

# 外部压力作用下复合材料层合圆柱壳的脱层扩展分析\*

傅衣铭<sup>1</sup>, 杨金花<sup>1,2</sup>

(1. 湖南大学 力学与航空航天学院, 长沙 410082;

2. 长沙理工大学 桥梁与结构工程学院, 长沙 410076)

(本刊编委傅衣铭来稿)

摘要: 含脱层的层合圆柱壳在承受外部压力作用时, 容易发生脱层扩展, 进而引起结构失效. 基于可动边界变分原理并考虑脱层间的接触效应对圆柱壳在外部压力作用下的脱层扩展进行了分析, 同时应用 Griffith 准则, 导出了脱层前缘各点处的能量释放率表达式, 且以轴对称脱层层合圆柱壳为例进行了数值计算, 讨论了脱层大小、脱层深度、几何尺寸、材料性质及纤维铺层方式等因素对脱层扩展的影响.

关键词: 复合材料; 层合圆柱壳; 外部压力; 脱层扩展; 能量释放率; 接触效应

中图分类号: O343 文献标识码: A

## 引言

复合材料层合结构在制造过程中或外界冲击作用下, 易于产生层间脱层. 与面内压力相比, 外部压力虽不会使脱层结构发生局部屈曲, 但可驱使脱层进一步扩展, 使层合结构的刚度和剩余强度大为降低, 最终导致结构的整体失稳和破坏.

分析层合结构的脱层扩展, 必须确定脱层前缘处的应力场, 而脱层前缘处的应力具有奇异性, 分析该处的应力将有很大的困难, 而标志脱层前缘应力场强弱的能量释放率是个有限值, 因此, 绝大多数的研究都据此去分析脱层的扩展行为. 目前, 对脱层扩展问题的研究主要针对一维穿透脱层和二维内部脱层. 对于一维问题, 由于脱层前缘各点有相同的能量释放率, 分析相对简单一些, 因此已有较多的研究成果. Chai H 等<sup>[1]</sup> 最先利用梁柱理论分析了均匀各向同性层合板中的薄膜脱层和一般脱层的屈曲问题, 并采用断裂力学中能量释放率的定义讨论了脱层的扩展. Sallam, Simitses<sup>[2]</sup> 和 Yin<sup>[3]</sup> 基于经典层合板理论, 采用 J 积分方法对各向同性和正交各向异性层合板的薄膜脱层屈曲及扩展问题进行了讨论. Witcomb<sup>[4]</sup> 另辟途径, 采用几何非线性有限元方法和虚裂纹闭合技术计算能量释放率的各型分量, 分析了薄膜脱层的扩展问题. Zafer 和 Chang<sup>[5]</sup> 在层合板中引入多个脱层, 分析了具一维脱层层合板的扩展问题. 对于

\* 收稿日期: 2006-03-28; 修订日期: 2007-06-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572049)

作者简介: 傅衣铭(1945—), 男, 湖南湘潭人, 教授, 博士生导师(联系人, E-mail: Fuyiming1@yahoo.com).

更具实际意义的二维内部脱层问题, 由于其脱层前缘的扩展方式难以预料, 因此分析难度较大. Chai<sup>[6]</sup> 首先采用 Rayleigh-Ritz 法对二维浅部椭圆脱层进行了研究, 在脱层自相似扩展的假设下, 计算了脱层前缘的平均能量释放率. Whitcomb 和 Shivakumar<sup>[7-8]</sup> 则采用虚裂纹闭合技术, 分析了准各向同性层合板中脱层前缘的能量释放率. Sheinman<sup>[9]</sup> 和 Davidson<sup>[10]</sup> 等基于断裂力学原理, 分析了脱层板的能量释放率及其应力强度因子. Nilsson 等<sup>[11]</sup> 运用有限元方法, 分析了复合材料细长板条的脱层屈曲及扩展问题. Park<sup>[12]</sup> 和 Wang 等<sup>[13]</sup> 基于一阶剪切变形理论, 计算了层合板中脱层前缘的能量释放率. 张向阳和余寿文<sup>[14]</sup> 利用高阶摄动结合打靶法, 研究了受压薄膜脱层的屈曲、扩展问题. Jane 等<sup>[15]</sup> 采用 Rayleigh-Ritz 法, 分析了薄膜矩形脱层的后屈曲及扩展. 以上研究成果都是关于脱层梁板的扩展分析, 且大多局限于讨论薄膜脱层扩展情况, 至于对脱层圆柱壳的扩展研究还未见报道.

脱层的扩展实质上就是脱层的边界不断发生变动, 由此, 本文基于可动边界变分原理<sup>[16]</sup>, 并考虑脱层间的接触效应, 建立了脱层圆柱壳在外部压力作用下的非线性控制微分方程及相应的定解条件, 同时应用 Griffith 准则, 导出了圆柱壳脱层前缘各点处能量释放率的表达式. 然后, 采用有限差分法对控制方程进行求解, 将所得解代入能量释放率的表达式中, 则脱层前缘各点处的能量释放率大小可唯一确定. 算例中, 讨论了脱层大小、脱层深度、几何尺寸及纤维铺层方式等因素对轴对称层合圆柱壳脱层扩展的影响, 获得了一些有意义的结论.

## 1 基本方程

考虑图 1 所示的含环向贯穿脱层的圆柱壳, 壳的原始长度和厚度分别为  $L$  和  $h$ , 中面半径为  $R$ , 质量密度为  $\rho$ , 脱层长度为  $\beta \cdot L$ ,  $\beta$  为小于 1 的脱层长度参数, 脱层界面到脱层壳中面的距离为  $z^*$ , 脱层区左端至壳左端的距离为  $l$ . 为了研究脱层的扩展问题, 将脱层层合圆柱壳分为 4 个区域, 其中 2、3 为脱层区, 1、4 为未脱层区, 统一记为  $\Omega_i (i = 1, 2, 3, 4)$ , 每部分的  $x$  坐标原点取在各部分的最左端. 子壳 2 的厚度为  $h_2$ , 子壳 3 的厚度为  $h_3$ , 且有  $h_2 + h_3 = h$ . 此外, 层合圆柱壳脱层扩展的边界有两个, 记为  $C_j (j = 1, 2)$ ,  $\delta n$  为脱层沿其边界的法线方向发生的虚扩展.

