

# 冲击接触问题的一种双共轭投影梯度算法<sup>\*</sup>

李南生<sup>1</sup>, 任魁生<sup>1</sup>, 沙德松<sup>2</sup>

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092;  
2. 大连理工大学 工程力学系, 大连 116023)

(吕和祥推荐)

**摘要:** 根据冲击接触计算模型所需满足的基本控制方程和非线性互补条件, 应用非线性互补问题与约束优化的等价关系将非线性互补接触问题转变成一个非线性规划问题, 系统地推导建立了冲击接触问题的一种双共轭投影梯度计算方法. 增广 Lagrange 乘子法克服了罚函数要求减小迭代步长以达到计算稳定的限制, 即使对于冲击接触问题亦可以采用较大迭代步长, 在形成的与原互补问题等价的无约束规划模式下, 应用双共轭投影梯度算法提高非线性搜索速度和计算效率. 算法模型计算结果表明, 所建立的双共轭投影梯度计算理论及方法是正确有效的.

**关键词:** 冲击接触问题; Lagrange 乘子法; 双共轭投影梯度; 数值算法

**中图分类号:** O343.3      **文献标识码:** A

## 引 言

冲击接触问题经时空离散后得到的基本控制方程由两组方程构成, 一组是任何动力体系都必须满足的动力学基本方程(针对接触体系的变量特点, 其中自然包含接触作用因素, 因而变量数通常较一般动力学问题为多), 其次为描述接触问题时所独有的接触约束方程. 然而对接触约束方程亦存在两种类型, 一类是以等式形式表示的约束条件, 另一类则是以不等式形式提出的约束方程<sup>[1-2]</sup>. 从求解接触问题的角度考虑, 这类问题属于具有约束的非线性方程的求解问题. 消除约束条件, 将有约束方程转换成常规的无约束方程进行求解是计算此类问题的关键. 罚函数法<sup>[3]</sup>和 Lagrange 乘子法<sup>[4]</sup>是众所周知的两种接触问题基本算法. 如文献[5]所指出, 上述两类施加接触约束的算法各自存在局限性, 为了避免动力接触问题罚函数法由于满足表面接触条件所带来的数值解的振荡, 及常规 Lagrange 乘子法与显式积分算法不相容的缺点, 文献[6]提出一种避免罚函数法和 Lagrange 乘子法在接触问题显、隐式时程积分计算中所产生的使用限制的一种新算法——增广 Lagrange 双共轭梯度算法. 本文对此算法加以改进, 在保持原有算法优点的前提下, 进一步改善此类算法的计算效益与精度.

冲击接触问题数学模型中接触面上的法向接触力(或压应力)与接触面的间隙这两者之间形成互补关系, 亦即其中一量非零时, 则另一量必为零, 两个量不能同时为零; 同样切向力与摩擦关系之间构成另一互补关系. 接触力与对应位移之间这种关系一般被称为 NCP 问题, 即非

\* 收稿日期: 2006-10-12; 修订日期: 2007-06-07

作者简介: 李南生(1960—), 男, 湖南涟源人, 教授, 博士(联系人. + 86-21-65624668; E-mail: linansheng@online.sh.cn).

线性互补问题 (non-linear complementarity problem)<sup>[7]</sup>。接触问题中的 NCP 函数通过引入增广 Lagrange 乘子将其转化为等价的无约束优化问题, 而对应的无约束优化解采用双共轭投影梯度法搜索获得。本文算法提出基于下面两个基本考虑, 一是主算法与时程积分的相容性, 使增广 Lagrange 乘子法可以适用于显式时程积分; 其次是计算效率和精度, 计算中可以选取较大的时间步长, 并且不致因增大时间步长导致精度下降。

## 1 接触问题的时空离散形式

冲击接触问题的一般描述为:

动力平衡方程

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

边界条件

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma;$$

初值条件

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0), \quad \dot{\mathbf{v}}^0(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

接触约束条件

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}, t) - g_n(\mathbf{x}, t) &\leq 0, \quad \sigma_\tau(\mathbf{x}, t) - \mu |\sigma_n(\mathbf{x}, t)| \leq 0, \\ \sigma_n(\mathbf{x}, t) &\leq 0, \quad \sigma_n(u_n(\mathbf{x}, t) - g_n(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c; \end{aligned}$$

