

各向异性液体-多孔饱和介质在机械荷载作用下的弹性动力分析*

R·库玛¹, A·迈格拉尼², N·R·伽³

- (1. 库卢谢特拉大学 数学系, 库卢谢特拉-136 119, 印度;
2. 古卢-詹姆赫西华理工大学 数学系, 希萨尔-125 001, 印度;
3. 马哈西-达亚南德大学 数学系, 罗塔克-124 001, 印度)

(郭兴明推荐)

摘要: 将一个各向异性液体-多孔饱和介质的弹性动力分析, 归结为一个横观各向同性液体-多孔饱和介质在机械荷载作用下的变形问题。自然界中有些物理问题, 仅在一个方向发生变形, 例如, 与变形结构和变形柱有关的问题。土力学中, 通常假设只有竖向沉降, 从而归结为一维多孔弹性模型。采用各向异性液体-多孔饱和介质的一维变形模型, 研究了在不同时间和距离下扰动的变化。给出了在不同类型荷载作用下, 介质的各向异性对位移分布和应力分布的影响。

关键词: 弹性动力学; 各向异性; 液体-多孔饱和介质; Laplace 变换; 集中脉冲荷载
中图分类号: O343.6; O357.3; P315 **文献标识码:** A

引 言

液体-多孔饱和介质中各种现象的研究, 因其在各种工程领域(如土动力学、地球物理学、地震工程, 等)中的重要作用, 而受到越来越多的关注。许多作者对这类介质, 在不同领域中的许多结论和应用作了大量研究。例如, Armero 和 Callari^[1], Fellah 和 Depollier^[2], Tajjudin 和 Reddy^[3], Schanz 和 Pryl^[4], Tajjudin 和 Reddy^[5], Santos, Ravazzoli 和 Geiser^[6], Tajjudin 和 Shah^[7], S. L. Shen, L. Z. Chen 和 E. Pan^[8], 等。

地质材料, 例如海底, 通常被看成是各向异性的。因为当部分材料熔化以后再结晶, 成为各向异性的隆起。Sharma 和 Gogna^[9]研究了各向异性液体-多孔饱和固体中波的传播。Sun, Banks, Lee 和 Peng^[10]讨论了各向异性周期性层状流体-多孔饱和介质中波的传播。Dey 和 Sarkar^[11]对受初应力作用的各向异性多孔介质中的扭转表面波进行了研究。Altay 和 Dokmeçi^[12]讨论了各向异性多孔介质运动的控制方程。He 和 Huang^[13]利用连续介质力学和空间平均方法, 导出了横观各向同性液体-饱和多孔弹性介质的基本方程。

对自然界中的某些物理问题, 采用一维近似是恰当的。然而, 另外有一些类型的问题, 无法获得它们的一般解, 需要采用一维近似, 获得一个简化的模型, 又减少参数的数量。因为一

* 收稿日期: 2005-10-11; 修订日期: 2007-05-08

作者简介: R. Kumar, 教授, 博士(联系人, Tel: +91-6416-120992; E-mail: rajneesh_kuk@rediffmail.com)。

本文原文为英文, 吴承平译, 张禄坤校。

维形式的解有助于进一步给出一般解, 或者显示出该问题的某些重要特征。因此, 采用一维近似是适当的, 很多作者已经用一维近似研究了各种多孔弹性介质问题。Vgenopoulou 和 Beskos^[14] 研究了多孔弹性土柱的一维动力学问题以及土力学中的钻孔问题。Cui 等人^[15] 观察了材料的各向异性对横观各向同性材料一维固结问题的影响。Schanz 和 Cheng^[16] 讨论了一维多孔弹性柱中瞬态波的传播。Schanz 和 Cheng^[17] 研究了一维多孔粘弹性柱中动荷载的响应。Stover, Ge 和 Sreaton^[18] 用一维分析方法, 讨论了多孔塑性和粘性固结问题。Zhang, Roegiers 和 Bai^[19] 给出了双孔隙率、非等温、一维固结问题的弹塑性分析。

本文讨论一个各向异性液体-多孔饱和介质的变形问题的一维近似解, 给出材料各向异性、时间、到荷载作用点距离以及扰动源对该问题的影响。应用 Laplace 变换来求解该问题的近似特征值, 利用数值反演技术进行 Laplace 逆变换。分析了横观各向同性液体-多孔饱和介质, 在脉冲荷载或连续荷载作用下的位移和应力。给出了一个各向异性多孔弹性介质特定模型的结果, 并通过图形进行了讨论。