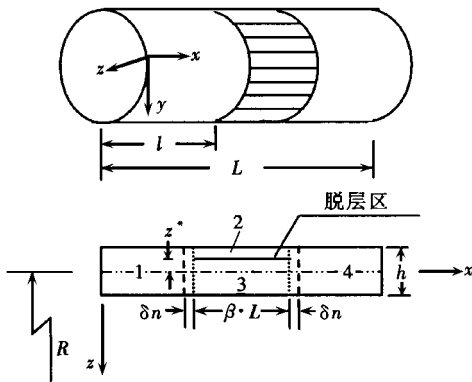


图 1 脱层圆柱壳几何示意图

设  $u_i, v_i, w_i$  分别为圆柱壳第  $\Omega_i$  区域内任一点的轴向、环向和径向位移, 它们在各自中面上的相应值分别为  $u_i, v_i, w_i$ , 则脱层圆柱壳的位移分量可表示为

$$\begin{cases} u_i(x, y, z) = u_i(x, y) - zw_{i,x}(x, y), \\ v_i(x, y, z) = v_i(x, y) - zw_{i,y}(x, y), \\ w_i(x, y, z) = w_i(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

设  $\varepsilon_{\bar{x}}, \varepsilon_{\bar{y}}$  和  $\varepsilon_{xy}$  为  $\Omega$  内任一点的应变, 其非线性应变-位移关系为

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \varepsilon_x + z K_{\bar{x}}, \quad \varepsilon_{\bar{y}} = \varepsilon_y + z K_{\bar{y}}, \quad \varepsilon_{\bar{xy}} = \varepsilon_{xy} + z K_{\bar{xy}}, \quad (2)$$

式中  $\varepsilon_{\bar{x}}, \varepsilon_{\bar{y}}, \varepsilon_{\bar{xy}}$  为相应的中面应变,  $K_{\bar{x}}, K_{\bar{y}}, K_{\bar{xy}}$  为中面曲率的改变量, 且

$$\epsilon_x = u_{i,x} + \frac{1}{2} w_{i,x}^2, \quad \epsilon_y = v_{i,y} - \frac{w_i}{R_i} + \frac{1}{2} w_{i,y}^2, \quad \epsilon_{xy} = u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x} w_{i,y}, \quad (3)$$

$$k_{ix} = -w_{i,xx}, \quad k_{iy} = -w_{i,yy}, \quad k_{ixy} = -2w_{i,xy}. \quad (4)$$

又根据经典层合板壳理论, 脱层壳中内力  $N_i$  和内力矩  $M_i$  与应变  $\epsilon_i$  和曲率改变量  $\kappa_i$  的关系为

$$\begin{bmatrix} N_i \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{(j)} & B_{ij}^{(j)} \\ B_{ij}^{(j)} & D_{ij}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_i \\ \kappa_i \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

其中

$$N_i = \begin{Bmatrix} N_{ix} \\ N_{iy} \\ N_{ixy} \end{Bmatrix}, \quad M_i = \begin{Bmatrix} M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{ixy} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_i = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \kappa_i = \begin{Bmatrix} \kappa_{ix} \\ \kappa_{iy} \\ \kappa_{ixy} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

$$(A_{ij}^{(j)}, B_{ij}^{(j)}, D_{ij}^{(j)}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad (7)$$

这里,  $A_{ij}^{(j)}, B_{ij}^{(j)}, D_{ij}^{(j)}$  分别为对应于  $\Omega_i$  区域内各子壳的拉伸、耦合和弯曲刚度,  $Q_{ij}^{(k)}$  为层合壳第  $k$  层的弹性常数.

设给定的外部径向分布载荷为  $q_i(x, y)$ , 则脱层壳的总势能为

$$\Pi = \sum_{i=1}^4 \iiint_{\Omega_i} U_i dx dy dz - \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i} q_i w_i dx dy - \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i} T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} w_i dx dy, \quad (8)$$

上式中,  $U_i$  为  $\Omega_i$  区域内单位体积的应变能,  $q_i$  为各部分子壳所受的外部径向载荷, 在本文中取  $q_1 = q_4 = q_3 = 0, q_2 = q, q$  为径向均布载荷.  $T_{ic}$  为接触效应系数, 且有  $T_{1c} = T_{4c} = 0, T_{2c} = -1, T_{3c} = 1. q^*$  为子壳 2、3 之间沿垂直于  $x$  方向每单位长度的接触力,  $q^*$  应当满足如下的条件:

$$q^* = \begin{cases} 0 & (\text{当 } w_2 - w_3 \leq 0), \\ f(w_2 - w_3) & (\text{当 } w_2 - w_3 > 0). \end{cases} \quad (9)$$

为简化问题, 可选取函数  $f(w_2 - w_3)$  为线弹簧函数, 即

$$f(w_2 - w_3) = k(w_2 - w_3), \quad (10)$$

上式中, 弹性系数  $k$  的值待确定. 而且, 由于预先无法知道  $w_2, w_3$  的值, 即判断不出  $w_2 - w_3 > 0$  还是  $w_2 - w_3 \leq 0$ , 故式(9)中的接触力  $q^*$  也待确定.

首先, 确定  $k$  值.  $k$  值可以用两串联弹簧的等效弹性系数来近似, 将脱层的上下部分, 即 2 区和 3 区分别视为一个弹簧, 当脱层面接触时, 其中一部分, 例如 2 区将承受力  $q^*$ , 于是 2 区在力  $q^*$  作用下, 其接触处的厚度改变量为

$$\delta_2 = \frac{q^* h_2}{E_2 2\pi R_d}, \quad (11)$$

式中  $R_d$  为脱层面的曲率半径. 同时, 力  $q^*$  也作用于 3 区, 则相应有

$$\delta_3 = \frac{q^* h_3}{E_3 2\pi R_d}, \quad (12)$$

因此, 2 区、3 区中面的相对位移为

$$w_2 - w_3 = \frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_3). \quad (13)$$

将式(11)、式(12)代入式(13)后, 再与式(10)联立求解, 可得

$$k = \frac{4\pi R_d}{h_2/E_2 + h_3/E_3}, \quad (14)$$

然后确定  $q^*$ . 注意到不管  $w_2 - w_3$  取何值, 方程(9)等价于

$$q^* = \max[f_1(w_2 - w_3), f_2(w_2 - w_3)], \quad (15)$$

其中:

$$f_1(w_2 - w_3) = 0, f_2(w_2 - w_3) = k(w_2 - w_3),$$

方程(15)又可与下列表达式近似等价

$$\hat{q} = \alpha(f_1, f_2)f_1 + \beta(f_1, f_2)f_2, \quad (16)$$

其中  $\alpha$ 、 $\beta$  是  $f_1$  和  $f_2$  的函数, 且满足如下条件:

$$\begin{cases} \text{当 } f_1 > f_2 \text{ 时,} & \alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 0, \\ \text{当 } f_1 \leq f_2 \text{ 时,} & \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 1, \end{cases} \quad (17)$$

