

高超音速零攻角尖锥边界层转捩的机理^{*}

董 明, 罗纪生

(天津大学 力学系, 天津 300072)

(本刊编委罗纪生来稿)

摘要: 先计算出高超音速零攻角尖锥边界层的定常层流流场, 然后在计算域的入口引入两组有限幅值的 T-S 波扰动, 对空间模式的转捩过程进行了直接数值模拟. 分析了转捩过程的机理, 发现平均流剖面稳定性的变化是其关键. 并进一步讨论了不同模态初始扰动在高超音速尖锥边界层中的演化规律.

关键词: 零攻角; 尖锥边界层; 转捩; 稳定性

中图分类号: 文献标识码: A

引 言

长期以来, 转捩及湍流问题就是流体力学研究的热点, 以边界层湍流为代表的壁湍流又是工程和自然界中最常见的湍流状态. 随着计算机技术的发展, 直接数值模拟方法已经成为研究湍流的有力手段. 早期的数值模拟都是针对不可压缩流, 并多数采用时间模式. 从计算量上来看, 时间模式比空间模式要少得多, 但它对流向要做周期性假设, 使它只能模拟一些具有简单外形的流动情况, 而对复杂一些的流动, 比如尖锥、钝头体等, 这种方法就无法应用. 随着航天航空技术的发展, 对可压缩流的转捩预测及湍流特征的研究越来越受人们关注. 但是, 目前可压缩湍流的直接数值模拟多数是针对平板边界层做的, 而工程中却不能仅限于平板边界层. 董明等人^[1]基于超音速零攻角尖锥边界层, 研究了层流扰动演化的特征, 但是文中并没有模拟出转捩的过程, 对尖锥边界层转捩过程的研究有待进一步进行.

对转捩过程的传统描述是, 转捩从扰动的放大开始, 由于非线性作用, 产生高次谐波, 流动变得越来越复杂, 最终导致湍流. 但是, 王新军等人^[2]在对不可压缩槽道流转捩机理的研究中指出, 这种描述无法解释转捩中的“breakdown”过程. 他们发现, 平均流剖面稳定性特性的改变在“breakdown”过程中起了关键性的作用. 其后, 黄章峰等人^[3], 曹伟等人^[4]在对 Mach 数为 4.5 的超音速平板边界层时间模式与空间模式的转捩研究中得到了同样的结论, 而且发现, 虽然层流中最不稳定的波是第二模态波, 但在转捩过程中最终起作用的是第一模态波. 本文将采用空间模式, 研究来流 Mach 数为 6, 半锥角为 5° 的零攻角高超音速尖锥边界层的转捩机理.

要完全用直接数值模拟的方法算出足够大的基本流流场, 以满足较大 Reynolds 数下的转

* 收稿日期: 2007-05-10; 修订日期: 2007-06-21

基金项目: 国家自然科学基金(重点)资助项目(10632050)

作者简介: 董明(1981—), 男, 辽宁人, 博士(Tel: + 86-22-27403374; E-mail: dongn27890175@126.com);

罗纪生(联系人, Tel/Fax: + 86-22-27407025; E-mail: jsluo@tju.edu.cn).

据研究,其计算工作量太大,因而我们采用了一种简化的计算方法。图1给出尖锥绕流问题及计算域示意图,数值方法仿照文献[1]。首先引入锥型流假设^[5],在球坐标系下求解无粘问题,计算区域为从壁面到斜激波处。然后选取贴近壁面的区域用N-S方程求解,上边界给定为无粘解,初始流场用由边界层方程求得的相似性解,求解时要先引入Mangler变换^[6]。由于入口条件是由简化方程得到的近似解,入口附近会有不光滑的区域。因而实际为研究转捩问题所选的计算域的入口要在更下游一点。

1 数值方法

在有了基本流后,再在入口引入多组有限幅值的T-S波扰动,模拟转捩过程。计算域入口上边界各物理量值被用作使方程无量纲化的参考值,长度单位的参考量为入口处边界层排移厚度。无量纲的N-S方程见式(1)。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{G} + \mathbf{M} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_v + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F}_v + \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{G}_v, \quad (1)$$