1 基本方程

Biot^[20] 给出了如下不计体力、无耗散的、液体-多孔饱和介质的运动方程:

$$\sigma_{j,j} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_i + \rho_{12} U_i), \quad (1)$$

$$\sigma_{,i} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} u_i + \rho_{22} U_i), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

其中 σ_j 为固体中的应力分量, $\sigma = -\beta P$ 为液体中的应力 (P 为流体中的压力, β 为孔隙率); u_i 、 U_i ($i = 1, 2, 3$) 分别为夺孔介质中固体部分、液体部分中的位移矢量分量; ρ_{11} 、 ρ_{12} 、 ρ_{22} 为动力系数, 它们与固体质量密度 ρ_s 和流体质量密度 ρ_f 有如下关系:

$$\rho_{11} + \rho_{12} = (1 - \beta) \rho_s, \quad \rho_{12} + \rho_{22} = \beta \rho_f, \quad (3)$$

从而, 整体材料的质量密度为

$$\rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22} = \rho_s + \beta(\rho_f - \rho_s). \quad (4)$$

Biot^[21] 给出了关于 z 轴对称的, 横观各向同性液体-多孔饱和固体的应力-应变关系

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2Ne_{11} + A(e_{11} + e_{22}) + Fe_{33} + M\varepsilon, \\ \sigma_{22} = 2Ne_{22} + A(e_{11} + e_{22}) + Fe_{33} + M\varepsilon, \\ \sigma_{33} = Ce_{33} + F(e_{11} + e_{22}) + Q\varepsilon, \\ \sigma_{23} = Le_{23}, \quad \sigma_{13} = Le_{13}, \quad \sigma_{12} = Le_{12}, \\ \sigma = M(e_{11} + e_{22}) + Qe_{33} + R\varepsilon, \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$e_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, & \text{当 } i = j, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, & \text{当 } i \neq j, \end{cases} \quad \varepsilon = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}, \quad (6)$$

A 、 N 、 F 、 M 、 C 、 Q 、 L 和 R 为横观各向同性液体-多孔饱和固体的弹性常数。这些弹性常数可以通过如下关系

$$F = A, \quad M = Q, \quad L = N, \quad C = A + 2N, \quad (7)$$

退化为各向同性液体-多孔饱和固体的弹性常数。

将方程(5)和(6)代入方程(1)和(2), 可得到横观各向同性液体-多孔饱和固体以分量形式给出的场方程

$$\left\{ \begin{array}{l} (A + 2N) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + L \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (A + N) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (F + L) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \\ M \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u + \rho_{12} U), \\ M \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + Q \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + R \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} u + \rho_{22} U), \\ N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A + 2N) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + L \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (A + N) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (F + L) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \\ M \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} v + \rho_{12} V), \\ M \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Q \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + R \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} v + \rho_{22} V), \\ L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + C \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (F + L) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) + \\ Q \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} w + \rho_{12} W), \\ M \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) + Q \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + R \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} w + \rho_{22} W), \end{array} \right. \quad (8)$$

其中 $(u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ 和 $(U_1, U_2, U_3) = (U, V, W)$ 分别表示多孔介质体固体部分和液体部分的位移分量。

2 数学描述

考虑一无限大, 关于 z 轴对称的, 均匀的横观各向同性的液体-多孔饱和介质, z 轴方向取为竖直向下。研究一维柱中的扰动, 柱中固体部分和流体部分的运动均限于竖直方向, 即沿 z 轴方向。荷载为时间 t 的函数, 作用在无限大介质内部的某些点上, 并将该点取为原点, 即力沿 z 轴作用在直角坐标系的原点。

3 方程的求解

一维形式的场方程(8) 成为

$$\left\{ \begin{array}{l} C \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Q \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} w + \rho_{12} W), \\ Q \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + R \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} w + \rho_{22} W). \end{array} \right. \quad (9)$$

为了将场方程(9)化为无量纲形式, 我们取一具有长度量纲的量 h , 并如下定义无量纲量:

$$w' = \frac{w}{h}, \quad W' = \frac{W}{h}, \quad z' = \frac{z}{h}, \quad t' = \omega t, \quad \alpha_z = \frac{\alpha_z}{C}, \quad \sigma = \frac{\sigma}{C}, \quad (10)$$