满足上述条件的函数  $\alpha(f_1, f_2)$ 、 $\beta(f_1, f_2)$  可取为

$$\begin{cases} \alpha(f_1, f_2) = \frac{1}{2}[1 + \tanh A(f_1 - f_2)], \\ \beta(f_1, f_2) = \frac{1}{2}[1 - \tanh A(f_1 - f_2)], \end{cases} \quad (18)$$

其中  $A$  为某一给定的大数, 它可根据问题所要求的精度来取值(本文中取  $A = 10^{15}$ ). 因此, 当  $f_1(w_2 - w_3) = 0$  时, 接触力  $q^*$  可近似地表示为

$$\hat{q} = \frac{1}{2}[1 + \tanh(Af_2)]f_2, \quad (19)$$

将  $f_2 = k(w_2 - w_3)$  代入上式, 得

$$\hat{q} = \frac{1}{2}[1 + \tanh(Ak(w_2 - w_3))]k(w_2 - w_3), \quad (20)$$

式(20)即为脱层间接触力的计算式. 应用式(5), 且注意到脱层圆柱壳的脱层扩展问题是一个变边界的能量变分问题, 则由式(8)可得势能的变化量为

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i + \delta A_i} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} [ \varepsilon_i + \delta \varepsilon_i ] \\ [ \kappa_i + \delta \kappa_i ] \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(i)} & \mathbf{B}^{(i)} \\ \mathbf{B}^{(i)} & \mathbf{D}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [ \varepsilon_i + \delta \varepsilon_i ] \\ [ \kappa_i + \delta \kappa_i ] \end{Bmatrix} dx dy - \\ & \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i + \delta A_i} q_i(w_i + \delta w_i) dx dy - \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i + \delta A_i} T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d}(w_i + \delta w_i) dx dy - \Pi. \end{aligned} \quad (21)$$

考虑对称铺设层合壳, 即有  $\mathbf{B}^{(i)} = 0$ , 则上式变为

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i} \left\{ \varepsilon_i^T \mathbf{A}^{(i)} \delta \varepsilon + \kappa_i^T \mathbf{D}^{(i)} \delta \kappa_i \right\} dx dy - \\ & \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i} q_i \delta w_i dx dy - \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i} T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} \delta w_i dx dy + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \iint_{\delta A_i} \left\{ \varepsilon_i^T \mathbf{A}^{(i)} \varepsilon_i + \kappa_i^T \mathbf{D}^{(i)} \kappa_i \right\} dx dy - \\ & \sum_{i=1}^4 \iint_{\delta A_i} q_i w_i dx dy - \sum_{i=1}^4 \iint_{\delta A_i} T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} w_i dx dy, \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)中后3项又可写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \iint_{\delta A_i} \left\{ \varepsilon_i^T \mathbf{A}^{(i)} \varepsilon_i + \kappa_i^T \mathbf{D}^{(i)} \kappa_i \right\} dx dy - \\ & \sum_{i=1}^4 \iint_{\delta A_i} q_i w_i dx dy - \sum_{i=1}^4 \iint_{\delta A_i} T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} w_i dx dy = \\ & \sum_{i=1}^4 \oint_{C_j} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_i^T \mathbf{A}^{(i)} \varepsilon_i + \kappa_i^T \mathbf{D}^{(i)} \kappa_i - q_i w_i - T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} w_i \right\} \delta n_i dC_j \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (23)$$

利用式(3)~式(6),则式(22)变为

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i} \left\{ N_{xi} \delta \left[ u_{i,x} + \frac{1}{2} w_{i,x}^2 \right] + N_{yi} \delta \left[ v_{i,y} - \frac{w_i}{R_i} + \frac{1}{2} w_{i,y}^2 \right] + \right. \\ & N_{xyi} \delta (u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x} w_{i,y}) + M_{xi} \delta (-w_{i,xx}) + M_{yi} \delta (-w_{i,yy}) + \\ & \left. M_{xyi} \delta (-2w_{i,xy}) \right\} dx dy - \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i} q_i \delta w_i dx dy - \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i} T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} \delta w_i dx dy + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \oint_{C_j} \left\{ N_{xi} \left[ u_{i,x} + \frac{1}{2} w_{i,x}^2 \right] + N_{yi} \left[ v_{i,y} - \frac{w_i}{R_i} + \frac{1}{2} w_{i,y}^2 \right] + \right. \\ & N_{xyi} (u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x} w_{i,y}) + M_{xi} (-w_{i,xx}) + M_{yi} (-w_{i,yy}) + \\ & \left. M_{xyi} (-2w_{i,xy}) - q_i w_i - T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} w_i \right\} \delta n_i dC_j. \end{aligned} \quad (24)$$

对上式进一步处理,最后可得

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i} \left\{ \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (N_{xi}) - \frac{\partial}{\partial y} (N_{xyi}) \right] \delta u_i + \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (N_{xyi}) - \frac{\partial}{\partial y} (N_{yi}) \right] \delta v_i + \right. \\ & \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (M_{xi,x}) - \frac{\partial}{\partial y} (M_{yi,y}) - \frac{\partial}{\partial y} (M_{xyi,x}) - \frac{\partial}{\partial x} (M_{xyi,y}) - \frac{\partial}{\partial x} (N_{xi} w_{i,x}) - \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial y} (N_{yi} w_{i,y}) - \frac{\partial}{\partial x} (N_{xyi} w_{i,y}) - \frac{\partial}{\partial y} (N_{xyi} w_{i,x}) - \frac{N_{yi}}{R_i} - q_i - T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} \right] \delta w_i \left. \right\} dx dy + \\ & \sum_{i=1}^4 \oint_{C_j} \left\{ N_{xi} \delta u_i + N_{xi} w_{i,x} \delta w_i + N_{xyi} \delta v_i + N_{xyi} w_{i,y} \delta w_i - M_{xi} \delta w_{i,x} + M_{xi,x} \delta w_i - \right. \\ & M_{xyi} \delta w_{i,y} + M_{xyi,y} \delta w_i \left. \right|_{C_j} dC_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \oint_{C_j} \left\{ N_{xi} \left[ u_{i,x} + \frac{1}{2} w_{i,x}^2 \right] + \right. \\ & N_{yi} \left[ v_{i,y} - \frac{w_i}{R_i} + \frac{1}{2} w_{i,y}^2 \right] + N_{xyi} (u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x} w_{i,y}) + M_{xi} (-w_{i,xx}) + \\ & \left. M_{yi} (-w_{i,yy}) + M_{xyi} (-2w_{i,xy}) - q_i w_i - T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} w_i \right\} \delta n_i dC_j. \end{aligned} \quad (25)$$