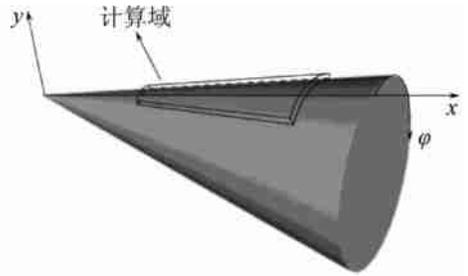


图1 尖锥绕流问题及计算域的示意图

其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} r\rho \\ r\rho u \\ r\rho v \\ r\rho w \\ r\rho e_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} r\rho u \\ r\rho uu + \tau_p \\ r\rho w \\ r\rho w \\ ru(\rho e_s + p) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} r\rho \\ r\rho u \\ r\rho v + \tau_p \\ r\rho w \\ rv(\rho e_s + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w \\ \rho w \\ w(\rho e_s + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho w \sin \alpha + \tau_{33} \sin \alpha - p \sin \alpha \\ -\rho w \cos \alpha + \tau_{33} \cos \alpha - p \cos \alpha \\ (\rho w - \tau_{13}) \sin \alpha + (\rho w - \tau_{23}) \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ r\tau_{11} \\ r\tau_{12} \\ r\tau_{13} \\ r(\tau_{11}u + \tau_{12}v + \tau_{13}w - q_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ r\tau_{21} \\ r\tau_{22} \\ r\tau_{23} \\ r(\tau_{21}u + \tau_{22}v + \tau_{23}w - q_2) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \\ \tau_{31}u + \tau_{32}v + \tau_{33}w - q_3 \end{pmatrix},$$

$$e_s = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}$$

$$\tau_{11} = \frac{\mu}{Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right], \quad \tau_{12} = \tau_{21} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\begin{aligned} \tau_{22} &= \frac{\mu}{Re} \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \dots \mathbf{u} \right], \quad \tau_{13} = \tau_{31} = \frac{\mu}{Re} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{r \partial \phi} - \frac{w}{r} \sin \alpha \right], \\ \tau_{23} &= \tau_{32} = \frac{\mu}{Re} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{r \partial \phi} - \frac{w}{r} \cos \alpha \right], \\ \tau_{33} &= 2 \frac{\mu}{Re} \left[\frac{\partial w}{r \partial \phi} + \frac{u}{r} \sin \alpha + \frac{v}{r} \cos \alpha \right] - \frac{2}{3} \frac{\mu}{Re} \dots \mathbf{u}, \\ \dots \mathbf{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{r \partial \phi} + \frac{u \sin \alpha}{r} + \frac{v \cos \alpha}{r}, \\ q_1 &= - \frac{k}{(\gamma - 1) Ma^2 Re Pr} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_2 = - \frac{k}{(\gamma - 1) Ma^2 Re Pr} \frac{\partial T}{\partial y}, \\ q_3 &= - \frac{k}{(\gamma - 1) Ma^2 Re Pr} \frac{\partial T}{\partial \phi} \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

$r = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ 表示定点到圆锥轴线的距离, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ 分别为流向、法向速度与周向速度, p, T, ρ 分别为压力、温度、密度, μ, k 分别为粘性系数、热传导系数, q_1, q_2, q_3 为热通量, Re 为 Reynolds 数, Pr 为 Prandtl 数。

数值模拟的流动环境相当于 10 000 m 的高空气体, 取来流 Mach 数为 6, 温度为 223.3 K, 尖锥的半锥角 5° , 前端产生斜激波的激波角为 10.637° 。过激波后 Mach 数降为 5.773。取计算域入口 Reynolds 数为 50 000, 相应的 x 值为 1.23 m。入口边界层的排移厚度 δ 为 0.87 mm。用理想气体方程组与锥型流假设可以计算出计算域上边界的 Mach 数为 5.585。

文中对流项采取五阶迎风差分格式(2); 粘性项采取六阶中心型差分格式(3); 时间上采用二阶 Runge-Kutta 法。

$$\begin{cases} \frac{\partial f_i^+}{\partial x} = \left[-\frac{1}{20} f_{j+2} + \frac{1}{2} f_{j+1} + \frac{1}{3} f_j - f_{j-1} + \frac{1}{4} f_{j-2} - \frac{1}{30} f_{j-3} \right] \Big| dx, \\ \frac{\partial f_i^-}{\partial x} = \left[\frac{1}{30} f_{j+3} - \frac{1}{4} f_{j+2} + f_{j+1} - \frac{1}{3} f_j - \frac{1}{2} f_{j-1} + \frac{1}{20} f_{j-2} \right] \Big| dx, \\ \frac{\partial f_i}{\partial x} = \left[\frac{3}{4} (f_{j+1} - f_{j-1}) - \frac{3}{20} (f_{j+2} - f_{j-2}) + \frac{1}{60} (f_{j+3} - f_{j-3}) \right] \Big| dx. \end{cases} \quad (2)$$

