} = \lambda \left[-\frac{3}{2J_2}(\dot{\alpha}_{ij} - \dot{\Omega}_{ij}) - c\delta_{ij} + a\Omega_{ij} \right] = -\sigma_{ij}^d + \lambda a \Omega_{ij}, \tag{15}$$

$$Z = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \lambda (bZ - 1), \tag{16}$$

其中 $\dot{\alpha}_{ij}$ 和 $\dot{\Omega}_{ij}$ 为 σ_{ij} 和 Ω_{ij} 的偏量. 式(14) 给出了非弹性体积变化, 即 $d\epsilon^d = d\epsilon_{kk}^d = 3c\lambda$ 这样, 就能描述地质类材料如混凝土和岩石的“压胀性”. 这里 α_{ij}, B 和 Ω_{ij}, Z 分别相当于式(7) 中的 V_k 和 A_k . 将式(14)、式(15)和式(16)代入式(7)有

$$\lambda \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_{ij}} \sigma_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega_{ij}} \Omega_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial Z} Z \right] \geq 0.$$

只要势函数 $\Phi = \Phi(\sigma_{ij}, A_k)$ 关于变量 α_{ij}, A_k 是凸的, 及 $\lambda \geq 0$, 则方程(7) 就自动满足. 因此, 通过满足 Clausius-Duhem 不等式, 推导出了经典塑性理论中的塑性流动法则.

由式(10)、式(11)和式(15)、式(16)得背应力率和拉应力率为

$$\dot{\Omega}_{ij} = -k_1 \dot{\alpha}_{ij} = k_1 \dot{\sigma}_{ij}^d - \lambda a \dot{\Omega}_{ij}, \tag{17}$$

$$\dot{Z} = -k_2 \dot{B} = -k_2 \lambda (bZ - 1) = c_1 (W - Z) \lambda \tag{18}$$

式中 $c_1 = k_2 b, W = 1/b$.

在粘塑性统一本构理论中已经构造了几种非弹性乘子 λ 的表达式. 它应该是应力 σ_{ij} 、背应力 Ω_{ij} 和拉应力 Z 的函数, 即 $\lambda = \lambda(\sigma_{ij}, \Omega_{ij}, Z)$. 在大多数粘塑性统一本构方程中, λ 的数学表达主要有 3 种^[6], 即幂函数(Ax^n)、指数函数($A(e^x - 1)$) 和双曲正弦函数($A[\sinh(x^m)]^n$). 现在重要的是如何决定函数中的自变量 x . 本文推广了文献[6] 给出的表达式, 提出了构造变量 x 的一般性方法, 即

$$x = g(\sigma_{ij})/Z, \tag{19}$$

在经典塑性理论中, $g(\sigma_{ij}) - Z = 0$ 表征的就是屈服面方程. 从混凝土的实验结果可知, 混凝土的非弹性行为与静水压力密切相关, 则本文令

$$g(\sigma_{ij}) = \sqrt{(3/2)(\dot{\alpha}_{ij} - \dot{\Omega}_{ij})(\dot{\alpha}_{ij} - \dot{\Omega}_{ij})} + \beta(\alpha_{kk} - \Omega_{kk}), \tag{20}$$

因而由式(19)有

$$x = (J_2 + \beta(\sigma_{kk} - \Omega_{kk}))/Z, \quad (21)$$

由于混凝土材料本身存在很多缺陷,模型中引入了损伤变量,能够描述刚度退化和应力软化现象.引入损伤后,式(21)为

$$x = (J_2 + \beta(\sigma_{kk} - \Omega_{kk}))/[Z(1-d)], \quad (22)$$

采用双曲正弦形式的非弹性乘子,即

$$\lambda = D_0 \left[\sinh \left(\frac{J_2 + \beta(\sigma_{kk} - \Omega_{kk})}{Z(1-d)} \right)^{1.5} \right]^n, \quad (23)$$