由于都是在变边界上对  $u_i, v_i, w_i$  变分,有如下关系

$$\begin{cases} \delta u_i |_{C_j} = \delta (u_i |_{C_j}) - \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{C_j} \cdot \delta n_j, & \delta v_i |_{C_j} = \delta (v_i |_{C_j}) - \frac{\partial v_i}{\partial n} \Big|_{C_j} \cdot \delta n_i, \\ \delta w_i |_{C_j} = \delta (w_i |_{C_j}) - \frac{\partial w_i}{\partial n} \Big|_{C_j} \cdot \delta n_i, & \delta w_{i,x} |_{C_j} = \delta (w_{i,x} |_{C_j}) - \frac{\partial w_{i,x}}{\partial n} \Big|_{C_j} \cdot \delta n_i, \\ \delta w_{i,y} |_{C_j} = \delta (w_{i,y} |_{C_j}) - \frac{\partial w_{i,y}}{\partial n} \Big|_{C_j} \cdot \delta n_i. \end{cases} \quad (26)$$

利用式(26), 则由式(25)可得

$$\delta \Pi = \delta \Pi_1 + \delta \Pi_2 \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1 = & \sum_{i=1}^4 \iint_{A_i} \left\{ \left[ -\frac{\partial}{\partial x}(N_{xi}) - \frac{\partial}{\partial y}(N_{xyi}) \right] \delta u_i + \left[ -\frac{\partial}{\partial x}(N_{xyi}) - \frac{\partial}{\partial y}(N_{yi}) \right] \delta v_i + \right. \\ & \left[ -\frac{\partial}{\partial x}(M_{xi,x}) - \frac{\partial}{\partial y}(M_{yi,y}) - \frac{\partial}{\partial y}(M_{xyi,x}) - \frac{\partial}{\partial x}(M_{xyi,y}) - \frac{\partial}{\partial x}(N_{xi}w_{i,x}) - \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial y}(N_{yi}w_{i,y}) - \frac{\partial}{\partial x}(N_{xyi}w_{i,y}) - \frac{\partial}{\partial y}(N_{xyi}w_{i,x}) - \frac{N_{yi}}{R_i} - q_i - T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} \right] \delta w_i \Big\} dx dy + \\ & \sum_{i=1}^4 \oint_{C_j} \left\{ N_{xi} \delta(u_i | C_j) + N_{xyi} \delta(v_i | C_j) + (M_{xi,x} + M_{xyi,y} + N_{xi}w_{i,x} + \right. \\ & \left. N_{xyi}w_{i,y}) \delta(w_i | C_j) - M_{xi} \delta(w_{i,x} | C_j) - M_{xyi} \delta(w_{i,y} | C_j) \right\} dC_j, \quad (28) \\ \delta \Pi_2 = & \sum_{i=1}^4 \oint_{C_j} \left\{ \left[ N_{xi} \left( -\frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{C_j} \right) + N_{xyi} \left( -\frac{\partial v_i}{\partial n} \Big|_{C_j} \right) + (M_{xi,x} + M_{xyi,y} + N_{xi}w_{i,x} + \right. \right. \\ & \left. \left. N_{xyi}w_{i,y}) \left( -\frac{\partial w_i}{\partial n} \Big|_{C_j} \right) + M_{xi} \frac{\partial w_{i,x}}{\partial n} \Big|_{C_j} + M_{xyi} \frac{\partial w_{i,y}}{\partial n} \Big|_{C_j} \right] \right\} \cdot \delta n_i dC_j + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \oint_{C_j} \left\{ N_{xi} \left( u_{i,x} + \frac{1}{2} w_{i,x}^2 \right) + N_{yi} \left( v_{i,y} - \frac{w_i}{R_i} + \frac{1}{2} w_{i,y}^2 \right) + \right. \\ & \left. N_{xyi} (u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x}w_{i,y}) + M_{xi} (-w_{i,xx}) + M_{yi} (-w_{i,yy}) + \right. \\ & \left. M_{xyi} (-2w_{i,xy}) - qw_i - T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} w_i \right\} \delta n_i dC_j. \quad (29) \end{aligned}$$

对于本文所研究的脱层圆柱壳, 其脱层扩展的法线方向  $n$  即为圆柱壳的轴线方向  $x$ , 故式(29)又可写为

$$\begin{aligned} \delta \Pi_2 = & \sum_{i=1}^4 \oint_{C_j} \left\{ \left[ N_{xi} (-u_{i,x}) + N_{xyi} (-v_{i,x}) + (M_{xi,x} + M_{xyi,y} + N_{xi}w_{i,x} + \right. \right. \\ & \left. \left. N_{xyi}w_{i,y}) (-w_{i,x}) + M_{xi}w_{i,xx} + M_{xyi}w_{i,xy} \right] \right\} \cdot \delta n_i dC_j + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \oint_{C_j} \left\{ N_{xi} \left( u_{i,x} + \frac{1}{2} w_{i,x}^2 \right) + N_{yi} \left( v_{i,y} - \frac{w_i}{R_i} + \frac{1}{2} w_{i,y}^2 \right) + \right. \\ & \left. N_{xyi} (u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x}w_{i,y}) + M_{xi} (-w_{i,xx}) + M_{yi} (-w_{i,yy}) + \right. \\ & \left. M_{xyi} (-2w_{i,xy}) - qw_i - T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} w_i \right\} \delta n_i dC_j. \quad (30) \end{aligned}$$

脱层发生虚扩展  $\delta n$  (即假设脱层沿其边界的法线方向扩展  $\delta n$ ) 后, 层合壳的位移必然发生变化, 同时, 积分域也有一个面积变化:  $\delta A_i = \int_{C_j} \delta n_i dC_j$ . 因此,  $\delta \Pi_2$  是由于层合壳各个区域的面积发生变化  $\delta A_i$  时所引起的层合壳势能的变化量.