计算域的入口和上边界的物理量给定, 出口用嵌边边界条件, 锥面上用速度无滑移、定温条件(温度取 1 557.8 K), 周向采用周期边界条件。

数值模拟中 x 与 ϕ 方向用均匀网格; y 方向用变网格, 变换为 $y = y_n (e^{\eta n} - 1) / (e^b - 1)$, 其中 $b = 6.0, \eta = 0 \sim 1$, 均匀变化。

2 数值结果及分析

我们采取在流场的入口引入有限幅值 T-S 波的方法, 来研究流动转捩过程的性质。由于高超音速流动存在多个不稳定模态的波, 线性稳定性分析的结果为, 第二模态的波是二维扰动最不稳定, 而第一模态的波相对于不可压缩的 squire 模态, 是三维扰动最不稳定。为了研究两种模态的扰动在转捩中的作用, 本文分别选取第一模态与第二模态波为主要初始扰动进行了计算, 特别考察了转捩过程中它们的演化。两种情况的计算域分别为 $250\delta \times 18\delta \times 14.6^\circ$ 与 $200\delta \times 18\delta \times 14.6^\circ$, 计算网格分别为 $1\,251 \times 81 \times 101$ 与 $1\,001 \times 81 \times 101$ 。

研究扰动演化时, 入口引入扰动的速度、温度、压力为

$$(\hat{u}', \hat{v}', \hat{w}', \hat{t}', \hat{p}')^T = a [(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{t}, \hat{p})^T e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + \text{c. c.}], \quad (4)$$

其中 $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{t}, \hat{p})$ 为线性扰动方程的正规化特征函数解, 它们均为 y 的函数; c. c. 为前面表达式的共轭复数; a 为扰动的幅值; ω 为扰动频率; α 为复数, 其实部表示流向波数, 虚部的相反

数表示流向增长率; β 为实数, 表示展向波数; $z = \phi \cdot r$ 表示展向弧长。

首先分析情况 I。在入口引入 3 个幅值均为 0.05 的 T-S 波扰动, 其中扰动 I 为二维增长波(选为第一模态最不稳定的二维波), 扰动 II 与 III 是三维波, 其特征值见表 1。

表 1 引入的 3 组 T-S 波的特征值

	ω	α_r	$-\alpha_i$	β
扰动 I	0.512 513	0.593 796	0.003 237	0.0
扰动 II	0.512 513	0.602 787	0.010 920	0.4
扰动 III	1.025 026	1.149 153	-0.002 54	0.6

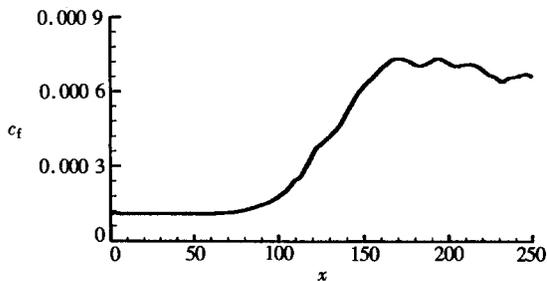


图 2 摩擦因数沿流向的变化

计算一直进行到流场统计定常为止。图 2 为壁面摩擦系数沿流向的变化。开始阶段, 摩擦因数略有下降, 在 $x = 100$ 左右处迅速上升, 而在 $x = 160$ 左右处开始下降并趋于平缓。这一变化反映了从层流到湍流的转捩过程, 并可以初步界定转捩中 breakdown 过程的开始与结束的位置。图 3 给出的是 $y = 0.294$ 处脉动速度均方根值沿流向的分布曲线。

考虑到可压缩流密度不是常数, 图 4 进一步给出了平均脉动动能 $k = \overline{\rho u_i u_i} / 2$ 沿流向的分布。其变化同样反映了转捩的过程, 只是该曲线迅速上升的起止点均比图 2 略微提前。这是由于壁面摩擦因数与平均流形状有关, 而脉动动能与脉动速度有关, 平均流剖面的修正是脉动速度的发展引起的, 所以存在一定的滞后性。并且, 值得注意的是, 考虑密度影响以后, 脉动动能的分布与均方根速度相比形状发生了一定的变化, 尤其在 $x = 110$ 以后, 这主要是平均密度剖面的修正引起的。再次说明平均剖面的修正与脉动速度相比, 存在滞后性。同时, 图 4 给出了脉动动能对 x 的导数沿流向的分布, $x = 100$ 处脉动动能导数最大。