积分弱形式

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} (\rho \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Omega - \\ \int_{\Gamma_f} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_c} (\sigma_n - \sigma_\tau) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

上述各式中, 物理量含义分别为:  $\sigma$ 、 $\varepsilon$  为应力和应变张量,  $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{v}$  为质点位移和速度向量,  $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{p}$  为体积力和面力,  $g_n$  为法向接触间隙,  $\sigma_\tau$ 、 $\sigma_n$  为切向和法向接触力,  $\mathbf{U}$ 、 $\dot{\mathbf{U}}$  为初位移和初速度,  $\mathbf{U}$  为已知边界位移,  $\rho$ 、 $\mu$  为材料密度、摩擦因数;  $\mathbf{n}$  为单位外法线向量。  $\Omega$  为研究区域,  $\Gamma$  为边界表面;  $\Gamma_c$  为接触表面。

分别采用有限元和前增量差分法<sup>[5]</sup>对上述冲击接触问题进行时空离散化后, 动力接触体系所需满足的方程为

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \Delta \mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{P}(\sigma^{(n)}) + {}_c \mathbf{P}(\sigma_c^{(n)}) - \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^{(n+1)}, \\ \dot{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \dot{\mathbf{u}}^{(n+1)} + \frac{1}{2\Delta t} \Delta \mathbf{u}^{(n+1)}, \quad \ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)} + \frac{1}{\Delta t^2} \Delta \mathbf{u}^{(n+1)}, \\ \mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \Delta \mathbf{u}^{(n)}. \end{cases} \quad (1)$$

同时必须满足以下约束互补条件 (以下压应力取为正):

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \sigma_n \geq 0, \quad \sigma_n g = 0, \quad g = u_n - g_n, \\ \Phi = \mu \sigma_n - \sigma_\tau \geq 0, \quad \dot{\mathbf{u}}_\tau = \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_\tau}, \quad \xi \geq 0, \quad \xi \Phi = 0 \end{aligned}$$

上列式中物理量和符号含义为,  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\Delta t$  为时间增量,  $\Delta \mathbf{u}$  为位移增量,  $\ddot{\mathbf{u}}$  为加速度向量,  $\dot{\mathbf{u}}$  为速度向量,  $\mathbf{x}$  为位置矢径,  $\dot{\mathbf{u}}$  为预测速度,  $\ddot{\mathbf{u}}$  为预测加速度,  $\sigma_c^{(n)}$  为第  $n$  步迭代时的表面接触力,  $g$  为法向接触间隙,  $\dot{\mathbf{u}}_\tau$  为切线滑移速度,  $\xi$  为互补参数,  $\Phi$  为摩擦势函数。上角标表示

离散的时间步数。为表达清晰起见,以下省略物理量符号上的波浪号。

## 2 本构关系和接触间隙

式(1)第1项中  $P(\sigma^{(n)})$  由3部分构成,即如下式

$$P(\sigma^{(n)}) = \sum_e \left[ \int_{\Omega^e} N^T f d\Omega + \int_{\Gamma_f^e} N^T p d\Gamma \right] - \sum_e \int_{\Omega^e} B^T \sigma d\Omega$$

而  $cP(\sigma_c)$  则为

$$cP(\sigma_c) = \sum_e (G^T \sigma_c) = \sum_e [G_n^T \alpha_n + G_\tau^T \alpha_\tau]$$

上两式中,  $B$  为应变位移矩阵,  $G$  为接触约束矩阵,  $G_n$ 、 $G_\tau$  是约束矩阵的法向与切向分矩阵,  $N$  为形函数矩阵, 符号  $e$  表示单元号。其余量含义与上面相同。由上面公式可知,  $P(\sigma)$  包含内力荷载项和外力荷载项, 外力荷载项由作用在接触体上的体积力和面力确定, 内力荷载项取决于物体的变形状态和材料本构关系。 $cP(\sigma_c)$  依赖于接触体的几何构形和接触作用力, 而与材料本构关系没有显式的直接关系。