容易验证,  $\delta \Pi_1$  相当于脱层不发生虚扩展, 即脱层边界  $C_j$  固定不变时, 由层合壳的虚位移引起的层合壳势能的变化量. 根据虚位移原理, 当层合壳处于平衡状态时, 必有

$$\delta \Pi_1 = 0. \quad (31)$$

由式(31)可得脱层圆柱壳的非线性控制微分方程和相应的定解条件.

控制微分方程为

$$\left\{ \begin{aligned} & A_{11}^{(i)} u_{i,xx} + (A_{12}^{(i)} + A_{66}^{(i)}) v_{i,xy} + (A_{12}^{(i)} + A_{66}^{(i)}) w_{i,y} w_{i,xy} + A_{11}^{(i)} w_{i,x} w_{i,xx} + \\ & A_{66}^{(i)} w_{i,x} w_{i,yy} + A_{66}^{(i)} u_{i,yy} - A_{12}^{(i)} \frac{1}{R_i} w_{i,x} = 0, \\ & (A_{12}^{(i)} + A_{66}^{(i)}) u_{i,xy} + A_{66}^{(i)} v_{i,xx} + A_{22}^{(i)} v_{i,yy} + (A_{12}^{(i)} + A_{66}^{(i)}) w_{i,x} w_{i,xy} + \\ & A_{66}^{(i)} w_{i,y} w_{i,xx} + A_{22}^{(i)} w_{i,y} w_{i,yy} - A_{22}^{(i)} \frac{1}{R_i} w_{i,y} = 0, \\ & - (D_{11}^{(i)} w_{i,xxxx} + (2D_{12}^{(i)} + 4D_{66}^{(i)}) w_{i,xyyy} + D_{22}^{(i)} w_{i,yyyy}) + \\ & w_{i,xx} \left[ A_{11}^{(i)} u_{i,x} + \frac{1}{2} A_{11}^{(i)} w_{i,x}^2 + A_{12}^{(i)} v_{i,y} - A_{12}^{(i)} \frac{1}{R} w_i + \frac{1}{2} A_{12}^{(i)} w_{i,y}^2 \right] + \\ & 2A_{66}^{(i)} (u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x} w_{i,y}) w_{i,xy} + \left[ A_{12}^{(i)} u_{i,x} + \frac{1}{2} A_{12}^{(i)} w_{i,x}^2 + \right. \\ & \left. A_{22}^{(i)} v_{i,y} - A_{22}^{(i)} \frac{1}{R} w_i + \frac{1}{2} A_{22}^{(i)} w_{i,y}^2 \right] \left[ w_{i,yy} + \frac{1}{R} \right] + q_i + T_{ic} \frac{q^*}{2\pi R_d} = 0. \end{aligned} \right. \quad (32)$$

位移连续条件为

$$\left\{ \begin{aligned} & u_2(0, y) = u_1(L_1, y) + d_2 w_{1,x}(L_1, y), \quad v_2(0, y) = v_1(L_1, y) + d_2 w_{1,y}(L_1, y), \\ & u_3(0, y) = u_1(L_1, y) - d_3 w_{1,x}(L_1, y), \quad v_3(0, y) = v_1(L_1, y) - d_3 w_{1,y}(L_1, y), \\ & u_2(L_2, y) = u_4(0, y) + d_2 w_{4,x}(0, y), \quad v_2(L_2, y) = v_4(0, y) + d_2 w_{4,y}(0, y), \\ & u_3(L_3, y) = u_4(0, y) - d_3 w_{4,x}(0, y), \quad v_3(L_3, y) = v_4(0, y) - d_3 w_{4,y}(0, y), \\ & w_1(L_1, y) = w_2(0, y), \quad w_1(L_1, y) = w_3(0, y), \\ & w_{1,x}(L_1, y) = w_{2,x}(0, y), \quad w_{1,x}(L_1, y) = w_{3,x}(0, y), \\ & w_4(0, y) = w_2(L_2, y), \quad w_4(0, y) = w_3(L_3, y), \\ & w_{4,x}(0, y) = w_{2,x}(L_2, y), \quad w_{4,x}(0, y) = w_{3,x}(L_3, y). \end{aligned} \right. \quad (33)$$

力平衡连接条件为

$$\left\{ \begin{aligned} & N_{1xx}(L_1, y) = N_{2xx}(0, y) + N_{3xx}(0, y), \quad N_{4xx}(0, y) = N_{2xx}(L_2, y) + N_{3xx}(L_3, y), \\ & N_{1xy}(L_1, y) = N_{2xy}(0, y) + N_{3xy}(0, y), \quad N_{4xy}(0, y) = N_{2xy}(L_2, y) + N_{3xy}(L_3, y), \\ & M_{1x}(L_1, y) = M_{2x}(0, y) - d_2 N_{2xx}(0, y) + M_{3x}(0, y) + d_3 N_{3xx}(0, y), \\ & M_{4x}(0, y) = M_{2x}(L_2, y) - d_2 N_{2xx}(L_2, y) + M_{3x}(L_3, y) + d_3 N_{3xx}(L_3, y), \\ & Q_{1x}(L_1, y) = Q_{2x}(0, y) + Q_{3x}(0, y), \quad Q_{4x}(0, y) = Q_{2x}(L_2, y) + Q_{3x}(L_3, y). \end{aligned} \right. \quad (34)$$

端部边界条件为

$$\left\{ \begin{aligned} & w_1(0, y) = 0, \quad N_{1xx}(0, y) = 0, \quad N_{1xy}(0, y) = 0, \quad w_{1,x}(0, y) = 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{夹支}), \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & w_4(L_4, y) = 0, \quad N_{4xx}(L_4, y) = 0, \quad N_{4xy}(L_4, y) = 0, \quad w_{4,x}(L_4, y) = 0 \\ & w_1(0, y) = 0, \quad N_{1xx}(0, y) = 0, \quad N_{1xy}(0, y) = 0, \quad w_{1,xx}(0, y) = 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{简支}), \quad (36)$$

以上两式中  $d_i = h/2 - h_i/2$ .