图 5 进一步给出不同位置处流向平均速度、平均密度、平均温度以及脉动速度均方根沿法向的分布。入口处为规则的层流剖面; $x = 100$ 处, 剖面形状发生了一定的变化; 到 $x = 130$ 处, 速度剖面已经出现了拐点, 其它物理量也有了明显的变化; 到 $x = 160$ 处, 速度拐点上移; 而到 $x = 230$ 以后, 速度拐点消失, 各物理量的平均值就变化很小了, 意味着转捩已经完成。以上变化反映了转捩的整个过程: 层流阶段及转捩完成后平均流剖面变化都很缓慢, 而在转捩的 breakdown 阶段, 速度剖面将出现拐点, 并向湍流剖面快速过渡。由图 2 可知, $x = 160$ 处转捩实际已经完成, 但图 5 中该处剖面与湍流剖面相差较大, 速度拐点仍然存在。其原因是转捩的 breakdown 过程结束虽然意味着已进入湍流阶段, 但还没有到达充分发展的湍流, 还需要通

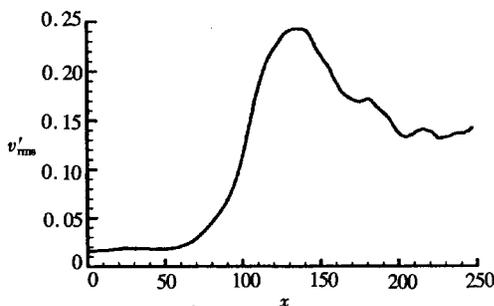


图 3 脉动速度均方根沿流向变化

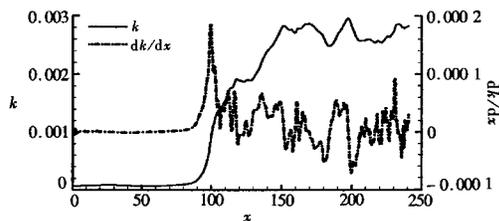


图 4 脉动动能及其变化率沿流向变化

过一个过程。

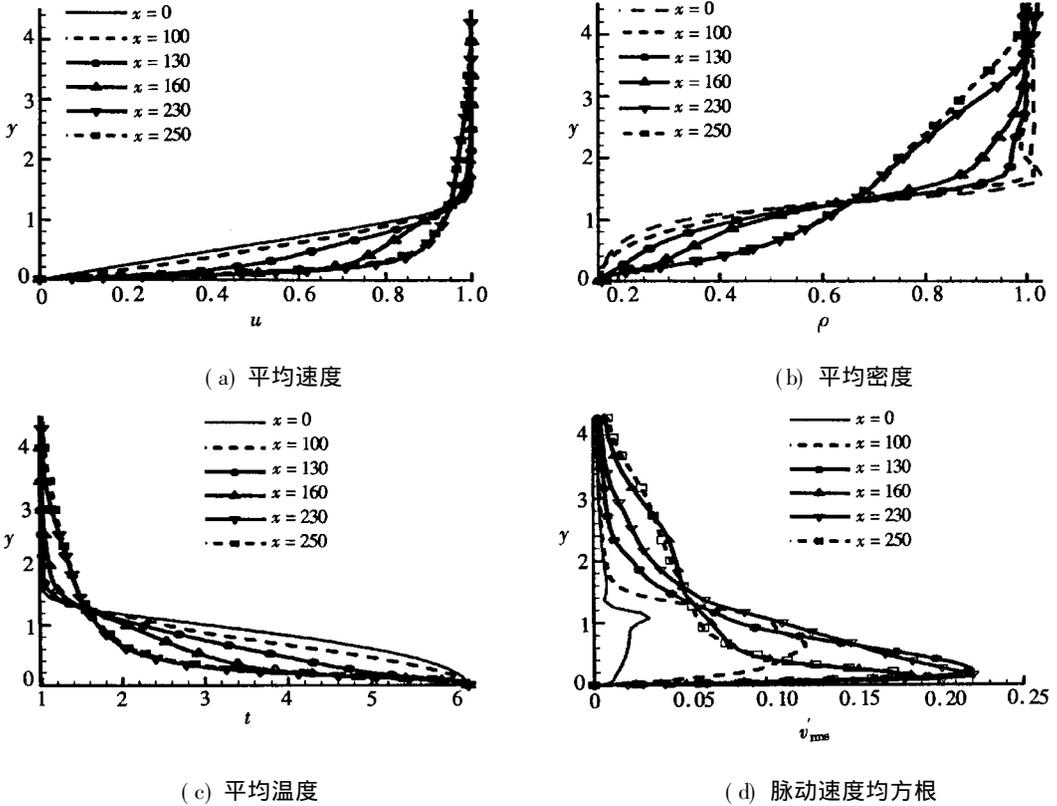


图5 从层流到湍流平均剖面的变化过程

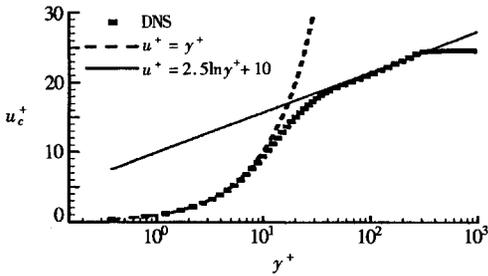


图6 $x = 230$ 处平均速度壁面律

图6为 $x = 230$ 处平均速度经过 Van Diredst 变换后沿壁面法向的分布。虚线表示线性律区域，实线表示对数率区域。图中线性律适用范围为 $y^+ \leq 10$ ，对数率 $u^+ = 2.5 \ln y^+ + 10.0$ 适用范围为 $30 < y^+ < 300$ 。进一步说明该处流体已经进入湍流状态。