针对冲击接触问题采用粘塑性率形式本构关系是恰当的<sup>[7]</sup>。根据热力学最大耗散能原理, 可以推出粘塑性介质率形式本构方程和广义硬化方程<sup>[8]</sup>

$$\dot{\sigma} = C \left[ \dot{\varepsilon} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right], \quad \zeta = \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}$$

式中,  $\dot{\varepsilon}$ 、 $\dot{\sigma}$  分别为应力率、应变率张量,  $C$  为弹性模量矩阵;  $\Psi$ 、 $\Phi$  分别为粘塑性函数和塑性势函数,  $\sigma$  为 Cauchy 应力。 $(\zeta, \omega)$  是一对功共轭的内变量, 两者之间存在如下关系:

$$\dot{\zeta} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} \dot{\omega} = - D \dot{\omega}$$

上式中  $D$  叫做硬化模量矩阵。通过对上列率相关的本构方程和广义硬化方程进行增量梯度积分, 给出对应的对称形式切线模量和增量形式粘塑性本构关系式<sup>[7]</sup>。本文采用常用的几何非线性关系, 即 Cauchy 应力率与变形率之间的关系。

约束矩阵  $G$  的形成, 根据进入接触状态下接触点对的情况决定, 通过接触搜索算法求出接触对的位置, 从而给出接触间隙向量  $g = GX$ ,  $X$  为由所有的接触点位置坐标所构成的列向量, 其含义在文献[6]中已作说明。约束矩阵  $G$  与其法向与切向分矩阵  $G_n$ 、 $G_\tau$  之间关系为

$$G_n = \Pi^T G, \quad G_\tau = (I - \Pi \Pi^T) G$$

式中,  $I$  是一个  $N_{\text{dim}} \times N_{\text{dim}}$  ( $N_{\text{dim}} = \text{空间维数}(N = 2 \text{ 或 } 3) \times \text{接触点对数}(J_c)$ ) 的单位对角矩阵;  $\Pi \in R^{N_{\text{dim}}} \times R^{J_c}$  的一个拟对角矩阵, 其前面第  $i$  个主对角元素为第  $i$  个接触点的单位外法线向量, 最后一个主对角元素为零。

## 3 双共轭投影梯度算法实现步骤

问题描述 寻求应力解  $\sigma^{(k)}$ , 满足基本方程(1), 并符合以下接触互补条件:

$$\begin{cases} \sigma_n^{(k)} \geq 0, g_n^{(k)} \geq 0, \sigma_n^{(k)} g_n^{(k)} = 0, \\ \Phi^{(k)} \geq 0, g_\tau^{(k)} \geq 0, \Phi^{(k)} g_\tau^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

接触点对间的法向接触力  $\sigma_n^{(k)}$  必须为压力, 法向间隙  $g_n^{(k)}$  满足非穿透性条件, 法向接触力  $\sigma_n^{(k)}$  与法向间隙  $g_n^{(k)}$  不能同时为零或同时非零, 故存在上述的互补关系。式(2)第2行表示摩擦势函数  $\Phi$  与切向滑动  $g_\tau$  位移之间的互补关系式。

实质上互补条件(2)仅是求解离散方程(1)中的控制条件,亦即冲击接触问题所需满足的特定的接触压应力条件、非穿透性条件、Coulomb 摩擦条件的集成。假定当前迭代求解步基本方程(1)的解已知,即当前接触体构形确定,通过接触搜索方法搜索接触点对配对方式,接触部位离散结点(接触点对)在两次相邻迭代步之间的法向和切向间隙表达成当前各应力和位移分量的函数关系。用位移增量表达的间隙向量的形式为