其中 ω 为角频率。将式(10)中的量代入方程(9), 省去字母的撇号“'”, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \alpha_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \\ a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + b^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \alpha_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} a^2 = \frac{Q}{C}, \quad b^2 = \frac{R}{C}, \quad \alpha_{11} = H_0 R_{11}, \quad \alpha_{12} = H_0 R_{12}, \quad \alpha_{22} = H_0 R_{22}, \\ H_0 = \frac{h^2 \omega^2 \rho}{C}, \quad R_{11} = \frac{\rho_{11}}{\rho}, \quad R_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho}, \quad R_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho}. \end{cases} \quad (12)$$

在方程(11)中,定义关于 t 的 Laplace 变换

$$\{w(z, p), W(z, p)\} = \int_0^\infty \{w(z, t), W(z, t)\} e^{-pt} dt, \quad (13)$$

从而得到一组包含两个齐次方程的方程组,记作

$$\mathbf{A}_0 \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{B}_0 \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{Y} = [w, W]^T, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & a^2 \\ a^2 & b^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = - \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix}, \\ d_{11} = \alpha_{11} p^2, \quad d_{12} = \alpha_{12} p^2, \quad d_{22} = \alpha_{22} p^2, \end{cases} \quad (15)$$

式中字母上的点“·”,表示对 z 的导数.为了求解该方程组,设

$$\mathbf{Y}(z, p) = \mathbf{X}(p) e^{kz}. \quad (16)$$

将式(16)代入式(14),得到特征方程

$$\det(k^2 \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0) = 0, \quad (17)$$

简化后得

$$(b^2 - a^4)k^4 - (d_{11}b^2 + d_{22} - 2d_{12}a^2)k^2 + (d_{11}d_{22} - d_{12}^2) = 0 \quad (18)$$

方程(18)是关于 k^2 的二次方程,可求解得

$$k_1^2 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}, \quad k_2^2 = \frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}, \quad (19)$$

其中

$$A_1 = - \frac{d_{11}b^2 + d_{22} - 2d_{12}a^2}{b^2 - a^4}, \quad A_2 = \frac{d_{11}d_{22} - d_{12}^2}{b^2 - a^4}. \quad (20)$$

与特征值 $\pm k_1$ 和 $\pm k_2$ 相关的特征向量为

$$\begin{cases} \mathbf{X}_i^T = [1 \quad m_i], & k = k_i; i = 1, 2, \\ \mathbf{X}_{i+2}^T = [1 \quad m_i], & k = -k_i; i = 1, 2, \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$m_i = \frac{d_{11} - k_i^2}{k_i^2 a^2 - d_{12}} = \frac{d_{12} - k_i^2 a^2}{k_i^2 b^2 - d_{22}}, \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

变换域内横观各向同性液体-多孔饱和和介质中一维问题的一般解可写为

$$\mathbf{Y}(z, p) = B_1 \mathbf{X}_1 e^{k_1 z} + B_2 \mathbf{X}_2 e^{k_2 z} + B_3 \mathbf{X}_3 e^{-k_1 z} + B_4 \mathbf{X}_4 e^{-k_2 z}, \quad (23)$$

其中 B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 为任意常数,可由边界条件确定.

通过式(10)、式(12)和式(13),得到式(5)和式(6)的一维无量纲变换式,并利用式(23)得到所考虑介质在变换域中的位移分量和应力分量:

当 $z \geq 0$

$$\begin{cases} w = B_3 e^{-k_1 z} + B_4 e^{-k_2 z}, & W = m_1 B_3 e^{-k_1 z} + m_2 B_4 e^{-k_2 z}, \\ \sigma_{33} = -(1 + a^2 m_1) k_1 B_3 e^{-k_1 z} - (1 + a^2 m_2) k_2 B_4 e^{-k_2 z}, \\ \sigma = -(a^2 + b^2 m_1) k_1 B_3 e^{-k_1 z} - (a^2 + b^2 m_2) k_2 B_4 e^{-k_2 z}. \end{cases} \quad (24)$$

当 $z \leq 0$

$$\begin{cases} w = B_1 e^{k_1 z} + B_2 e^{k_2 z}, & W = m_1 B_1 e^{k_1 z} + m_2 B_2 e^{k_2 z}, \\ \sigma_{33} = (1 + a^2 m_1) k_1 B_1 e^{k_1 z} + (1 + a^2 m_2) k_2 B_2 e^{k_2 z}, \\ \sigma = (a^2 + b^2 m_1) k_1 B_1 e^{k_1 z} + (a^2 + b^2 m_2) k_2 B_2 e^{k_2 z}. \end{cases} \quad (25)$$