平均流剖面形状的变化直接影响剖面的稳定性，图7为转捩过程中剖面的稳定性分析图。考

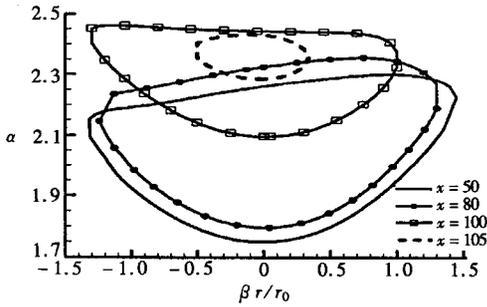
虑尖锥展向曲率的存在，随着流向位置的增大，展向弧长变大，这样，需要把周向波数变换到相同尺度，我们选取 $\beta \cdot r / r_0$ (其中 $r = x \sin \alpha$, r_0 为 r 在入口处的值) 来比较。我们发现，由于入口引入非对称的有限幅值扰动，因而下游的周向平均流速不为零。这样的剖面对稳定性分析有影响，使得中性曲线关于 $\beta = 0$ 轴不对称。可以看出，在转捩过程中，第二模态波的中性曲线所包的不稳定区迅速减小，到 $x = 110$ 处已经消失。反之，第一模态波的不稳定区在 $x < 80$ 时变化缓慢。而从 $x > 80$ 开始，不稳定区域迅速增大，并且在 $x = 100$ 处不稳定区域最大。这与图4中该处脉动动能变化率最大相符。而在 $x = 110$ 以后，不稳定区域开始减小。在转捩阶段不稳定区域的扩大使得非线性作用能激发更多频率的不稳定波并快速增长起来，从而使得 breakdown 过程快速完成。进入湍流阶段以后，不稳定区域将消失，表明具有整体性质的不稳定波已不存在，脉动的激发已是另一种机制。周恒等人^[7]已对其机制提出过说明。

以上说明, 导致可压缩尖锥边界层转捩的 breakdown 过程的机理和平板边界层的一样, 是平均流动剖面的稳定性发生了显著的变化。第一模态不稳定区的迅速增大是导致转捩的关键, 第一模态不稳定波在可压缩流的转捩过程中起主导作用。

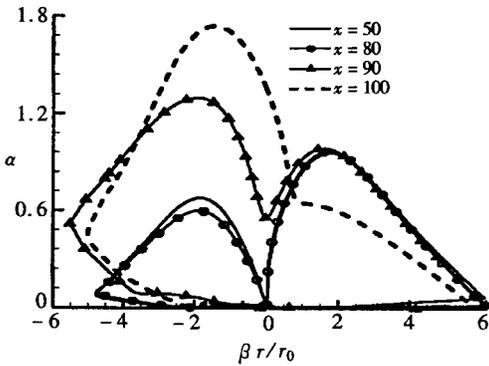
下面介绍情况 II, 有关参数见表 2, 其中不含第一模态不稳定波, 扰动 I 为第二模态最不稳定波。