将式(23)代入式(14)、式(17)和式(18)得

$$\varepsilon_j^I = D_0 \left[\sinh \left(\frac{J_2 + \beta(\sigma_{kk} - \Omega_{kk})}{Z(1-d)} \right)^{1.5} \right]^n \left[\frac{3}{2J_2} (\dot{\sigma}_j - \dot{\Omega}_j) + c\delta_j \right], \quad (24)$$

$$\Omega_j = k_1 \sigma = k_1 \varepsilon_j^I - D_0 \left[\sinh \left(\frac{J_2 + \beta(\sigma_{kk} - \Omega_{kk})}{Z(1-d)} \right)^{1.5} \right]^n k_1 a \Omega_j, \quad (25)$$

$$Z = c_1(W - Z) D_0 \left[\sinh \left(\frac{J_2 + \beta(\sigma_{kk} - \Omega_{kk})}{Z(1-d)} \right)^{1.5} \right]^n. \quad (26)$$

1.2 损伤演化方程

混凝土材料的非线性行为主要由微裂纹引起.微裂纹的聚结、扩展和相连成宏观裂纹,会导致材料性能的逐渐“劣化”,如强度、刚度、韧性、稳定性和使用寿命等方面的降低.为了考虑这种“劣化”行为,需要在混凝土本构方程中引入损伤变量 d . 损伤变量的概念最早是卡恰诺夫(Kachanov)在研究蠕变破坏时提出的,卡恰诺夫(Kachanov)认为损伤可由横截面上空隙的相对面积定义,由此可知

$$\sigma = \sigma / (1-d), \quad (27)$$

其中 σ 为有效应力.混凝土在受拉和受压载荷作用下的行为是很不一样的,受拉时,拉应力直接引起裂纹,拉伸应变的方向同拉应力一致.受压时,拉伸应变是由 Poisson 效应产生,所以方向垂直于应力的方向.为了能说明这种不同,引入 d_t 和 d_c 分别表示单轴受拉和单轴受压时的损伤.在多轴应力状态下,损伤变量 d 的演化由 d_t 和 d_c 共同决定,即

$$d = \xi_c d_c + \xi_t d_t, \quad (28)$$

式中 ξ_c 和 ξ_t 是由应力状态确定的损伤参数,这两个参数最初由 Mazars^[7] 提出.根据实验结果可知,混凝土材料卸载时是弹性的,并没有新的损伤产生.因而可以认为弹性变形与损伤无关.这样,损伤即可表示为非弹性应变的函数

$$d = f(\varepsilon_j^I), \quad (29)$$

分析 Chinn 和 Zimmerman^[8] 的实验表明,单纯的静水压不可能引起破坏,因此可认为静水压力对损伤也无明显的影响,进而方程(29)也能写成

$$d = f(e_j^I), \quad (30)$$

这里 e_j^I 是非弹性应变张量 e_j^I 的偏应变部分.为能进一步考虑偏平面加载历程的影响,将损伤表示为

$$d = f(p_D), \quad (31)$$

式中

$$p_D = (de_j^I de_j^I)^{1/2}, \quad (32)$$

其中 $0 < d \leq d_u$, $d = 0$ 表示无损状态, $d = d_u$ ($0 < d_u \leq 1$) 表示最终的损伤状态. d_t 和 d_c 采用如下形式^[9]

$$d_c = d_{uc} - d_{uc} \exp(-K_c p_D^{Rc}) \tag{33}$$

及

$$d_t = d_{ut} - d_{ut} \exp(-K_t p_D^{Rt}), \tag{34}$$

式中 d_{uc} 、 d_{ut} 、 K_c 、 K_t 、 Rc 和 Rt 是材料常数。 d_{uc} 、 K_c 和 Rc 由单轴压缩实验获得, 而 d_{ut} 、 K_t 和 Rt 由单轴拉伸实验获得。

2 数值模拟

采用文献[10]和文献[11]的一致渐近数值方法求解非线性本构方程组。选定了一组模型参数: $D_0 = 1.5 \times 10^{-6}$, $n = 1.5$, $k_1 = 8.03 \times 10^1$, $c_1 = 1.45 \times 10^1$, $a = 6.08 \times 10^{-1}$, $W = 60.0$, $d_{uc} = 0.7$, $d_{ut} = 0.8$, $K_c = 1.05 \times 10^3$, $K_t = 5.68 \times 10^2$, $Rc = 1.42$, $Rt = 0.9$ 。

图1和图2分别为单轴拉伸和压缩载荷作用下的实验曲线与模拟曲线的比较图, 其实验结果出自文献[12]。可以看出, 模拟曲线同实验曲线吻合的很好。图3为混凝土动态受压曲线, 实验结果出自文献[12]。从这些曲线图可以看出, 本文所建模型能够很好的描述混凝土材料的动静态特性。

