

复合载荷作用下夹层圆板的 非线性振动和屈曲*

杜国君, 马建青

(燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004)

(刘人怀推荐)

摘要: 基于 von Kármán 薄板理论, 建立了均布载荷和周边面内载荷联合作用下夹层圆板非线性振动问题的控制方程和滑动固定边界条件, 给出了相应静力问题的精确解及其数值结果. 基于时间模态假设和变分法, 得到了空间模态的控制方程, 并使用修正迭代法求解该方程, 得到夹层圆板幅频-载荷特征关系. 讨论了两种载荷对夹层圆板振动特性的影响规律. 当周边面力使夹层圆板的最低固有频率为零时, 就可获得临界载荷的值.

关键词: 夹层圆板; 非线性振动; 屈曲; 复合载荷; 幅频-载荷特征关系

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

引 言

板壳结构是工程实际中广泛应用的一种结构元件, 其静力分析和线性振动的理论和应用研究已经很成熟, 对于非线性振动问题的研究也有很多工作报导. 但对于特殊材料和特种结构形式板壳非线性振动问题的研究还不够完善. 对于压电矩形薄板的非线性振动以及正交异性扁球壳的非线性振动问题等已有相关的文献报道^[1-2]. 静载荷作用下板壳结构的非线性振动特性, 也是研究者关心的课题.

夹层板是工程实际中应用较为广泛的结构元件, 对于夹层板的大挠度问题, 由于数学上非线性的困难而仅有少数人进行过研究^[3-5]. 而关于静载荷对夹层板壳振动特性影响的研究工作更是很少见到有文献报道, 在一些工程实际问题中静载荷对结构振动特性的影响是不可忽略的^[6].

有关静载荷对薄板振动特性影响研究的报道也很有限, Chen^[7]等研究了具有初应力层合板的大幅度振动问题, Abde^[8]等研究了静载荷作用下板壳的非线性自由振动特性, Nayfeh^[9]等研究了热载荷对圆板振动特性的影响; Chung^[10]等研究了具有角加速度圆盘的非线性振动问题, 讨论了由于转动产生的惯性力对圆盘振动的影响; Kimura^[11]等研究了加劲矩形板在静压力作用下的振动问题. 以上研究主要基于传统理论和方法. 或是设定时间域函数, 采用近似法求出结构的固有频率和空间位移函数, 或是设定空间域函数, 在时间域(相平面)上讨论问题解的性质. 除此之外还有数值方法求解这类非线性振动问题.

* 收稿日期: 2006-11-20; 修订日期: 2007-05-18

作者简介: 杜国君(1961—), 男, 黑龙江人, 教授, 博士(联系人, E-mail: dugj2002@yahoo.com).

本文采用一种解析法,研究复合载荷作用下夹层圆板的非线性振动和屈曲问题。静力问题采用精确解。基于时间模态假设和变分法,将挠度和应力函数设为时间和空间函数的分离形式。时间函数取谐函数,空间函数未知。所假设的振动模态包含两个未知的内禀量,即振频和一个由于静变形而使板具有不对称刚度特性的非线性振子“漂移”的小量^[12],它们均与载荷、边界条件和振幅有关。将假定的模态函数代入问题的变分方程,导出复合载荷作用下夹层圆板的幅频-载荷特征关系。给出了基频的数值结果和板失稳的临界载荷,讨论了静载荷对非线性振频及“漂移”的影响。

1 基本方程的建立

根据文献[4],很容易推导出均布载荷和周边面内压力作用下,夹层圆板的无量纲非线性静平衡方程

$$L(\rho(KS_r^0 + 1)\phi^0) - S_r^0\phi^0 - P_0\rho = 0, \quad (1)$$

$$L(\rho^2 S_r^0) + (\phi^0)^2/\rho = 0. \quad (2)$$

这里无量纲量为

$$\begin{cases} \rho = r/a, W^0 = \sqrt{2(1-\nu^2)}w^0/h_0, \phi^0 = W^0/\rho, P_1 = 2h_1a^2q_1/D, \\ S_r^0 = \frac{2h_1a^2}{D}\sigma_r^0, S_\theta^0 = \frac{2h_1a^2}{D}\sigma_\theta^0, K = \frac{D}{G_2h_0a^2}, P_0 = \frac{\sqrt{2(1-\nu^2)}}{2h_0D}q_0 \end{cases} \quad (3)$$