表 2 情况 II 引入的 3 组 T-S 波的特征值

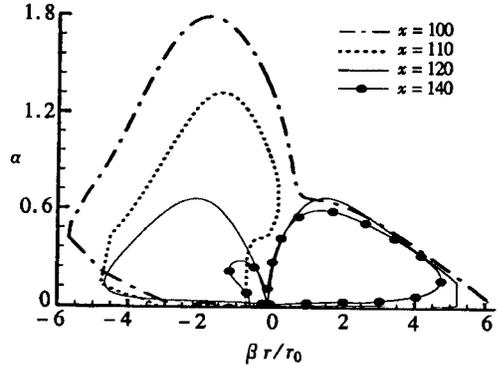
	ω	α_r	$-\alpha_i$	β
扰动 I	1.897 236	2.063 214	0.044 915	0.0
扰动 II	1.422 927	1.348 213	-0.009 891	0.4
扰动 III	1.422 927	1.335 873	-0.010 134	0.6



(a) 第一模态的中性曲线



(b) 第一模态的中性曲线



(c) 第二模态的中性曲线

图 7 不同流向坐标的平均流剖面稳定性比较

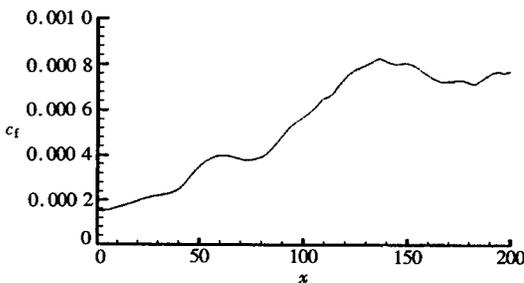


图 8 摩擦因数沿流向的变化

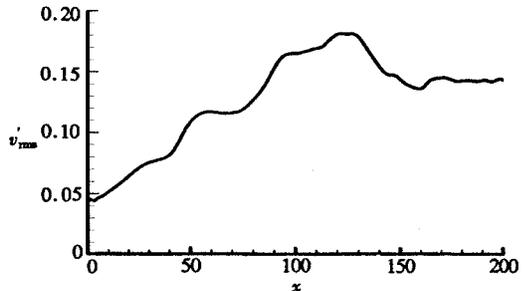


图 9 脉动速度均方根沿流向变化

图 8 与图 9 分别是该组扰动下的壁面摩擦因数与脉动速度均方根沿流向的分布图。可以看出, 与图 2 和图 3 最大的不同是从 $x = 60$ 处开始, 摩擦因数与脉动速度均方根的值出现一定的下降, 其原因是情况 II 引入的主要不稳定波是第二模态。从图 7 可以看出, 在转捩过程中, 第二模态不稳定区域在不断减小, 而第一模态不稳定区域不断增大。 $x = 60$ 处的局部下降应是起主导作用的波由第二模态向第一模态过渡的结果。

图 10 给出情况 II 下 $x = 190$ 处的平均速度壁面律, 该处流动已经是充分发展的湍流状态。我们发现该图与图 6 非常相似, 说明虽然引入的初始扰动不同, 转捩的起止点不同, 但是流体一旦进入充分发展湍流状态, 平均速度剖面将趋于相同。

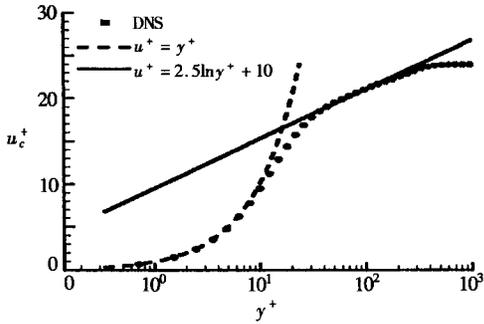
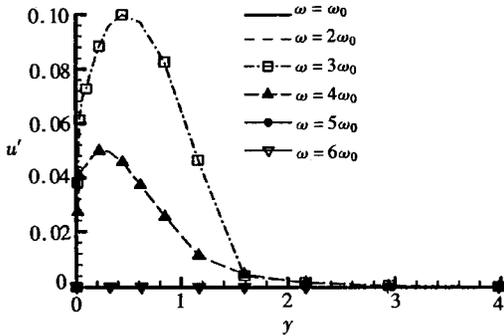