综上各式, 脱层发生虚扩展  $\delta n$  时, 由于  $\delta \Pi_1 = 0$ , 则层合壳总势能的变分为

$$\delta \Pi = \delta \Pi_2, \quad (37)$$

令

$$G_i = [N_{xi}(-u_{i,x}) + N_{xyi}(-v_{i,x}) + (M_{xi,x} + M_{xyi,y} + N_{xi} w_{i,x} + N_{xyi} w_{i,y})(-w_{i,x}) +$$

$$\begin{aligned}
& M_{xi}w_{i,xx} + M_{xy}w_{i,xy}] + \frac{1}{2} \left[ N_{xi} \left( u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right) + N_{yi} \left( v_{i,y} - \frac{w_i}{R_i} + \frac{1}{2}w_{i,y}^2 \right) + \right. \\
& N_{xyi}(u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x}w_{i,y}) + M_{xi}(-w_{i,xx}) + M_{yi}(-w_{i,yy}) + \\
& \left. M_{xyi}(-2w_{i,xy}) \right] - q_i w_i - T_{ic} \frac{q}{2\pi R_d} w_i, \quad (38)
\end{aligned}$$

则有

$$\delta \Pi = \sum_{i=1}^4 \oint_{C_j} G_i \delta n_i dC_j. \quad (39)$$

## 2 Griffith 能量释放率

脱层扩展的实质是脱层前沿边界的变动,可以根据裂纹扩展的 Griffith 准则来建立能量释放率的基本方程. 设脱层发生虚扩展  $\delta n$  时,脱层区域面积的变化为  $\delta A$ , 根据能量守恒原理,外荷载在这一过程对脱层圆柱壳所作的功一部分转化为弹性应变能,另一部分转化为脱层扩展而消耗的能量,即有

$$\delta(\Pi + \Gamma) = 0, \quad (40)$$

式中,  $\Pi = U - W$  表示弹性系统总的势能,  $U$  表示系统的应变能,  $W$  表示系统的外力功;  $\Gamma$  表示由于脱层扩展而消耗的能量,则根据 Griffith 准则,能量释放率可表示为

$$G = - \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \Pi}{\delta A}, \quad (41)$$

故脱层扩展的平均能量释放率为

$$G_a = - \frac{\delta \Pi}{\delta A} = - \sum_{i=1}^4 \oint_{C_j} G_i \delta n_i dC_j \left/ \left[ \int_{C_j} \delta n dC_j \right] \right. . \quad (42)$$

如果脱层只在部分边界上发生扩展,即在脱层边界  $C_j$  的某一段边界  $\Delta C_j$  上  $\delta n$  大于 0,而在其余的边界  $C_j - \Delta C_j$  上  $\delta n$  等于 0,那么此扩展的平均能量释放率为

$$G_a = - \sum_{i=1}^4 \int_{\Delta C_j} G_i \delta n_i dC_j \left/ \left[ \int_{\Delta C_j} \delta n dC_j \right] \right. . \quad (43)$$

显然,平均能量释放率与扩展方式有关,而在一般情况下,脱层的实际扩展方式是很难预测的,  $\delta n$  是一个未知量,平均能量释放率对脱层扩展分析没多大意义. 为此,假设  $\Delta C_j$  为脱层边界  $C_j$  上包含某一给定点的一个微段,即脱层只在此微段上发生任意形式的虚扩展. 命  $\Delta C_j$  无限减小而趋于此给定点,由式(43)可得到脱层在一点处扩展的能量释放率为

$$G = - \lim_{\Delta C_j \rightarrow 0} \sum_{i=1}^4 \int_{\Delta C_j} G_i \delta n_i dC_j \left/ \left[ \int_{\Delta C_j} \delta n dC_j \right] \right. . \quad (44)$$

从式(44)可以看出,  $G$  就代表了整个边界或部分边界扩展时脱层边界上各点的能量释放率分布.

对界面  $C_1$ : 显然有

$$\delta n_1 = - \delta n_2 = - \delta n_3 = - \delta n,$$

再根据式(44)可得脱层界面  $C_1$  的能量释放率为

$$G_{\text{界面}C_1} = \lim_{\Delta C_1 \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta C_1} (G_1 - G_2 - G_3) \delta n dC_1}{\int_{\Delta C_1} \delta n dC_1} = G_1 - G_2 - G_3. \quad (45)$$



对界面  $C_2$  : 显然又有

$$\delta n_4 = - \delta n_2 = - \delta n_3 = - \delta n_1.$$

同样由式(44) 可得脱层界面  $C_2$  的能量释放率为

$$G_{\text{界面}C_2} = \lim_{\Delta C_2 \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta C_2} (G_4 - G_2 - G_3) \delta n dC_2}{\int_{\Delta C_2} \delta n dC_2} = G_4 - G_2 - G_3. \quad (46)$$

只要通过求解脱层壳的控制微分方程式(32) 及相应的定解条件式(33)~ 式(36), 求出位移解  $u_i, v_i, w_i$ , 再由式(38) 和式(44) 即可确定脱层壳的能量释放率. 在对控制方程求解时, 本文是采用有限差分法来完成的. 经过差分处理, 控制方程和定解条件由最初的偏微分方程组转化为差分格式的代数方程组, 然后再运用牛顿迭代法求解.

### 3 计算结果

为简便起见, 在算例只对轴对称层合圆柱壳的脱层扩展进行分析, 讨论脱层长度、脱层深度、几何尺寸及纤维铺层方式等参数对脱层前缘能量释放率  $G$  的影响.

在讨论由径向外载荷引起的脱层扩展之前, 先分析各向同性表面脱层圆柱壳只在区域  $\Omega_2$  承受一定径向均布外载荷作用的径向变形, 以验证本文的分析方法. 此时  $\Omega_2$  区域变为边界固支的圆柱壳, 此情形的各向同性轴对称圆柱壳的径向位移可根据文献[17] 求得. 脱层区  $\Omega_2$  的几何参数为  $L/R = 5/3, R/h = 30$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 图2 给出了当径向载荷  $Q$  取定值  $1.875 \times 10^4$  的情况下 ( $Q = qL^4/(A_{22}h^3)$ ), 脱层壳  $\Omega_2$  区的径向位移  $w$  随坐标  $x$  的变化曲线, 由图可见, 两种方法的结果吻合得较好, 从而证实了本文分析方法和计算编程是可靠的.

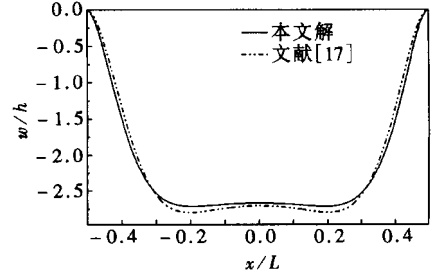


图2 脱层区  $\Omega_2$  的径向位移

下列各图讨论了不同几何和材料参数对脱层前缘能量释放率  $G$  的影响.