4 边界条件

设荷载 $f(t)$ 作用在坐标系原点, 于是本问题 $z = 0$ 处的边界条件为

$$\begin{cases} w(0^+, t) - w(0^-, t) = 0, & W(0^+, t) - W(0^-, t) = 0, \\ \sigma_{33}(0^+, t) - \sigma_{33}(0^-, t) = -f(t), & \sigma(0^+, t) - \sigma(0^-, t) = f(t). \end{cases} \quad (26)$$

利用式(10)、式(12)和式(13), 边界条件(26)变换为(省去字母的撇号“’”)

$$\begin{cases} w(0^+, p) - w(0^-, p) = 0, & W(0^+, p) - W(0^-, p) = 0, \\ \sigma_{33}(0^+, p) - \sigma_{33}(0^-, p) = -\frac{f(p)}{C}, & \sigma(0^+, p) - \sigma(0^-, p) = \frac{f(p)}{C}. \end{cases} \quad (27)$$

将由式(24)和式(25)给出的变换后的位移和应力, 代入变换后的边界条件(27), 得到由包含4个未知数 B_1, B_2, B_3, B_4 的4个方程构成的方程组, 并解得

$$\begin{cases} B_1 = -\frac{(a^2 + 1) + (a^2 + b^2)m_2 f(p)}{2k_1 \Delta} = B_3, \\ B_2 = \frac{(a^2 + 1) + (a^2 + b^2)m_1 f(p)}{2k_2 \Delta} = B_4, \end{cases} \quad (28)$$

其中 $\Delta = (b^2 - a^4)(m_2 - m_1)$.

因此, 借助式(28), 方程组(24)和方程组(25)给出了在变换域中, 无限横观各向同性液体多孔饱和介质在任意荷载作用下, 一维柱问题的位移分量和应力分量. 对它进行逆变换, 给出了物理域中的位移和应力. Laplace 逆变换将通过数值方法进行, 将在下节介绍.

5 Laplace 逆变换

Laplace 变换场是 z 的函数, 是变换参数 p 的函数, 因此可表示成 $\phi(z, p)$. 若固定 z 值, 在函数 $\phi(z, p)$ 表达式(24)和式(25)中又可以看作某函数 $g(t)$ 的 Laplace 变换 $g(p)$. 按照 Honig 和 Hirdes^[22] 的做法, Laplace 变换函数 $g(p)$ 可以如下反演得到.

函数 $g(t)$ 如下求得

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S-i\infty}^{S+i\infty} e^{pt} g(p) dp, \quad (29)$$

其中 S 是一个任意实数, 它大于所有单个 $g(p)$ 的实部. 取 $p = S + iy$, 得到

$$g(t) = \frac{e^{St}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} g(S + iy) dy. \quad (30)$$

现取 $e^{-St} g(t)$ 为 $h(t)$, 并在 $[0, 2l]$ 上展开为 Fourier 级数, 得到近似表达式

$$g(t) = g_{\infty}(t) + E_D, \quad (31)$$

其中

$$\begin{cases} g_{\infty}(t) = \frac{S_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} S_j, & 0 \leq t \leq 2l, \\ S_j = \frac{e^{St}}{l} \operatorname{Re} \left[e^{ij\pi/l} g \left(S + \frac{ij\pi}{l} \right) \right], \end{cases} \quad (32)$$

E_D 为离散误差, 可通过选择足够大的 S , 使 E_D 变得任意小。

由于无穷级数 (32) 可以仅取有限项 (J 项) 相加, 这样得到 $g(t)$ 的近似值为

$$g_J(t) = \frac{S_0}{2} + \sum_{j=1}^J S_j, \quad 0 \leq t \leq 2l. \quad (33)$$

在利用上式估计 $g(t)$ 时, 我们引入截断误差 E_T , 将它加入离散误差构成总近似误差。利用“Korrektur 法”减小离散误差, 同时利用“ ϵ 算法”来减少截断误差, 从而加快收敛速度。