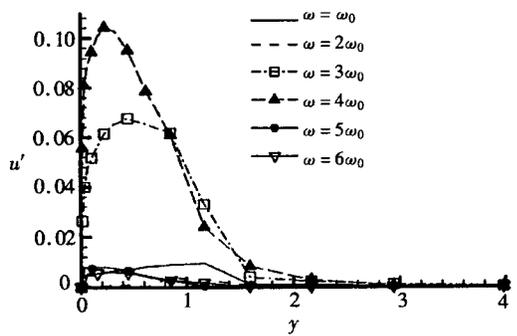
图 10 情况 II 下 $x = 190$ 处平均速度壁面律

我们用扰动 (m, n) 表示扰动频率 $\omega = m\omega_0$, 周向波数 $\beta = n\beta_0$ 的扰动, 其中 ω_0 与 β_0 分别表示基本频率和基本波数。图 11 给出了各频率扰动流向速度 u' 的法向分布随流向的变化。计算域入口 $x = 0$ 处, 引入的 3 个扰动分别为 $(4, 0)$ 、 $(3, 2)$ 与 $(3, 3)$, $(4, 0)$ 是第二模态的不稳定波, 其它两个扰动是稳定的。此处, 频率为 $4\omega_0$ 的扰动幅值为 0.05, 两个频率为 $3\omega_0$ 的扰动幅值和约为 0.1; 到 $x = 22$ 处, 两个频率为 $3\omega_0$ 的扰动幅值和减小为 0.065, 频率为 $4\omega_0$ 的扰动增加到 0.115, 其它频率下的扰动也开始有所增长; 到 $x = 66$ 处, 频率为 ω_0 的扰动增长起来, 达到 0.075, 它是第一模态扰动, 而第二模态扰动(频率为 $4\omega_0$) 已经减小到 0.035 以下。此处起主导作用的扰动由第二模态转变为第一模态, 这也是图 8 与图 9 中曲线出现局部下降的原因。其后第一模态扰动继续增加; 到 $x = 110$ 处, 各个频率下的扰动幅值相对差别趋小, 并且沿 y 方向的分布区域增大。这正是平均速度剖面得以修正至其边界层厚度远大于层流剖面的湍流剖面的原因。

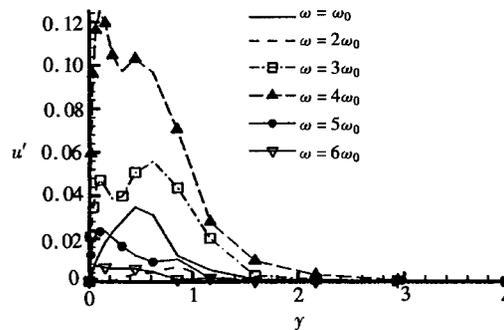
进一步对比两种计算情况下, 各个谐波幅值沿流向的分布图, 如图 12 所示。可以看出, 不管初始扰动是以哪种模态为主, 第一模态波总在转捩过程中起主要作用。