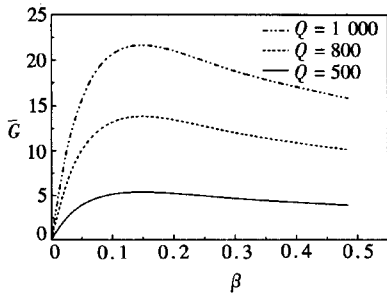


图3 脱层长度对能量释放率的影响

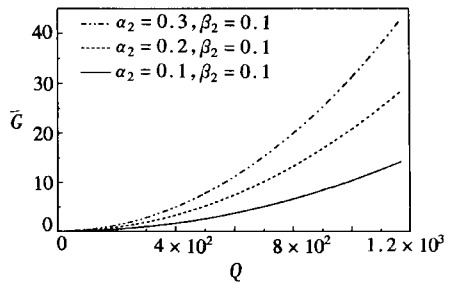


图4 脱层深度对能量释放率的影响

#### 3.1 脱层长度的影响

对于几何参数为  $L/R = 5/3, R/h = 30$ , 脱层深度参数  $\alpha_2 (= h_2/h)$  为 0.2, 径向外载荷  $Q$  分别为 500、800 和 1 000 时的两端固支面内可动各向同性脱层壳 ( $\nu = 0.3$ ), 图3 给出了当脱层位于壳的轴向对称中心时 (即  $l = ((1 - \beta)L)/2$ ), 其能量释放率随脱层长度  $\beta$  的变化曲线. 图中纵坐标  $G$  为能量释放率  $G$  与  $(Eh^5)/((1 - \nu^2)L^4)$  的比值 (以下各向同性脱层壳  $G$  的定义

同此)。从图中可看出,在一定的外载荷作用下,脱层圆柱壳的能量释放率  $G$  刚开始随  $\beta$  的增大而增大,但当  $\beta$  增大到一定值时,能量释放率  $G$  达到最大值,此后随  $\beta$  的继续增大又开始减小。这说明对于这种圆柱壳脱层,若在一定的外载荷作用下发生扩展,则其扩展很可能是稳定的。

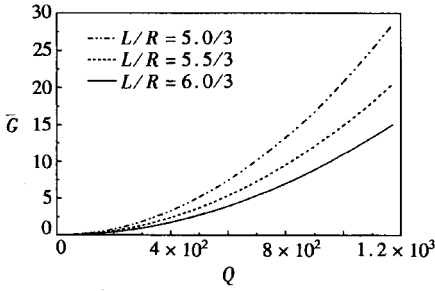


图 5 几何尺寸  $L/R$  对能量释放率的影响

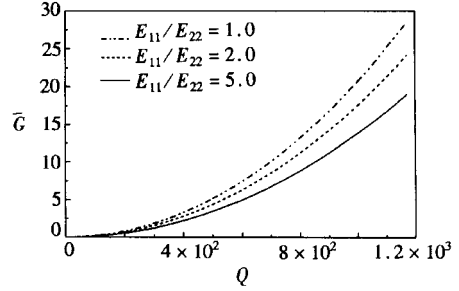


图 6  $E_{11}/E_{22}$  值对能量释放率的影响

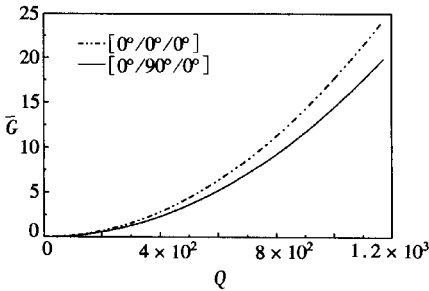


图 7 铺层方式对能量释放率的影响(材料 2)

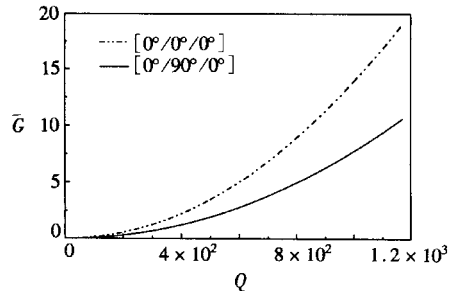


图 8 铺层方式对能量释放率的影响(材料 3)

### 3.2 脱层深度的影响

对于  $L/R = 5/3$ ,  $R/h = 30$ ,  $\beta = 0.1$ , 脱层深度  $\alpha_2$  分别为 0.1, 0.2 和 0.3 时的两端固支面内可动各向同性脱层壳 ( $\nu = 0.3$ ), 图 4 给出了当脱层位于壳的轴向对称中心时, 其能量释放率随径向外载荷的变化曲线。从图中可看出, 脱层深度越大, 能量释放率  $G$  也越大, 说明位置越深的脱层在径向外载荷作用下, 更容易发生扩展。

### 3.3 几何尺寸 $L/R$ 的影响

图 5 给出了不同  $L/R$  值的各向同性对称脱层圆柱壳, 其能量释放率与径向外载荷的关系曲线。脱层壳的几何参数为  $R/h = 30$ , 脱层参数为  $\alpha_2 = 0.2$ ,  $\beta = 0.1$ 。从图中可看出, 脱层壳的能量释放率与壳的几何尺寸  $L/R$  值成一种反比的趋势, 说明了脱层壳的几何尺寸  $L/R$  值越大, 脱层越不易发生扩展。

### 3.4 材料的影响

图 6 给出了不同铺设材料脱层壳的能量释放率随径向外载荷的变化曲线。算例中选用了 3 种材料来铺设层合壳, 其中材料 1 为各向同性材料, 材料 2 和材料 3 为各向异性材料, 其弹性常数数值列表 1, 脱层壳的几何参数为  $L/R = 5/3$ ,  $R/h = 30$ , 脱层参数为  $\alpha_2 = 0.2$ ,  $\beta = 0.1$ , 铺层顺序为  $[0^\circ/0^\circ/0^\circ]_{10}$ , 其中  $0^\circ$  表示材料主方向与壳的纵轴同向。图中纵坐标  $G$  为能量释放率  $G$  与  $(E_{22}h^5)/((1-\nu_{12}\nu_{21})L^4)$  的比值(以下各向异性脱层壳  $G$  的定义同此)。从图中可看到, 材料 1 的  $E_{11}/E_{22}$  值最小, 其  $G$  值最大; 材料 3 的  $E_{11}/E_{22}$  值最大, 而其  $G$  值最小。这显示了脱层壳的能量释放率与铺层材料的  $E_{11}/E_{22}$  值成一种反比的趋势, 说明了脱层壳的铺层材

料  $E_{11}/E_{22}$  值越大, 脱层越不易发生扩展.