其中, a 为夹层圆板半径, r 为径向坐标, h_1 为表板厚度, h_0 为上下表板中面间距离, D 为夹层板抗弯刚度, q_0 为均布载荷集度, q_1 为周边面内载荷集度, 详见文献[4], 且有 $L(\dots) = ((\dots)_{,r}/\rho)_{,r}$ 。

滑动固定边界条件为

$$\text{当 } \rho = 1: W^0 = 0, (KS_r^0 + 1)\phi^0 + KP_0 = 0, S_r^0 = -P_1, \quad (4)$$

$$\text{当 } \rho = 0: (KS_r^0 + 1)\phi^0 = 0, S_r^0 < \infty \quad (5)$$

在静平衡构形基础上,考虑其大幅度自由振动,其运动微分方程的变分形式可由 Hamilton 原理导出为^[6]

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a (rmw_{,tt} - 2h_1(r\sigma_{r0}w_{,r})_{,r} - G_2h_0(r(\phi + w_{,r}))_{,r}) \delta w \cdot 2\pi dr dt = 0, \quad (6)$$

$$D((r\phi)_{,r}/r)_{,r} - G_2h_0(\phi + w_{,r}) = 0 \quad (7)$$

应变协调方程为

$$((r^2\sigma_r)_{,r}/r)_{,r} + Ew_{,r}^2/(2r) = 0 \quad (8)$$

设夹层圆板在静载荷 P_0 和 P_1 作用下产生挠度 w_0 , 在此基础上考虑其自由振动,动挠度为 w , 则总挠度 w 可写为

$$w = w_0 + w, \quad (9)$$

相应地有

$$\sigma_r = \sigma_r^0 + \sigma_r, \quad (10)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi. \quad (11)$$

将(9)式至(11)式代入(6)式至(8)式,并设其解为

$$\begin{cases} w = W(r)(\xi + \cos \omega t), \phi = \phi(r)(\xi + \cos \omega t), \\ \sigma_r = S(r)(\xi + \cos \omega t) + T(r)(\xi + \cos \omega t)^2, \end{cases} \quad (12)$$

其中 ξ 是一个未知量, 它表征由于静载荷作用产生非线性弯曲变形导致板拉压刚度不对称的非线性振子“漂移”的大小, ω 是静平衡构形附近大幅度振动的频率, $W(r)$ 、 $\phi(r)$ 、 $S(r)$ 、 $T(r)$ 是未知的空间函数。经一系列数学推导可得

$$(L^2 + K\omega^2 L - \omega^2)W = -KL^*(f(\rho)) + f, \rho(\rho)/\rho, \quad (13)$$

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 = 0, \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} L(\dots) &= (\rho(\dots), \rho), \rho/\rho, L^* = (\rho(\dots), \rho/\rho), \rho), \rho/\rho, \\ f(\rho) &= \beta_r^0 W, \rho + \beta W, \rho + f_1(\xi) \rho(W, \rho)T + W, \rho S + f_2(\xi) \rho W, \rho T, \\ f_1(\xi) &= \frac{2\xi^3 + 3\xi}{2\xi^2 + 1}, f_2(\xi) = \frac{8\xi^4 + 24\xi^2 + 3}{8\xi^2 + 4} \end{aligned}$$

以及

$$\begin{cases} a_0 = - \int_0^1 (\rho W, \rho T + \rho W, \rho S), \rho W d\rho, \\ a_1 = - \int_0^1 \left[\rho L^2(W) - \left(\rho W_r^0 W, \rho + \beta W, \rho + \frac{3}{2} \rho T W, \rho \right), \rho \right] W d\rho + \\ \int_0^1 K(\rho(f(\rho)), \rho/\rho), \rho W d\rho + \frac{K\omega^2}{2\xi^2 + 1} \int_0^1 (\rho W, \rho), \rho W d\rho, \\ a_2 = 2a_0, a_3 = - \int_0^1 (\rho T W, \rho), \rho W d\rho \end{cases} \quad (15)$$