$$\mathbf{g}_n^{(k+1)} = \mathbf{g}_0^{(k)} + \mathbf{G}_n^{(k)} \Delta \mathbf{u}^{(k)}(\sigma), \quad \mathbf{g}_\tau^{(k+1)} = \mathbf{G}_\tau^{(k)} \Delta \mathbf{u}^{(k)}(\sigma), \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{g}_n$ 、 $\mathbf{g}_0$ 、 $\mathbf{g}_\tau$  分别为法向的当前、初始间隙和切向间隙;  $\mathbf{G}_n$ 、 $\mathbf{G}_\tau$  为由接触点对位置坐标确定的法向和切向接触分矩阵;  $\Delta \mathbf{u}$  为当前增量步的位移增量,它显然是当前应力和位移值的函数,同时也包含当前接触力作用项。迭代求解基本控制方程(1)得出位移增量的试探解  $\Delta \mathbf{u}$ , 迭代求解时引入增广 Lagrange 乘子,将接触间隙关系式(3)和互补关系(2)联系起来,就构成接触互补方程的退化的增广 Lagrange 双共轭投影梯度计算模式<sup>[9-11]</sup>。

退化的增广 Lagrange 双共轭投影梯度算法具体执行步骤如下:

第一步 置迭代数  $k = 0$ 。设定初始 Lagrange 乘子和初应力值  $\lambda_\tau^{(k)}$ 、 $\sigma^{(k)}$  (上标  $k$  表示迭代步数,下同),计算(或者设定)当前接触应力(法向和切向)和互补值  $\sigma_n^{(k)}$ 、 $\sigma_\tau^{(k)}$ 、 $\Phi^{(k)}$ 。

第二步 在初始应力、位移已知情况,由离散方程(1)求出位移增量  $\Delta \mathbf{u}$ ,再代入公式(3)计算出接触间隙  $\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}(\sigma_c, \sigma^{(k)})$ ,  $\sigma_c$  为接触力。

第三步 互补条件采用 Lagrange 乘子将原接触问题转化为无约束优化问题,与互补条件等价的优化问题的增广 Lagrange 乘子更新采用下式计算<sup>[9-10]</sup>:

$$\lambda_\tau^{(k)} = \max\left\{0, \lambda_\tau^{(k-1)} - \omega_\tau \Phi^{(k-1)}\right\}$$

第四步 子问题:确定  $\sigma^{(k)}$  使之满足:

$$\mathbf{g}^{*(k)} = \begin{cases} 0, & \text{当 } g_n^{(k)} > 0 \text{ 和 } \sigma_n^{(k)} = 0, \\ \mathbf{g}^{(k)} + \frac{\sigma_\tau^{(k)}}{\sigma_\tau^{(k)}} \max\left\{0, \lambda_\tau^{(k)} - \omega_\tau \Phi^{(k-1)}\right\}, & \text{其它,} \\ \mathbf{g}^{*(k)} = \mathbf{0} \end{cases}$$

子步 1 置子步迭代数  $j = 0$ , 计算

$$\sigma^{(j)} = \sigma^{(k)}, \quad \mathbf{g}^{(j)} = \mathbf{g}^{(k)},$$

$$I(g_n^{(j)}, \sigma_n^{(j)}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } g_n^{(j)} > 0 \text{ 和 } \sigma_n^{(j)} = 0, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

$$\mathbf{g}^{*(j)} = \begin{cases} 0, & \text{当 } I(g_n^{(j)}, \sigma_n^{(j)}) = 1, \\ \mathbf{g}^{(j)} + \frac{\sigma_\tau^{(j)}}{\sigma_\tau^{(j)}} \max\left\{0, \lambda_\tau^{(k)} - \omega_\tau \Phi^{(j)}\right\}, & \text{其它.} \end{cases}$$

子步 2 内层增量迭代计算。计算  $\Delta \sigma^{(k)}$  满足增量计算式

$$(\partial \mathbf{g}^{*(j)} / \partial \sigma^{(j)}) \Delta \sigma^{(j)} = -\mathbf{g}^{*(j)}.$$

内层迭代步 1 置迭代数  $l = 0$ , 给出双共轭梯度法计算的初始值

$$\sigma^{(l)} = \sigma^{(j)}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{g}^{*(l)} \\ \mathbf{g}^{*(l)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}^{*(j)} \\ \mathbf{g}^{*(j)} \end{Bmatrix}.$$