表 1 弹性常数

	$E_{11}/E_{22}$	$G_{12}/E_{22}$	$\nu_{12}$
材料 1	1.0	0.38	0.30
材料 2	2.0	0.43	0.30
材料 3	5.0	0.50	0.25

### 3.5 铺层状况的影响

图 7、图 8 给出了不同铺层方式脱层壳的能量释放率随径向外载荷的变化曲线. 脱层壳的几何参数和脱层参数与上例相同, 所用复合材料分别为材料 2 和材料 3. 从图中可看出,  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{10}$  铺设的脱层壳其能量释放率比  $[0^\circ/0^\circ/0^\circ]_{10}$  铺设的小, 说明随着铺设材料各向异性程度的增加, 脱层越不易发生扩展. 此外, 比较图 7 和图 8 可知随着材料  $E_{11}/E_{22}$  值的增大, 铺层次序对能量释放率的影响更显著.

另外, 从以上各图可知, 脱层壳的能量释放率均随着径向外载荷的增大而增加, 说明载荷越大, 脱层发生扩展的可能性也越大.

## 4 结 论

本文基于可动边界变分原理, 采用非线性层合壳理论及 Griffith 准则, 建立了圆柱壳脱层前缘各点处能量释放率的表达式. 算例中, 讨论了脱层大小、脱层深度、几何尺寸及纤维铺层方式等因素对轴对称层合圆柱壳脱层扩展的影响, 获得了如下结论.

脱层长度较小时, 能量释放率  $G$  随脱层长度  $\beta$  的增加而增加, 但当  $\beta$  增加到一定值时, 能量释放率  $G$  达到最大值, 然后随  $\beta$  的继续增大又开始减小; 随着脱层深度的增加, 脱层圆柱壳的能量释放率增大, 脱层发生扩展的可能性也越大; 随着壳的几何尺寸  $L/R$  值、材料  $E_{11}/E_{22}$  比值的增大及铺设材料各向异性程度的增加, 脱层圆柱壳的能量释放率减小, 脱层越不易发生扩展; 载荷越大, 能量释放率  $G$  也越大, 脱层越容易扩展.

### [参 考 文 献]

- [1] Chai H, Babcock C D, Knauss W. One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling[J]. Journal of Solids and Structure, 1981, 17(11): 1069-1083.
- [2] Sallam S, Simitses G J. Delamination buckling and growth of flat, cross-ply laminates[J]. Composite Structure, 1985, 4(4): 361-381.
- [3] Yin W L. Axisymmetric buckling and growth of a circular delamination in a compressed laminate [J]. Int J Solids Structures, 1985, 21(5): 503-514.
- [4] Witcomb J D. Finite element analysis of instability related delamination growth[J]. J Composite Materials, 1981, 15(5): 403-426.
- [5] Zafer Kutlu, CHANG Fu-kuo. Modeling compression failure of laminated composites containing multiple through-the-width delaminations[J]. Journal of Composite Materials, 1992, 26(3): 350-387.
- [6] Chai H. Two-dimensional modeling of compressive failure in delaminated laminates[J]. Journal of Composite Materials, 1985, 19(1): 67-98.
- [7] Whitcomb J D, Shivakumar K N. Strain-energy release rate analysis of plates with postbuckled delaminations[J]. Composite Structure, 1989, 23(7): 714-734.
- [8] Whitcomb J D. Three-dimensional analysis of a postbuckled embedded delamination[J]. Composite

- Structure, 1989, **23**(9): 862-889.
- [9] Sheinman I, Kardomateas G K. Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates[J]. Int J Solids Structures, 1997, **34**(4): 451-459.
- [10] Davidson B D, Gharibian S J, Yu L J. Evaluation of energy release rate based approaches for predicting delamination growth in laminated composites[J]. Int J Fracture, 2000, **105**(4): 343-365.
- [11] Nilsson K F, Asp L E, Alpmann J E, et al. Delamination buckling and growth for delaminations at different depths in a slender composite panel[J]. Int J Solids Structures, 2001, **38**(17): 3039-3071.
- [12] Park O, Sanker B V. Crack-tip force method for computing energy release rate in delaminated plates[J]. Composite Structure, 2002, **55**(4): 429-434.
- [13] Wang J L, Qiao P Z. On the energy release rate and mode mix of delaminated shear deformable composite plates[J]. Int J Solids Structures, 2004, **41**(9/10): 2757-2779.
- [14] 张向阳, 余寿文. 圆形脱层的轴对称屈曲及扩展分析[J]. 固体力学学报, 1996, **17**(4): 331-334.
- [15] Jane K C, Liao H W, Wien Hong. Validation of the Rayleigh-Ritz method for the postbuckling analysis of rectangular plates with application to delamination growth[J]. Mechanics Research Communications, 2003, **30**(6): 531-538.
- [16] 钱伟长. 变分法及有限元(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 1980.
- [17] 郭明. 正交各向异性复合材料圆柱壳轴对称大变形解析[J]. 固体火箭技术, 1997, **20**(2): 61-67.

## Analysis of Delamination Growth for Composite Laminated Cylindrical Shells Under External Pressure

FU Yi-ming<sup>1</sup> YANG Jin-hua<sup>1,2</sup>

(1. College of Mechanics and Aerospace, Hunan University,  
Changsha 410082, P. R. China;

2. College of Bridge and Structure Engineering, Changsha University of Science  
& Technology, Changsha 410076, P. R. China)

**Abstract:** The delamination growth may occur in delaminated cylindrical shells under external pressure. This will cause structure failure. By using the variational principle of moving boundary and considering the contact effect between delamination regions, the delamination growth was investigated for cylindrical shells under the action of external pressure. At the same time, according to the Griffith criterion, the formulas of energy release rate along the delamination front were obtained. In the numerical calculation, the delamination growth of axisymmetrical laminated cylindrical shells was analyzed. And the effects of delamination sizes and depths, the geometrical parameters, the material properties and the laminate stacking sequences on delamination growth were discussed.

**Key words:** composite; laminated cylindrical shell; external pressure; delamination growth; energy release rate; contact effect