根据 Honig 和 Hirdes 的文献 [22], Korrektur 法对函数 $g(t)$ 的估计式为

$$g(t) = g_{\infty}(t) - e^{-2Sl} g_{\infty}(2l+t) + E'_D,$$

其中

$$|E'_D| \ll |E_D|.$$

因此 $g(t)$ 的近似值变为

$$g'_J(t) = g_J(t) - e^{-2Sl} g_J(2l+t), \quad (34)$$

其中 J' 为整数, 且 $J' < J$ 。

下面将介绍 ϵ 算法, 利用该算法可使级数 (33) 收敛加速。设 J 为自然数, $s_m = \sum_{j=1}^m S_j$ 为方程 (33) 部分和序列。定义 ϵ 序列为

$$\epsilon_{0,m} = 0, \quad \epsilon_{1,m} = s_m,$$

$$\epsilon_{n+1,m} = \epsilon_{n-1,m+1} + \frac{1}{\epsilon_{n,m+1} + \epsilon_{n,m}}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

序列 $\epsilon_{1,1}, \epsilon_{3,1}, \dots, \epsilon_{J',1}$ 收敛于 $g(t) + E_D - S_0/2$, 其收敛速度快于部分和序列 s_m ($m = 1, 2, 3, \dots$)。实际上, 式 (34) 的 Laplace 逆变换和 ϵ 算法同时进行。根据 Honig 和 Hirdes [22] 提出的判据来选定 S 和 l 的值。

利用这一数值反演技术, 数值地确定物理域中的位移分量和应力分量。

6 应 用

为了直观地说明该方法的应用及其解, 我们考虑两种不同类型的荷载:

情况 (i) 脉冲荷载作用, 即 $f(t) = F_0 \delta(t)$, 其中 $\delta(t)$ 为 Dirac δ 函数, F_0 为力的大小。

设 $F_0 = F_0/C$, 略去撇号“ $'$ ”后, 式 (28) 变成

$$\begin{cases} B_1 = -\frac{(a^2+1) + (a^2+b^2)m_2}{2k_1\Delta} F_0 = B_3, \\ B_2 = \frac{(a^2+1) + (a^2+b^2)m_1}{2k_2\Delta} F_0 = B_4. \end{cases} \quad (35)$$

因此, 利用上式后, 公式 (24) 和公式 (25) 表示了变换域中脉冲荷载作用下的位移分量和应力分量。

情况 (ii) 连续荷载作用, 即 $f(t) = F_0 H(t)$, 其中 $H(t)$ 为 Heaviside 单位阶梯函数, F_0 为力的大小。设 $F_0 = F_0/C$, 略去撇号“ $'$ ”后, (28) 式变为

$$\begin{cases} B_1 = -\frac{(a^2 + 1) + (a^2 + b^2)m_2}{2k_1\Delta} \frac{F_0}{p} = B_3, \\ B_2 = \frac{(a^2 + 1) + (a^2 + b^2)m_1}{2k_2\Delta} \frac{F_0}{p} = B_4. \end{cases} \quad (36)$$

因此,利用上式,公式(24)和公式(25)就表示了变换域中连续荷载作用下的位移分量和应力分量。

7 数值结果和讨论

对一个特定模型,利用上述数值反演技术,再分别计算多孔介质的固体部分、液体部分的位移分量和应力分量。该模型中的弹性常数取为

$$A = 0.443 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, F = f_0 A, Q = 0.0743 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, M = m_0 Q, \\ N = 0.2765 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, L = l_0 N, R = 0.0326 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, C = F + 2L.$$

当取 $f_0 = m_0 = l_0 = 1.0$ 时,上述弹性常数变成了各向同性的煤油-饱和砂岩的弹性常数(见 Fatt, 1959)。

动力系数取为

$$\rho_{11} = 1.926 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \rho_{12} = -0.00214 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \rho_{22} = 0.21534 \times 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

孔隙率取 $\beta = 0.26$ 。再设

$$\frac{h^2 \omega^2 \rho}{C} = 1.0, \frac{F_0}{C} = 1.0.$$

若取 $f_0 = 1.5, m_0 = 1.2, l_0 = 2.0$,按各向异性体进行数值计算,当然也可以取其它值。

针对横观各向同性液体-多孔饱和固体以及各向同性液体-多孔饱和固体两种介质情况,对不同时间值,即 $t = 0.1, t = 0.2, t = 0.5$,相对于深度 z 进行扰动计算。图1至图4显示了脉冲荷载作用时(即情况(i))的结果,图5至图8显示了连续荷载作用(即情况(ii))的结果。