内层迭代步 2 ( $l \geq 1$ )

$$\rho^{(l)} = 2 \langle \mathbf{g}^{*(l)}, \mathbf{g}^{*(l)} \rangle, \quad \beta^{(l)} = \rho^{(l)} / \rho^{(l-1)};$$

$$\begin{cases} \mathbf{d}^{(l)} \\ \mathbf{d}^{(l)} \\ \mathbf{d}^{(l)} \end{cases} = - \begin{cases} \mathbf{g}^{*(l)} \\ \mathbf{g}^{*(l)} \\ \mathbf{g}^{*(l)} \end{cases} + \beta^{(l)} \begin{cases} \mathbf{d}^{(l-1)} \\ \mathbf{d}^{(l-1)} \\ \mathbf{d}^{(l-1)} \end{cases}, \quad \beta^{(l)} = \rho^{(l)} / \rho^{(l-1)};$$

$$\begin{cases} \mathbf{d}^{(l)} \\ \mathbf{d}^{(l)} \end{cases} = - \begin{cases} \mathbf{g}^{*(l)} \\ \mathbf{g}^{*(l)} \end{cases} + \beta^{(l)} \begin{cases} \mathbf{d}^{(l-1)} \\ \mathbf{d}^{(l-1)} \end{cases}, \quad \gamma^{(l)} = 2 \langle \mathbf{d}^{(l)}, \frac{\partial \mathbf{g}^{*(j)}}{\partial \sigma^{(j)}} \mathbf{d}^{(l)} \rangle;$$

$$\alpha^{(l)} = \rho^{(l)} / \gamma^{(l)}, \quad \alpha_{\max}^{(l)} = \min \{ -\sigma_n^{(l)} / d_n^{(l)} \mid d_n^{(l)} < 0 \},$$

$$\alpha_{\min}^{(l)} = \max \{ -\sigma_n^{(l)} / d_n^{(l)} \mid d_n^{(l)} > 0 \},$$

$$\alpha^{(l)} = \begin{cases} \alpha_{\min}^{(l)}, & \text{当 } \alpha^{(l)} < \alpha_{\min}^{(l)}, \\ \alpha^{(l)}, & \text{当 } \alpha_{\min}^{(l)} < \alpha^{(l)} < \alpha_{\max}^{(l)}, \\ \alpha_{\max}^{(l)}, & \text{当 } \alpha^{(l)} > \alpha_{\max}^{(l)}; \end{cases}$$

$$\mathbf{g}^{(l+1)} = \mathbf{g}^{(l)} + \alpha^{(l)} \frac{\partial \mathbf{g}^{(j)}}{\partial \sigma^{(j)}} \mathbf{d}^{(l)},$$

$$\begin{cases} \mathbf{g}^{*(l+1)} \\ \mathbf{g}^{*(l+1)} \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{g}^{*(l)} \\ \mathbf{g}^{*(l)} \end{cases} + \alpha^{(l)} \begin{cases} (\partial \mathbf{g}^{*(j)} / \partial \sigma^{(j)}) \mathbf{d}^{(l)} \\ (\partial \mathbf{g}^{*(j)} / \partial \sigma^{(j)})^T \mathbf{d}^{(l)} \end{cases}; \quad \sigma^{(l+1)} = \sigma^{(l)} + \alpha^{(l)} \mathbf{d}^{(l)}.$$

上列式中  $\langle *, * \rangle$  表示内积。

内层迭代步 3 如果  $\|\mathbf{g}^{*(l+1)}\| < \varepsilon$  或者  $\alpha^{(l)} = \alpha_{\min}^{(l)}$  又或者  $\alpha^{(l)} = \alpha_{\max}^{(l)}$  则

$$\sigma^{(j+1)} = \sigma^{(k+1)}, \quad \mathbf{g}^{(j+1)} = \mathbf{g}^{(k+1)},$$