协调方程为

$$L(\rho^2 S) = -2\beta W, \rho W, \rho/\rho, \quad (16)$$

$$L(\rho^2 T) = -\beta W_r^0 \rho/\rho \quad (17)$$

滑动固定边界条件为

当 $\rho = 1$ 时

$$W = 0, K\omega^2 \frac{1}{\rho} \int_0^1 \rho W d\rho + K(S_r^0 \phi + S\phi^0 + S\phi) + \phi = 0, S = 0, T = 0; \quad (18)$$

当 $\rho = 0$ 时

$$W = W_0, K\omega^2 \frac{1}{\rho} \int_0^1 \rho W d\rho + K(S_r^0 \phi + S\phi^0 + S\phi) + \phi = 0, S < \infty, T < \infty, \quad (19)$$

其中 $W_0 = W(\rho)|_{\rho=0}$, 且有 $W_m^+ = W_0(1 + \xi)$, $W_m^- = W_0(1 - \xi)$ 。

上式中, W_m^+ 、 W_m^- 分别称为静载荷作用下夹层板的正、负振幅。以上诸式中无量纲量为

$$\begin{cases} \rho = r/a, \phi = W, \rho, W = W/h_0, W^0 = w^0/h_0, \omega = \omega(ma^4/D)^{1/2}, \\ T = h_1 a^2 T/D, S = h_1 a^2 S/D, S_r^0 = h_1 a^2 \sigma_r^0/D, \\ K = D/(G_2 h_0 a^2), \beta = 2(1 - \nu^2). \end{cases} \quad (20)$$

比较(3)式、(20)两式有

$$W^0 = W^0/\sqrt{2(1 - \nu^2)}, S_r^0 = S_r^0/2 \quad (21)$$

2 静平衡问题的解析解

据文献[5]可得到本问题的精确静态解

$$S_r^0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} \rho^{2i}, \quad (22)$$

$$\phi^0 = \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i+1} \rho^{2i+1}, \tag{23}$$

其中

$$\begin{cases} a_{2i} = -\frac{1}{4i(i+1)} \sum_{m=0}^{i-1} b_{2m+1} b_{2i-2m-1} & (i = 1, 2, \dots), \\ b_{2i+1} = \frac{1}{K a_0 + 1} \left(\frac{1}{4i(i+1)} \sum_{m=0}^{i-1} a_{2m} b_{2i-2m-1} - K \sum_{m=1}^i a_{2m} b_{2i-2m+1} \right) \\ b_3 = \frac{1}{8(K a_0 + 1)} ((a_0 - 8K a_2) b_1 + P_0) \end{cases} \tag{24}$$

(i = 2, 3, ...),

由此可见,只要知道了 a_0, b_1 的值,其它常数便可以依次确定,静力问题的解也就确定了。

表 1 滑动固定夹层圆板的 a_0 和 b_1 值 ($P_0 = 2, \nu = 0.3$)

P_1	$K = 0.01$		$K = 0.05$		$K = 0.10$	
	a_0	b_1	a_0	b_1	a_0	b_1
1	- 0.998 531	- 0.263 645	- 0.998 414	- 0.291 047	- 0.998 247	- 0.243 769
2	- 1.998 582	- 0.257 510	- 1.998 341	- 0.322 484	- 1.997 934	- 0.265 856
3	- 2.998 631	- 0.251 591	- 2.998 253	- 0.357 083	- 2.997 489	- 0.292 310
4	- 3.998 678	- 0.245 881	- 3.998 149	- 0.395 107	- 3.996 823	- 0.324 163
5	- 4.998 722	- 0.240 377	- 4.998 023	- 0.436 787	- 4.995 750	- 0.365 126
6	- 5.998 764	- 0.235 074	- 5.997 870	- 0.482 290	- 5.993 836	- 0.418 187
7	- 6.998 805	- 0.229 967	- 6.998 322	- 0.531 665	- 6.989 840	- 0.494 247
8	- 7.998 843	- 0.225 052	- 7.997 449	- 0.584 763	- 7.978 817	- 0.596 871
9	- 8.998 880	- 0.220 325	- 8.997 153	- 0.641 143	- 8.921 400	- 0.710 231
10	- 9.998 915	- 0.215 781	- 9.996 771	- 0.699 984	- 9.908 541	- 0.856 812