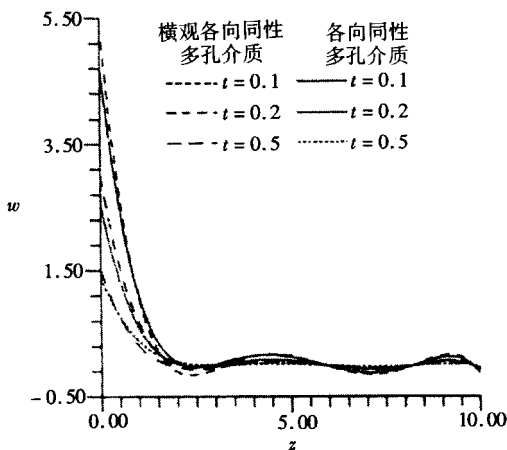


图1 脉冲荷载作用时固体部分位移 w 的分布

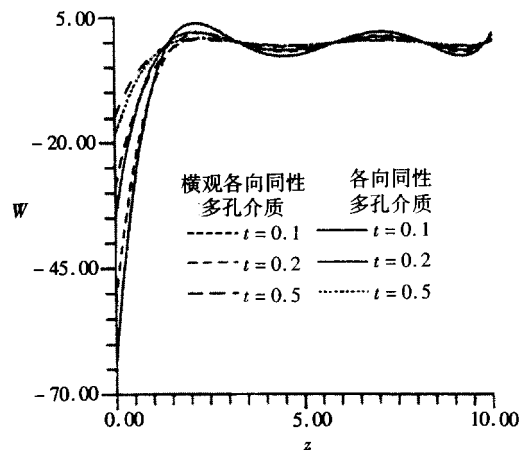


图2 脉冲荷载作用时流体部分位移 W 的分布

我们发现,两种情况下,在最小深度 $z = 0, t$ 也取最小值时,位移和应力的绝对值最大。这说明,荷载刚加载时,冲击也最大。随着时间的推移,位移和应力逐渐减小,并且伴随振荡,

最终趋于 0。随着深度的增加,即到荷载作用点距离的增加,所有分布曲线趋于无扰动,并最终变为 0。这意味着,位移曲线和应力曲线满足辐射条件(radiation conditions)。