否则

$$l \leftarrow l + 1.$$

返回内层迭代步 2。

子步 3 计算

$$J(\alpha^{(l)}, \alpha_{\min}^{(l)}, \alpha_{\max}^{(l)}, \sigma_n^{(j+1)}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \alpha^{(l)} = \alpha_{\min}^{(l)} \text{ 或 } \alpha^{(l)} = \alpha_{\max}^{(l)} \text{ 和 } \sigma_n^{(j+1)} = 0, \\ 0, & \text{其它;} \end{cases}$$

$$\mathbf{g}^{(j+1)} \leftarrow \mathbf{g}^{(j+1)} - \mathbf{g}(0, \sigma^{(j+1)}),$$

$$\sigma^{(j+1)} \leftarrow \sigma^{(j+1)} \in \left\{ \sigma^{(j+1)} \mid J(\alpha^{(l)}, \alpha_{\min}^{(l)}, \alpha_{\max}^{(l)}, \sigma_n^{(j+1)}) = 1 \right\};$$

$$\sigma^{(j+1)} \leftarrow 0, \quad \text{当 } \sigma^{(j+1)} \in \left\{ \sigma^{(j+1)} \mid J(\alpha^{(l)}, \alpha_{\min}^{(l)}, \alpha_{\max}^{(l)}, \sigma_n^{(j+1)}) = 1 \right\};$$

$$\mathbf{g}^{*(j+1)} = \begin{cases} 0, & \text{当 } I(\mathbf{g}_n^{(j+1)}, \sigma_n^{(j+1)}) = 1, \\ \mathbf{g}^{(j+1)} + \frac{\sigma_{\tau}^{(j+1)}}{\sigma_{\tau}^{(j+1)}} \max\{0, \lambda_{\tau}^{(k)} - \omega_{\tau} \Phi^{(j+1)}\}, & \text{其它。} \end{cases}$$

子步 4 如果  $\|\mathbf{g}^{*(j+1)}\| < \varepsilon$  则

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(j+1)}, \quad \mathbf{g}^{(k+1)} = \mathbf{g}^{(j+1)},$$

否则

$$j \leftarrow j + 1.$$

返回子步 2。

第五步 如果

$$\sigma_n^{(k+1)} \geq 0, \quad \mathbf{g}_n^{(k+1)} \geq 0, \quad \sigma_n^{(k+1)} \mathbf{g}_n^{(k+1)} = 0,$$

$$\varphi^{(k+1)} \geq 0, \quad \mathbf{g}_{\tau}^{(k+1)} \geq 0, \quad \varphi^{(k+1)} \mathbf{g}_{\tau}^{(k+1)} = 0.$$

终止, 否则

$$k \leftarrow k + 1.$$

回到第三步继续计算。

上面计算中  $\partial \mathbf{g}^{*(j)} / \partial \sigma^{(j)}$  通过下式进行计算:

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{*(j)}}{\partial \sigma^{(j)}} = \begin{cases} 0, & \text{当 } I(g_n^{(j)}, \sigma_n^{(j)}) = 1, \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma} - \omega_{\tau} \left[ \mu \frac{\sigma_t^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}} \mathbf{n}^T - \frac{\sigma_t^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}} \left( \frac{\sigma_t^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}} \right)^T \right] + \\ \left[ \mathbf{I} - \mathbf{nn}^T - \frac{\sigma_t^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}} \left( \frac{\sigma_t^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}} \right)^T \right] \frac{\lambda_t^{(j)} - \omega_{\tau} \Phi^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}}, & \text{其它;} \end{cases}$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{g}^{*(j)}}{\partial \sigma^{(j)}} \right)^T = \begin{cases} 0, & \text{当 } I(g_n^{(j)}, \sigma_n^{(j)}) = 1, \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma} - \omega_{\tau} \left[ \mu \mathbf{n} \left( \frac{\sigma_t^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}} \right)^T - \frac{\sigma_t^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}} \left( \frac{\sigma_t^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}} \right)^T \right] + \\ \left[ \mathbf{I} - \mathbf{nn}^T - \frac{\sigma_t^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}} \left( \frac{\sigma_t^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}} \right)^T \right] \frac{\lambda_t^{(j)} - \omega_{\tau} \Phi^{(j)}}{\sigma_t^{(j)}}, & \text{其它.} \end{cases}$$

### 4 计算实例

三维冲击接触问题有限元程序 CIA3D<sup>[11]</sup> 已将退化的增广 Lagrange 双共轭投影梯度算法组合进去。下面采用 CIA3D 程序计算 2 个可变形弹塑性接触体的冲击接触计算实例检验本文算法的可行性和有效性。