表 2 滑动固定夹层圆板的 a_0 和 b_1 值 ($P_0 = 4, \nu = 0.3$)

P_1	$K = 0.01$		$K = 0.05$		$K = 0.10$	
	a_0	b_1	a_0	b_1	a_0	b_1
1	- 0.994 545	- 0.528 516	- 0.994 095	- 0.369 655	- 0.995 227	- 0.349 037
2	- 1.994 720	- 0.517 418	- 1.993 781	- 0.392 257	- 1.995 067	- 0.390 692
3	- 2.994 888	- 0.506 700	- 2.993 409	- 0.418 460	- 2.994 878	- 0.449 075
4	- 3.995 046	- 0.496 357	- 3.992 966	- 0.449 093	- 3.994 655	- 0.509 138
5	- 4.995 198	- 0.486 379	- 4.992 434	- 0.485 256	- 4.994 394	- 0.589 106
6	- 5.995 342	- 0.476 761	- 5.991 788	- 0.528 423	- 5.994 101	- 0.678 343
7	- 6.995 480	- 0.467 495	- 6.990 994	- 0.580 627	- 6.993 820	- 0.788 343
8	- 7.995 612	- 0.458 575	- 7.990 006	- 0.644 724	- 7.993 600	- 0.920 861
9	- 8.995 737	- 0.449 995	- 8.988 753	- 0.724 854	- 8.991 134	- 1.170 953
10	- 9.995 856	- 0.441 748	- 9.987 130	- 0.827 204	- 9.988 632	- 1.364 501

为了确定常数 a_0, b_1 , 将(22) 式、(23) 式代入边界条件, 再与(15) 式联立可得到确定 a_0, b_1 的非线性代数方程组如下:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} = -P_1, \tag{25}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(K \sum_{m=0}^i a_{2m} b_{2i-2m+1} + b_{2i+1} \right) + KP_0 = 0 \tag{26}$$

使用 Newton 法可求出不同 P_0 和 P_1 值下的 a_0, b_1 值, 也可以采用文献[5]提出的一种简单的迭代算法, 具体计算过程参见文献[5], 给出的计算结果见表 1 至表 3。

表 3 滑动固定夹层圆板的 a_0 和 b_1 值 ($P_0 = 6, \nu = 0.3$)

P_1	$K = 0.01$		$K = 0.05$		$K = 0.10$	
	a_0	b_1	a_0	b_1	a_0	b_1
1	- 0.988 032	- 0.793 392	- 0.987 027	- 0.421 556	- 0.985 579	- 0.502 336
2	- 1.988 403	- 0.777 329	- 1.986 307	- 0.513 322	- 1.984 023	- 0.567 007
3	- 2.988 758	- 0.761 813	- 2.985 455	- 0.659 874	- 2.980 444	- 0.648 786
4	- 3.989 096	- 0.746 833	- 3.984 441	- 0.903 211	- 3.977 946	- 0.754 692
5	- 4.989 418	- 0.732 381	- 4.983 222	- 1.050 021	- 4.974 811	- 0.895 630
6	- 5.989 725	- 0.718 447	- 5.981 743	- 1.182 868	- 5.970 930	- 1.089 038
7	- 6.990 189	- 0.705 021	- 6.979 926	- 1.265 009	- 6.966 482	- 1.364 501
8	- 7.990 298	- 0.692 096	- 7.977 661	- 1.361 041	- 7.962 321	- 1.699 140
9	- 8.990 565	- 0.679 662	- 8.974 789	- 1.474 429	- 8.958 650	- 1.924 863
10	- 9.990 819	- 0.667 712	- 9.971 066	- 1.609 842	- 9.952 951	- 2.268 472