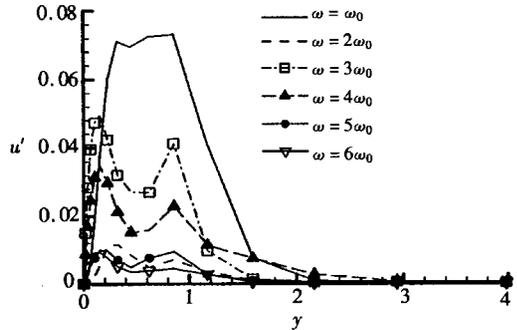
(a) $x = 0$



(b) $x = 22$



(c) $x = 44$



(d) $x = 66$

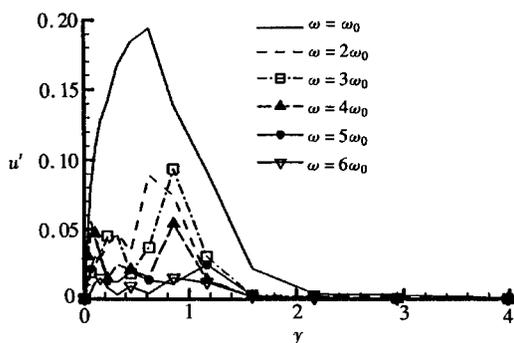
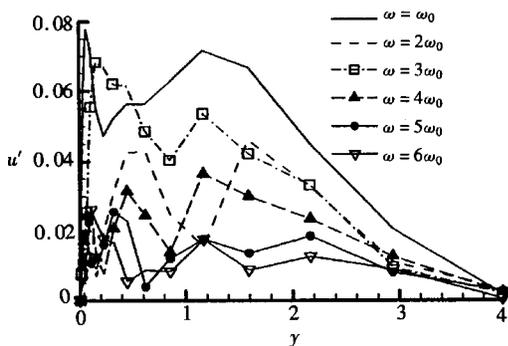
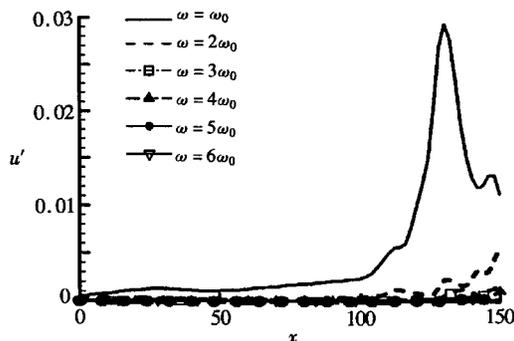
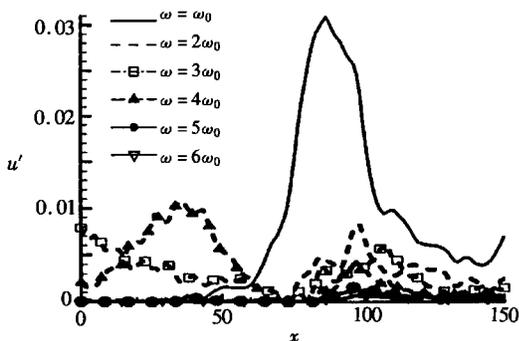
(e) $x = 88$ (f) $x = 110$

图 11 不同位置各频率下扰动沿法向的分布



(a) 情况 I



(b) 情况 II

图 12 各谐波幅值沿流向的分布

3 结 论

虽然与平板边界层相比, 尖锥边界层存在着沿流向变化的展向曲率, 但对 Mach 数为 6 的高超音速可压缩零攻角尖锥边界层转捩的数值研究得出了相似的结论, 转捩本质上并不仅仅是由于非线性作用而产生高次谐波并增长的过程, 平均流剖面稳定性的迅速变化在转捩中起了关键性作用。这种变化决定了哪些频率的波得以快速增长, 哪些将衰减下去。与超音速可压缩平板边界层的转捩过程类似, 平均流剖面稳定性的迅速变化会使第一模态波快速增长, 而第二模态波将逐渐衰减, 因此第一模态不稳定波在转捩过程中起主导作用, 而不管引入的初始扰动是哪种模态的波。并且, 不管初始扰动形式怎样, 一旦进入湍流, 流场的平均速度剖面将趋于相同。

[参 考 文 献]

- [1] 董明, 罗纪生, 曹伟. 超音速尖锥边界层中扰动演化特征的数值研究[J]. 应用数学和力学, 2006, 27(6): 631-636.
- [2] 王新军, 罗纪生, 周恒. 平面槽道流中层流-湍流转捩的“breakdown”过程的内在机理[J]. 中国科学, G 辑, 2005, 35(1): 71-78.
- [3] 黄章峰, 曹伟, 周恒. 超音速平板边界层转捩中层流突变为湍流的机理——时间模式[J]. 中国科学, G 辑, 2005, 35(5): 537-547.
- [4] 曹伟, 黄章峰, 周恒. 超音速平板边界层转捩中层流突变为湍流的机理[J]. 应用数学和力学,

- 2006, **27**(4): 379-386.
- [5] 童秉纲, 孔祥言, 邓国华. 气体动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989, 140-142.
- [6] 赵耕夫. 超音速、高超音速三维边界层的层流控制[J]. 力学学报, 2001, **33**(4): 519-524.
- [7] 张东明, 罗纪生, 周恒. 湍流边界层外区扰动激发近壁区相干结构的一种机制[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(4): 379-385.

Mechanism of Transition in a Hypersonic Sharp Cone Boundary Layer With Zero Angle of Attack

DONG Ming, LUO Ji-sheng

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: Firstly, the steady laminar flow field of a hypersonic sharp cone boundary layer with zero angle of attack was computed. Then two groups of finite amplitude T-S wave disturbances were introduced at the entrance of the computational field, and the spatial mode transition process was studied by direct numerical simulation (DNS). The mechanism of the transition process was analyzed. It was found that the change of the stability characteristics of the mean flow profile was the key issue. Moreover, the characteristics of evolution for the disturbances of different modes in the hypersonic sharp cone boundary layer was discussed.

Key words: zero angle of attack; sharp cone boundary layer; transition; stability