一个长  $L = 0.1 \text{ m}$ , 半径  $R = 0.15 \text{ m}$  的半圆柱形理想弹塑性体以  $v_0 = 100 \text{ m/s}$  的极高速冲击一理想弹塑性长方体, 长方体的几何尺寸为  $0.436 \text{ m} \times 0.2 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ 。长方体底部位移被完全约束住, 其余 5 个面是自由的。由于对称性, 只考虑 1/2 结构并将其剖分为 52 个单元, 对称面上的结点水平位移被约束住。长方体和半圆柱的弹塑性材料参数见表 1。

表 1 二种理想弹塑性材料参数

力学参数	弹性模量 $E / \text{Pa}$	泊松比 $\nu$	密度 $\rho / (\text{kg/m}^3)$	屈服强度 $\sigma_y / \text{Pa}$
半圆柱	2.0E+ 11	0.30	7.8E+ 3	1.0E+ 8
长方体	4.14E+ 1	0.33	7.25E+ 3	1.1E+ 7

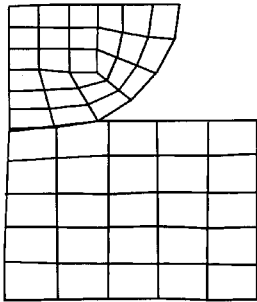


图 1 对应时间  $t = 8 \times 10^{-4} \text{ s}$  的变形图

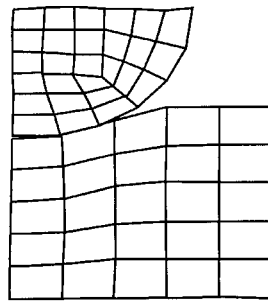


图 2 对应时间  $t = 5.6 \times 10^{-3} \text{ s}$  的变形图

冲击接触计算基本由时程积分、接触搜索和互补方程求解 3 大部分构成, 接触搜索和互补方程求解约占 80% 以上的计算机时。CIA3D 中接触搜索采用文献[11]给出的算法; 退化的增广 Lagrange 双共轭投影梯度算法在单一步长内与罚函数法比较耗时较多, 但就整个计算时段而言, 由于可以采用大步长进行计算, 效率还是明显优于罚函数法, 通常罚函数法计算冲击接触问题时, 时间步长一般取量级  $10^{-5} \text{ s}$ , 本算例所取(稳定)时间步长可达量级  $10^{-3} \text{ s}$ , 甚至更

大。而常规 Lagrange 法与冲击接触问题的显式积分不相容。

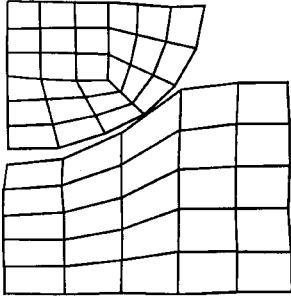


图3 对应时间  $t = 1.2 \times 10^{-2}$  s 的变形图

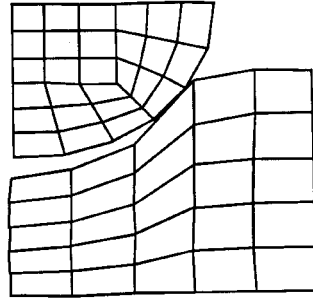


图4 对应时间  $t = 1.6 \times 10^{-2}$  s 的变形图

图1至图4示出对应于各个时刻的变形情况。

从半圆柱体以高速冲击接触到长方体出现弹塑性大变形直到回弹各个变形阶段,注意到长方体材料的强度比半圆柱的低一个量级,因而在变形中大变形发生在长方体,半圆柱体变形量较小。

图5示出半圆柱对称接触面上结点的等效应力随时间的变化曲线。半圆柱形弹塑性体以高速冲击长方形体之后,接触局部很快就进入塑性变形,进入第一次塑性加载阶段,持续时间很短约1ms;卸载之后,由于冲击惯性又进入第二次时间更短的塑性屈服状态,随后弹性回弹脱离接触全面卸载。