3 特征值问题的修正迭代解

前面给出了问题的控制方程和滑动固定边界条件, 求解该边值问题, 可得到夹层圆板的非线性振动特性, 采用修正迭代法求解边值问题(13)式、(16)式至(19)式, 在一阶近似中, 略去(13)式中非线性项和与静变形有关项, 并取 $\xi = 0$ 有

$$(L^2 + K\omega_0^2 L - \omega_0^2) W_1 = 0, \tag{27}$$

$$L(\rho^2 S_1) = -2\beta W_1^0 \rho W_1 / \rho, \tag{28}$$

$$L(\rho^2 T_1) = -\beta W_1^2 \rho / \rho \tag{29}$$

滑动固定边界条件为

当 $\rho = 1$ 时

$$W_1 = 0, K\omega_0^2 \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \rho W_1 d\rho + \phi_1 = 0, S_1 = 0, T_1 = 0, \tag{30a~d}$$

当 $\rho = 0$ 时

$$W_1 = W_0, K\omega_0^2 \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \rho W_1 d\rho + \phi_1 = 0, S_1 < \infty, T_1 < \infty \tag{31a~d}$$

方程(27)的解可设为

$$W_1 = W_0 \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(1)} \rho^j, \tag{32}$$

其中

$$A_j^{(1)} = \mu_1 \frac{\omega_0^2}{2^{2j} (j!)^2 c^j} + \mu_2 \frac{(-1)^j c^j}{2^{2j} (j!)^2}, \quad c = \omega_0^2 (K + \sqrt{K^2 + 4/\omega_0^2})/2,$$

式中 $\mu_i (i = 1, 2)$ 为待定系数, 需由板的边界条件确定。将(32)式带入(30a, b)式、(31a)式可

得到

$$A\mu = 0, \quad (33)$$

其中

$$\mu = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad 1]^T, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{bmatrix},$$

同时有

$$a_{11} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega_0^{2j}}{2^{2j}(j!)^2 c^j}, \quad a_{12} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j c^j}{2^{2j}(j!)^2},$$

$$a_{21} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega_0^{2j}}{2^{2j}(j!)^2 c^j} \left(\frac{K\omega_0^2}{2j+2} + 2j \right), \quad a_{22} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j c^j}{2^{2j}(j!)^2} \left(\frac{K\omega_0^2}{2j+2} + 2j \right).$$

由于 μ 为非零向量, 因此矩阵 A 的行列式等于 0, 即

$$\det A = 0. \quad (34)$$

由(34)式解出 ω_0 , 于是得到了 $a_{\bar{j}}$ ($i = 0, 1, 2; j = 1, 2$) 的值, 再由(33)式可确定 μ_1, μ_2 , 因此 W_1 就确定了. 为求 S_1, T_1 , 将(32)式代入(28)式、(29)式直接积分方程, 并利用边界条件(30c, d)、边界条件(31c, d)可得到

$$S^{(1)} = W_0 \sum_{j=0}^{\infty} B_j^{(1)} \rho^{2j}, \quad (35)$$

$$T^{(1)} = W_0^2 \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(1)} \rho^{2j}, \quad (36)$$

其中

$$\begin{cases} B_0^{(1)} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\eta(2j+1) - \nu}{\eta - \nu} B_j^{(1)}, & C_0^{(1)} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\eta(2j+1) - \nu}{\eta - \nu} C_j^{(1)}, \\ B_j^{(1)} = - \frac{\beta}{j(j+1)} \sum_{i=0}^j (j-1) b_{2i+1} A_{j-i}^{(1)}, & (j = 1, 2, \dots), \\ C_j^{(1)} = - \frac{\beta}{j(j+1)} \sum_{i=0}^j i(j-1) A_i^{(1)} A_{j-i}^{(1)} & (j = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (37)$$

下面求 a_0, a_1, a_2, a_3 , 为此将(32)式、(35)式、(36)式代入(15)式得

$$\begin{cases} a_0 = \varphi_1 W_0^3, & a_1 = \varphi_2 W_0^2 + \varphi_3 W_0^3 + \varphi_4 W_0^4, \\ a_2 = 2\varphi_1 W_0^3, & a_3 = \varphi_5 W_0^4, \end{cases} \quad (38)$$

这里 φ_i 的表达式省略. 于是(14)式可写为

$$\varphi_1 W_0 + (\varphi_2 + \varphi_3 W_0 + \varphi_4 W_0^2) \xi + 2\varphi_1 W_0 \xi^2 + \varphi_5 W_0^2 \xi^3 = 0, \quad (39)$$

对于给定的 W_0 可由此式求出 ξ 的值.