比较两种情况下材料各向异性的影响,是位移和应力数量级的增大或减小,但增减幅度很小。然而脉冲荷载作用时对应力分布的影响较为显著。

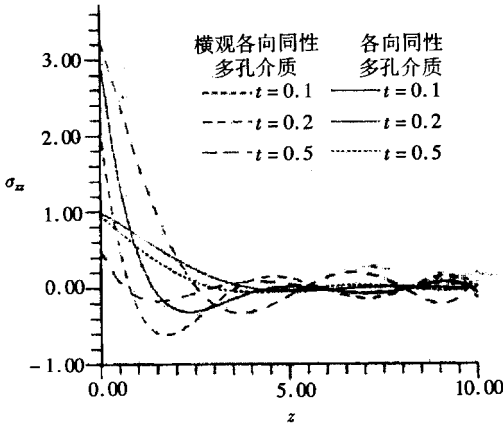


图 3 脉冲荷载作用时固体部分应力 σ_z 的分布

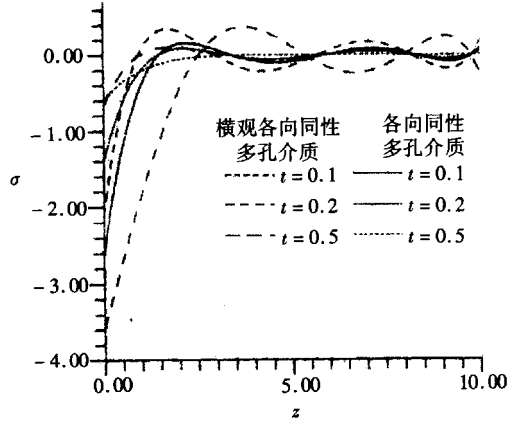


图 4 脉冲荷载作用时流体部分应力 σ 的分布

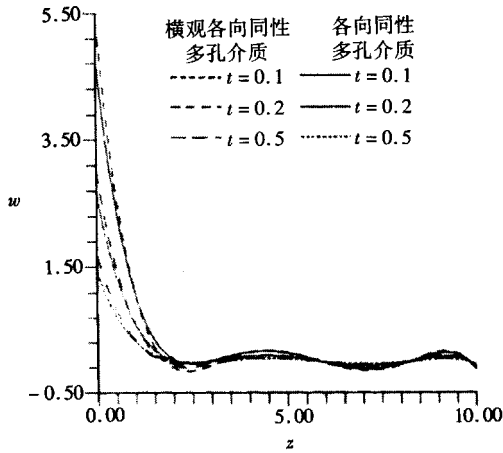


图 5 连续荷载作用时固体部分位移 w 的分布

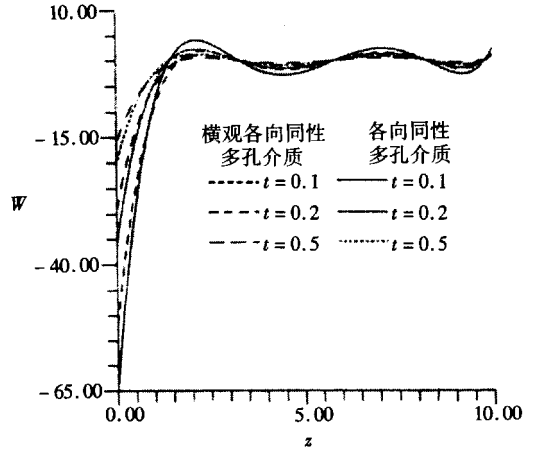


图 6 连续荷载作用时流体部分位移 W 的分布

比较两种情况下位移和应力的数量级,它们通常处于相同的值域范围。在两种情况下,流体部分中的位移比对应固体部分中的位移大得多,即,介质中流体部分的扰动比固体部分的扰动大得多。

8 结 论

本文分析了横观各向同性液体-多孔饱和介质,在脉冲荷载或连续荷载作用下的一维变形问题。得到如下结论:介质中产生的扰动受到介质的各向异性、时间、离荷载作用点的距离以及荷载性质的影响。曲线的走向显示了液体-多孔饱和介质的性质,并满足问题所要求的条件。

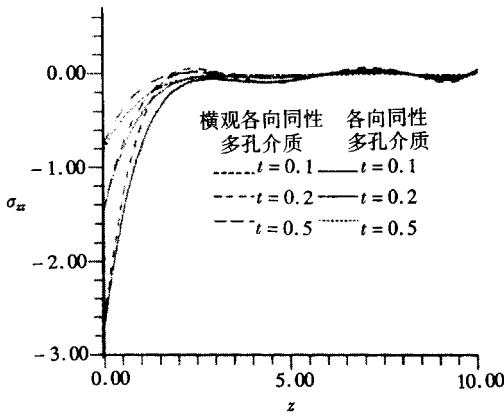


图7 连续荷载作用时固体部分应力 σ_{xx} 的分布

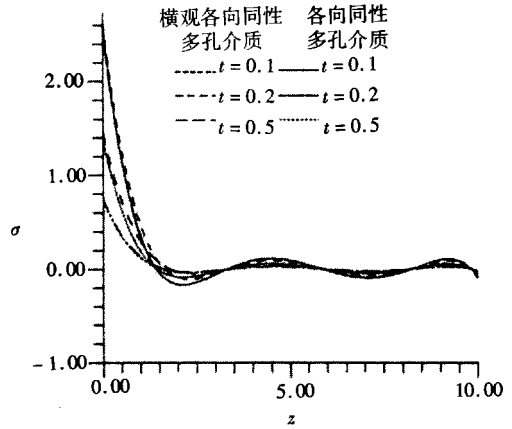


图8 连续荷载作用时流体部分应力 σ 的分布

[参 考 文 献]