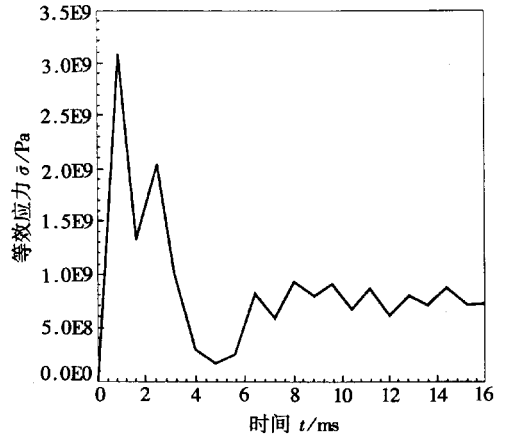


图5 接触结点等效应力  $\bar{\sigma}$  和  $t$  曲线

冲击接触问题常规算法为罚函数法,罚系数和时程积分、接触穿透相冲突,罚系数大,穿透小,但时程积分步长小;反之则相反。罚函数法的计算精度受到限制。此外,罚函数法只能用于显式时程积分计算中,本文算法则可避免罚函数法的上述缺陷。

## 5 结 语

冲击接触问题互补方程计算方法的优劣一般体现在算法的效率、精度和适用性等方面,效率比较对于非线性接触问题有明确的结果。非线性冲击接触问题普遍缺乏基准实例,算法的数值精度比较,一般通过其计算结果的合理性体现。冲击接触问题互补方程的计算和时程积分相互关联,同时材料及其变形特点也决定算法采用,退化的增广 Lagrange 双共轭投影梯度综合上述接触冲击问题的各个因素,在时程积分中可以取较大步长,并且可以应用于计算大变形的非线性材料的冲击接触课题中。

## [参 考 文 献]

- [1] ZHONG Zhì-hua. Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems [M]. Oxford: Oxford University Press, 1993.
- [2] Kikuchi N, Oden J.T. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods [M]. Philadelphia: SIAM, 1988.
- [3] Babuska I. The finite element method with penalty[J]. Math Comp, 1973, 27(122): 221-228.

- [4] Irons B M, Draper K J. Lagrange multiplier techniques in structural analysis[J]. AIAA J, 1965, 3(6): 1172-1174.
- [5] SHA De-song, Tamma K K, LI Ma-cheng. Robust explicit computational developments and solution strategies for impact problems involving friction[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1996, 39(5): 721-739.
- [6] 李南生, 沙德松, 孙焕纯, 等. 冲击接触问题增广 Lagrangian 双共轭梯度法[J]. 固体力学学报, 1999, 20(1): 46-61.
- [7] 李南生, 许强, 李尧臣, 等. 粘塑性介质率本构方程的广义序列积分解法[J]. 同济大学学报, 2002, 30(9): 1073-1077.
- [8] Simo J C, Govindjee S. Non-linear B stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1991, 31(1): 151-176.
- [9] 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2006.
- [10] 赵凤治, 尉继英. 约束最优化计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 1991.
- [11] 李南生, 沙德松, 周晶. 一类基于点-面模式的低阶单元接触搜索方法[J]. 力学季刊, 2000, 21(1): 139-143.

## Reduced Projection Augmented Lagrange Bi-Conjugate Gradient Method for Contact and Impact Problems

LI Nan-sheng<sup>1</sup>, REN Kui-sheng<sup>1</sup>, SHA De-song<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;

2 Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,  
Dalian 116023, P. R. China)

**Abstract:** Based on the numerical governing formulation and non-linear complementary conditions of contact and impact problems, a reduced projection augmented Lagrange bi-conjugate gradient method was proposed for contact and impact problems by translating non-linear complementary conditions into equivalent formulation of non-linear programming. For contact-impact problems, a larger time-step can be adopted arriving at numerical convergence compared with penalty method. By establishment of the impact-contact formulations which are equivalent with original non-linear complementary conditions, a reduced projection augmented Lagrange bi-conjugate gradient method is deduced to improve precision and efficiency of numerical solutions. A numerical example shows that the algorithm suggested is valid and exact.

**Key words:** contact and impact problem; reduced projection augmented Lagrange bi-conjugate gradient; numerical method