在二阶迭代中有如下特征值问题

$$\left[L^2 + K \frac{\omega^2}{2\xi^2 + 1} L - \frac{\omega^2}{2\xi^2 + 1} \right] W_2 = -KL^* [f(\rho)] + \frac{1}{\rho} \frac{df(\rho)}{d\rho}. \quad (40)$$

滑动固定边界条件为

当 $\rho = 1$ 时

$$\begin{cases} W_2 = 0, \\ K \frac{\omega^2}{2\xi^2 + 1} \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho W_2 d\rho + K(S_1^0 \phi_1 + S_1 \phi^0) + \\ Kf_1(\xi)(S_1 \phi_1 + T_1 \phi^0) + Kf_2(\xi) T_1 \phi_1 + \phi_2 = 0, \\ T_1 = 0, S_1 = 0; \end{cases} \quad (41a \sim d)$$

当 $\rho = 0$ 时

$$\begin{cases} W_2 = W_0, \\ K \frac{\omega^2}{2\xi^2 + 1} \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho W_2 d\rho + K(S_1^0 \phi_1 + S_1 \phi^0) + \\ Kf_1(\xi)(S_1 \phi_1 + T_1 \phi^0) + Kf_2(\xi) T_1 \phi_1 + \phi_2 = 0, \\ S_1 < \infty, T_1 < \infty, \end{cases} \quad (42a \sim d)$$

其中

$$f(\rho) = \beta_r^0 W_{1,\rho} + \beta_s W_{1,\rho} + f_1(\xi) \rho (W_{1,\rho} T_1 + W_{1,\rho} S_1) + f_2(\xi) \rho W_{1,\rho} T_1$$

将(22)式、(23)式、(32)式、(35)式和(36)式代入(40)式,可求得(40)式的解

$$W_2 = W_0 \sum_{j=0}^{\infty} (A_j^{(2)} + B_j^{(2)}) \rho^{2j} + W_0^2 f_1(\xi) \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(2)} \rho^{2j} + W_0^3 f_2(\xi) \sum_{j=0}^{\infty} D_j^{(2)} \rho^{2j}, \quad (43)$$

式中各系数的表达式不再给出。将(43)式代入(41a, b)式、(42a)式得

$$H\delta = 0, \quad (44)$$

矩阵 H 中各元素均可表示为 ω 的函数项级数,这里从略。

由方程(44)可得到如下频率方程

$$\det H = 0, \quad (45)$$

这就是均布载荷和周边面内载荷共同作用下夹层圆板大幅度振动的幅频-载荷特征关系。利用此式可对一定的载荷 P_0 、 P_1 及 W_0 求出相应的振动频率 ω , 因此矩阵 H 的元素全部确定,再由(44)式求出 δ_1 、 δ_2 , 到此二阶修正迭代解全部确定。

4 数值计算结果及讨论

对复合载荷作用下夹层圆板非线性振动问题进行了数值计算,无量纲周边面力 P_1 与均布载荷 P_0 取不同值情况下的计算结果见以下各图。受周边载荷和均布载荷共同作用夹层圆板微幅振动($W_0 = 0$)的频率随复合载荷的变化规律由图1至图3给出,由图1至图3可见,在稳定平衡构型附近微幅自由振动的固有频率随周边载荷的变化规律,曲线对应于屈曲前夹层圆

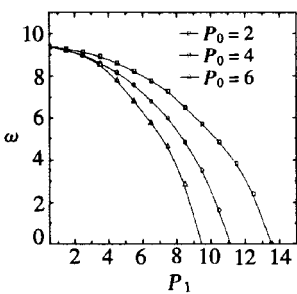


图1 频率-载荷曲线
($K = 0.01$)

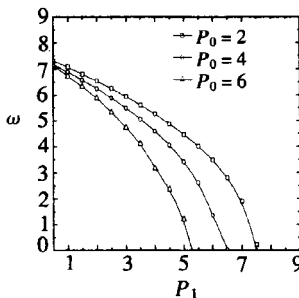


图2 频率-载荷曲线
($K = 0.05$)