- [1] Armero F, Callari C. An analysis of strong discontinuities in a saturated poroelastic solid[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1999, **46**(10): 1673-1698.
- [2] Fellah Z E A, Depollier C. Transient acoustic wave propagation in rigid porous media: A time domain approach[J]. J Acoust Soc Amer, 2000, **107**(2): 683-688.
- [3] Tajjudin M, Reddy G N. Existence of Stoneley waves at an unbounded interface between a poroelastic solid lying over an elastic solid[J]. Bull Calcutta Math Soc, 2002, **94**(2): 107-112.
- [4] Schanz M, Pryl D. Dynamic fundamental solutions for compressible and incompressible modeled poroelastic continua[J]. Internat J Solids Structures, 2004, **41**(15): 4047-4073.
- [5] Tajjudin M, Reddy G N. Effect of boundaries on the dynamic interaction of a liquid-filled porous layer and a supporting continuum[J]. Sadhana, 2005, **30**(4): 527-535.
- [6] Santos J E, Ravazzoli C L, Geiser J. On the static and dynamic behavior of fluid saturated composite porous solids: a homogenization approach[J]. Internat J Solids Structures, 2006, **43**(5): 1224-1238.
- [7] Tajjudin M, Shah S A. Circumferential waves of infinite hollow poroelastic cylinders[J]. J Appl Mech, 2006, **73**(4): 705-708.
- [8] Chen S L, Chen L Z, Pan E. Three-dimensional time-harmonic Green's functions of saturated soil under buried loading[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2007, **27**(5): 448-462.
- [9] Sharma M D, Gogna M L. Wave propagation in anisotropic liquid-saturated porous solids[J]. J Acoust Soc Amer, 1991, **90**(2): 1068-1073.
- [10] Sun F, Banks-Lee P, Peng H. Wave propagation theory in anisotropic periodically layered fluid-saturated porous media[J]. J Acoust Soc Amer, 1993, **93**(3): 1277-1285.
- [11] Dey S, Sarker M G. Torsional surface waves in an initially stressed anisotropic porous medium[J]. J Engg Mech, 2002, **128**(2): 184-189.
- [12] Altay G, Dokmeci M C. On the equations governing the motion of an anisotropic poroelastic material [J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2006, **462**(2072): 2373-2396.
- [13] He F S, Huang Y. Basic equations of transversely isotropic fluid-saturated poroelastic media[J]. Chinese J Geophysics, 1984, **11**(66): 131-137.
- [14] Vgenopoulou I, Beskos D E. Dynamic poroelastic column and borehole problem analysis[J]. Soil

- Dynamics and Earthquake Engineering, 1984, **11**(66): 335-345.
- [15] Cui L, Cheng A H D, Kaliakin V N, et al. Finite element analysis of anisotropic poroelasticity: A generalized Mandel's problem and an inclined bore hole problem[J]. *Internat J Numer Anal Methods Geomech*, 1996, **20**: 381-401.
- [16] Schanz M, Cheng A H D. Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column[J]. *Acta Mechanica*, 2000, **145**(1/4): 1-18.
- [17] Schanz M, Cheng A H D. Dynamic analysis of a one-dimensional poroviscoelastic column[J]. *J Appl Mech Trans ASME*, 2001, **68**(2): 192-198.
- [18] Stover S C, Ge S, Sreaton E J. A one-dimensional analytically based approach for studying poroplastic and viscous consolidation: Application to Woodlark basin, Papua New Guinea[J]. *J Geophysics Research*, 2003, **108**(B9): EPM11 1-14.
- [19] Zhang J, Roegiers J C, Bai M. Dual porosity elastoplastic analysis of non-isothermal one-dimensional consolidation[J]. *Geotechnical and Geological Engineering*, 2004, **22**(4): 589-610.
- [20] Biot M A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid[J]. *J Acoust Soc Amer*, 1956, **28**(2): 168-191.
- [21] Biot M A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid[J]. *J Appl Phys*, 1956, **27**(5): 459-467.
- [22] Honig G, Hirdes U. A method for the numerical inversion of the Laplace transform[J]. *J Comput Appl Math*, 1984, **10**: 113-132.

Elastodynamic Analysis of an Anisotropic Liquid-Saturated Porous Medium Due to Mechanical Sources

Rajneesh Kumar¹, Aseem Miglani², N. R. Garg³

(1. Department of Mathematics, Kurukshetra University, Kurukshetra-136 119, India ;

2. Department of Mathematics, Guru Jambheshwar University of Science and Technology,
Hisar-125 001, India ;

3. Department of Mathematics, Maharshi Dayanand University, Rohtak-124 001, India)

Abstract: Elastodynamic analysis of an anisotropic liquid-saturated porous medium has been made to study a deformation problem of a transversely isotropic liquid-saturated porous medium due to mechanical sources. Certain physical problems are of the nature, in which the deformation takes place only in one direction, e. g., the problem relating to deformed structures and columns. In soil mechanics, assumption of only vertical subsidence is often invoked and this leads to the one dimensional model of poroelasticity. By considering a model of one-dimensional deformation of anisotropic liquid-saturated porous medium, the variations in disturbances were observed with reference to time and distance. The distribution of displacements and stresses are affected due to anisotropy of the medium, and also due to the type of sources causing the disturbances.

Key words: elastodynamic; anisotropic; liquid-saturated porous; Laplace transform; impulsive and concentrated source