图4为单轴压缩试验的体积膨胀曲线, 实验数据来自文献[13]。从图中的实验曲线可以看出, 在压缩载荷作用下, 达到极限应力的75%~90%时发生体积膨胀。从曲线图可以看出, 本文建立的模型具有模拟这种体积变化行为的能力。

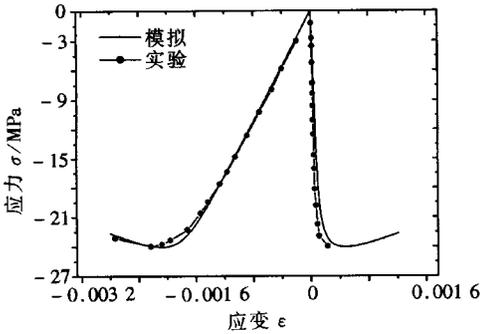


图1 单轴抗压模型曲线与实验曲线比较图

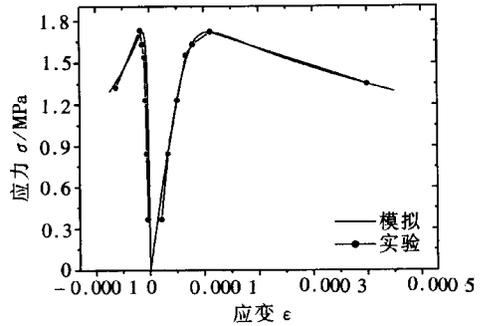


图2 单轴抗拉模型曲线与实验曲线比较图

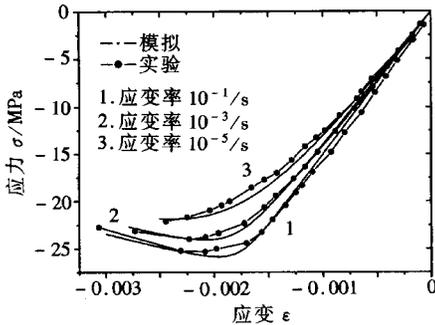


图3 不同应变率时单轴抗压模型曲线与实验曲线比较图

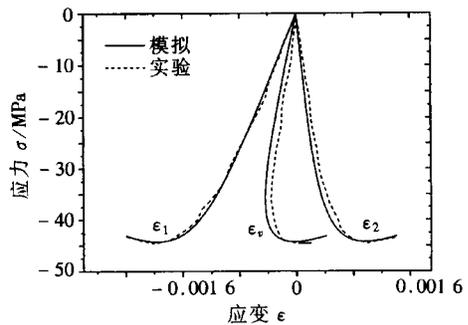


图4 单轴抗压三向模拟曲线与实验曲线的比较图

图5和图6为一维脉动循环压缩载荷作用下, 粘塑性损伤本构模型模拟混凝土的行为曲

线图, 其中实验数据来自 Sinha 等^[14]的实验结果. 从分析结果, 可以看出预测结果可以较好地描述实验曲线的基本特征: 1) 软化过程中存在的非线性行为; 2) 卸载后的残余应变是随着应变的增加不断积累增加的; 3) 切线模量的逐渐降低表现出损伤的不断发展.

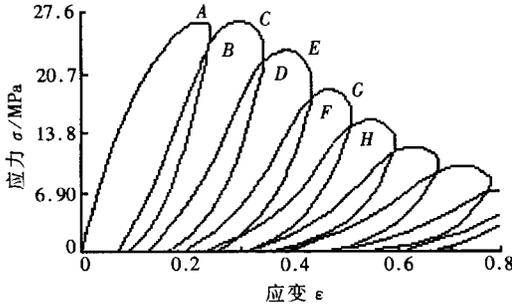


图 5 一维循环压缩实验曲线

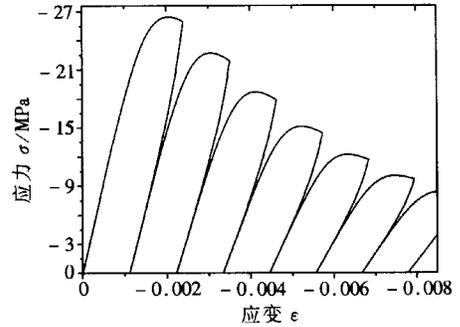


图 6 一维循环压缩模拟曲线

3 结 论

本文避开屈服面和破坏法则的基本假设推导出了一个新的能够描述混凝土材料加卸载行为的本构方程. 在不可逆热力学理论框架内, 由粘塑性和损伤耦合理论, 借助适当的数学函数, 给出了一个合理和一致的混凝土变形行为的描述. 本模型能够描述混凝土材料的如下特性:

- 1) 软化阶段的非线性行为;
- 2) 材料的率敏感性;
- 3) 由于微裂纹逐渐扩展引起的非弹性体积膨胀;
- 4) 峰值后的应变软化性能;
- 5) 峰值后由损伤和破坏引起的刚度退化和强度下降特性.

显而易见, 粘塑性损伤本构模型能够再现混凝土材料的显著特性. 而且由于本模型避免了不同变形阶段选用不同的本构模型, 因此更便于纳入混凝土结构在动态载荷下(如地震)的应力分析程序中.

[参 考 文 献]

- [1] Burlion N, Gatuingt F, Pijaudier-Cabot G, et al. Compaction and tensile damage in concrete: constitutive modeling and application to dynamics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 2000, 183(4): 291-308.
- [2] Lee J, Fenves G L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124(8): 892-900.
- [3] Ragueneau F, Borderie Ch La, Mazars J. Damage model for concrete-like materials coupling cracking and friction, contribution towards structural damping: first uniaxial applications[J]. Mechanics Cohesive-Frictional Materials, 2000, 5(8): 607-625.
- [4] LI Jie, WU Jian-ying. Elastoplastic damage constitutive model for concrete based on damage energy release rates, part I: basic formulations[J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(9): 14-20.
- [5] WU Jian-ying, LI Jie. Elastoplastic damage constitutive model for concrete based on damage energy release rates, part II: numerical algorithm and verifications[J]. China Civil Engineering Journal,

- 2005, **38**(9): 21-27.
- [6] Dame L T, Stouffer D. Inelastic Deformations in Metals [M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1995.
- [7] Mazars J. A description of micro and macroscale damage of concrete structures [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1986, **25**(6): 729-737.
- [8] Chiinn J, Zimmerman R M. Behavior of plain concrete under various high triaxial compression loading conditios [R]. Technical Report No. WL TR 64-163 (AD468460), Air Force Weapons Laboratory, New Mexico, August, 1965.
- [9] 董毓利. 混凝土非线性力学基础 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997.
- [10] Chulya A, Walker K P. A new uniformly valid asymptotic integration algorithm for elasto-plastic-creep and unified viscoplastic theories including continuum damage [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, **32**(2): 385-418.
- [11] 冯明琿. 粘弹塑性统一本构理论 [D]. 博士论文. 大连: 大连理工大学, 2000.
- [12] 肖诗云. 混凝土率型本构模型及其在拱坝动力分析中的应用 [D]. 博士论文. 大连: 大连理工大学, 2002.
- [13] Ragueneau F, Gatuingt F. Inelastic behavior modeling of concrete in low and high strain rate dynamics [J]. Computers and Structures, 2003, **81**(12): 1287-1299.
- [14] Sinha B P, Gerstle K H, Tulin L G. Stress-strain relation for concrete under cyclic loading [J]. ACI Journal, 1964, **61**(2): 195-211.

Coupled Viscoplasticity Damage Constitutive Model for Concrete Materials

LIU Chang-chun¹, LÜ He-xiang¹, GUAN Ping²

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,

Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P. R. China;

2. Civil and Architectura Engineering College, Dalian University,

Dalian, Liaoning 116622, P. R. China)

Abstract: Coupled viscoplasticity damage constitutive model for concrete materials is developed within the framework of irreversible thermodynamics, and simultaneously the Helmholtz free energy function and a non-associated flow potential function are given, which include the internal variables of kinematic hardening, isotropic hardening and damage. Results from numerical simulation show that the model presented can describe the deformation properties of the concrete without the formal hypotheses of yield criterion and failure criteria, such as that volume dilatancy under compression; strain-rate sensitivity; stiffness degradation and stress-softening behavior beyond the peak stress which are brought by damages and fractures. Moreover, we could benefit from the application of finite element method based on this model under complex loading because of avoiding the choice of different constitutive model based on the deformation level.

Key words: concrete; viscoplasticity; damage; irreversible thermodynamics