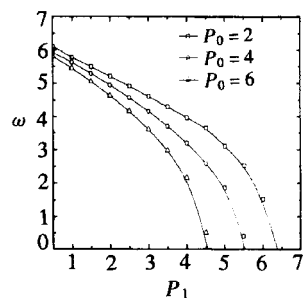


图3 频率-载荷曲线
($K = 0.10$)

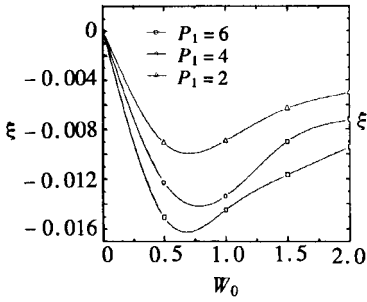


图 4 载荷对漂移的影响
($P_0 = 2, K = 0.01$)

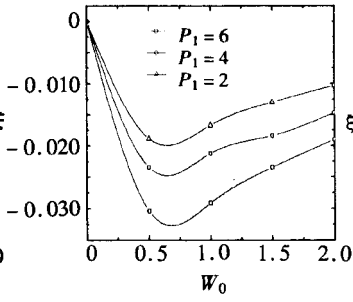


图 5 载荷对漂移的影响
($P_0 = 4, K = 0.01$)

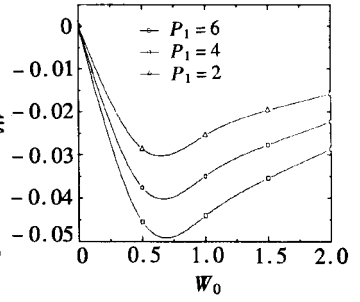


图 6 载荷对漂移的影响
($P_0 = 6, K = 0.01$)

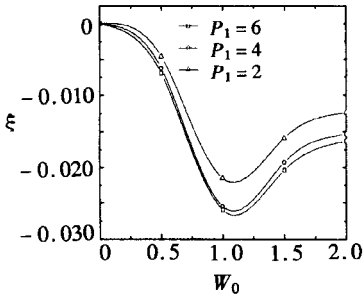


图 7 载荷对漂移的影响
($P_0 = 2, K = 0.05$)

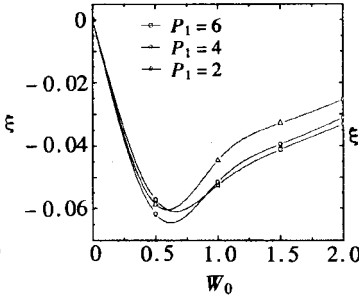


图 8 载荷对漂移的影响
($P_0 = 4, K = 0.05$)

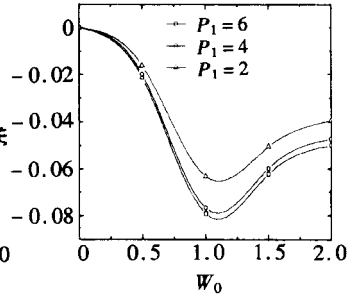


图 9 载荷对漂移的影响
($P_0 = 6, K = 0.05$)

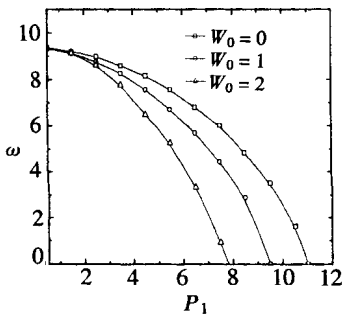


图 10 频率-载荷曲线
($K = 0.01$)

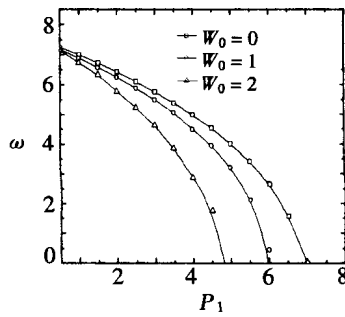


图 11 频率-载荷曲线
($K = 0.05$)

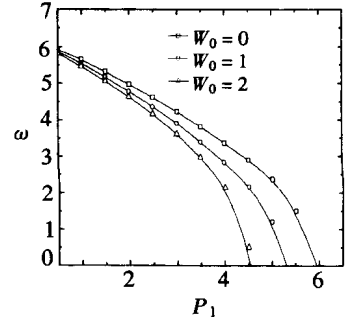


图 12 频率-载荷曲线
($K = 0.10$)

板的平衡状态, 屈曲前固有频率随着周边压力的增大而减小, 当固有频率减小到零时便可得到受复合载荷作用夹层圆板的临界载荷。

图 4 至图 9 分别给出了 $P_0 = 2, P_0 = 4$ 和 $P_0 = 6$ 时非线性振子的漂移 ξ 随载荷及振幅的变化规律。由图可见, 周边载荷一定时, 非线性振子的漂移随均布载荷的增大而增大; 均布载荷一定时, 非线性振子的漂移随周边载荷的增大而增大; 当振幅较小时, 非线性振子的漂移随周边载荷变化很小; 当振幅增大到某一值时, 非线性振子的漂移又随周边载荷增大而明显增大。总体上看, 随着振幅的增大, ξ 开始增大, 达到某个极大值后又开始衰减。

图 10 至图 12 分别给出了当 $P_0 = 4$ 时不同振幅下固有频率随周边载荷的变化曲线, 可见

临界载荷随着振幅增大而逐渐减小。

[参 考 文 献]

- [1] 刘人怀, 李东, 袁鸿. 正交异性扁薄球壳的轴对称非线性振动[J]. 振动工程学报, 2005, 18(4): 395-405.
- [2] 陈炎, 刘人怀. 压电矩形薄板的非线性强迫振动[J]. 华南理工大学学报, 2003, 31(S): 63-66.
- [3] 刘人怀. 板壳分析与应用[J]. 中国工程科学, 2000, 2(11): 60-67.
- [4] 刘人怀. 夹层圆板的非线性弯曲[J]. 应用数学和力学, 1980, 2(2): 173-190.
- [5] 刘人怀, 施云方. 夹层圆板大挠度问题的精确解[J]. 应用数学和力学, 1982, 3(1): 11-23.
- [6] 杜国君, 李慧剑. 均布荷载作用下夹层圆板的非线性振动[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(2): 192-200.
- [7] CHEN Chun-sheng. Large amplitude vibration of an initially stressed cross ply laminated plates[J]. Applied Acoustics, 2002, 63(9): 939-956.
- [8] Abde Rahman. Axisymmetric natural frequencies of statically loaded annular plates[J]. Shock and Vibration, 2003, 10(5/6): 301-312.
- [9] Nayfeh Ali H. Dynamic behavior of circular structural elements under thermal loads[A]. Collection of Technical Papers-AIAA/ASMEASCE/AHS/ASC. In: Structural Dynamics and Materials Conference [C]. 3. 2003, 1950-1958.
- [10] Chung J. Nonlinear vibration of a flexible spinning disc with angular acceleration[J]. J Sound Vibration, 2000, 231(2): 375-391.
- [11] Kimura Koichi. Vibration of pressure loaded nonlinear rectangular plates with cross stiffener[J]. J Engrg Mech, 2002, 128(7): 788-794.
- [12] 叶开沅, 叶志明, 王新志. 对“变厚度圆薄板在均布荷载下大挠度问题”解法的讨论[J]. 应用数学和力学, 1985, 6(3): 285-287.

Nonlinear Vibration and Buckling of Circular Sandwich Plate Under Complex Load

DU Guo-jun, MA Jian-qing

(School of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University,
Qinhuangdao, Hebei 066004, P. R. China)

Abstract: The nonlinear vibration fundamental equation of circular sandwich plate under uniformed load and circumjacent load and the loosely clamped boundary condition were established by von Kármán plate theory, and then accordingly exact solution of static load and its numerical results is given. Based on time mode hypothesis and the variational method, the control equation of the space mode was derived, and then the amplitude frequency-load character relation of circular sandwich plate was obtained by the modified iteration method. Consequently the rule which the two kinds of load affected the vibration character of the circular sandwich plate was investigated. When circumjacent load makes the lowest natural frequency zero, critical load is obtained.

Key words: circular sandwich plate; nonlinear vibration; buckling; complex load; amplitude frequency-load character relation