

三阶非线性 KdV 方程的交替 分段显-隐差分格式*

曲富丽, 王文洽

(山东大学 数学与系统科学学院, 济南 250100)

(张鸿庆推荐)

摘要: 对三阶非线性 KdV 方程给出了一组非对称的差分公式, 用这些差分公式与显、隐差分公式组合, 构造了一类具有本性并行的交替分段显-隐格式. 证明了格式的线性绝对稳定性. 对 1 个孤立波解、2 个孤立波解的情况分别进行了数值试验. 数值结果显示, 交替分段显-隐格式稳定, 有较高的精确度.

关键词: Korteweg-de Vries 方程; 本性并行; 交替分段显-隐差分格式; 线性绝对稳定

中图分类号: O241 **文献标识码:** A

引 言

Korteweg-de Vries 方程(简称 KdV 方程)最初出现于浅水波的研究. 1895 年 Korteweg 和 de Vries 在讨论无粘滞不可压缩液体表面波动力学时引入此方程. 20 世纪 60 年代, 在物理学与工程学科的许多问题中, 相继都引出 KdV 方程, 如等离子体中的磁流体波、离子声波、弹性棒中的纵色散波都引出 KdV 方程. 在物理学众多的非线性方程中, KdV 方程是典型的相对简单和经典的非线性方程, 而且一大类近似双曲型方程都证明可化为 KdV 方程. 所以在实用中 KdV 方程是一个很重要的方程, 因此人们对它进行了较多的研究^[1].

Zabusky 和 Kruskal 最早用有限差分方法求解 KdV 方程, 发现了孤立子的存在及相互碰撞不改变形状只引起相差的结论, 开创了孤立子理论的研究^[2]. Osborne 根据逆散射变换(IST)给出了 KdV 的直接散射变换(DST)方法, 这是对 KdV 方程进行数值分析的一个有效工具^[3]. 彭点云提出了一种应用于一类非线性进化方程的多点格式方法. 它的精度较高, 适合于求解长时间大空间尺度的孤立子问题^[4]. Djidjeli, Price, Feng, Mitsui 等人对求解 KdV 方程的数值解法也作了大量的工作^[5-6].

近 20 年来, 一类具有本质并行的差分方法引起了计算工作者的广泛关注, 并针对扩散和对流扩散方程进行了深入研究^[7-9]. 朱少红等人把这类方法推广到色散方程, 取得了很好的效

* 收稿日期: 2006-02-14; 修订日期: 2007-04-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671113); 山东省自然科学基金资助项目(Y2003A04)

作者简介: 曲富丽(1981—), 女, 山东人, 硕士(E-mail: qufuli23@163.com);

王文洽(1950—), 教授, 博士生导师(联系人, Fax: + 86-531-88564652; E-mail: wwqia@math.sdu.edu.cn).

果^[10-11]. 本文把这类方法用于三阶非线性 KdV 方程, 提出了一组新的关于 KdV 方程的非对称差分公式, 并用这些非对称公式和经典显格式、隐格式组合, 设计了一种并行交替分段显-隐差分格式, 证明了算法线性绝对稳定, 并对 1 个孤立波解、2 个孤立波解的情况分别进行了数值试验. 试验结果表明, 本文给出的方法稳定性好, 有很高的精度.

我们考虑的是 KdV 方程的一般形式:

$$u_t + \beta u u_x + \alpha u_{xxx} = 0, \quad L_1 < x < L_2; 0 < t < T. \quad (1)$$

初始条件是

$$u(x, 0) = f(x), \quad L_1 < x < L_2, \quad (2)$$

对于孤立波问题, 边界条件取为:

$$u(x, t) = 0, \quad 0 < t < T; x \leq L_1; x \geq L_2, \quad (3)$$

这里 L_1 和 L_2 是适当的数.

1 交替分段差分方法

设 $x_0 = L_1$, 令 $h = (L_2 - L_1)/m$, 记 $x_i = x_0 + ih (i = 0, 1, 2, \dots, m)$, 我们用平行线 $x = x_i$ 和 $t = t^n = n\tau (n = 1, 2, \dots)$ 对求解区域进行网格剖分, 这里 h 和 τ 分别表示空间和时间步长, m 是正整数. 我们用 $u_i^n = u(x_i, t^n)$ 表示方程(1)的精确解 $u(x, t)$ 在网格点 $(x_i, t^n) = (i, n)$ 处的值, 用 v_i^n 表示数值解. 为了构造交替分段显-隐差分格式, 我们首先给出逼近方程(1)的 4 个非对称差分格式(4)至差分格式(7)、经典显格式(8)和经典隐格式(9).

$$v_i^{n+1} + (r_i/2 - r)v_{i+1}^{n+1} + rv_{i+2}^{n+1} =$$

$$rv_{i-2}^n + (r_i - 2r)v_{i-1}^n + v_i^n + (-r_i/2 + r)v_{i+1}^n, \quad (4)$$

$$-rv_{i-2}^{n+1} + (-r_i/2 + r)v_{i-1}^{n+1} + v_i^{n+1} =$$

$$(r_i/2 - r)v_{i-1}^n + v_i^n + (-r_i + 2r)v_{i+1}^n - rv_{i+2}^n, \quad (5)$$

$$(-r_i/2 + r)v_{i-1}^{n+1} + v_i^{n+1} + (r_i - 2r)v_{i+1}^{n+1} + rv_{i+2}^{n+1} =$$

$$rv_{i-2}^n + (r_i/2 - r)v_{i-1}^n + v_i^n, \quad (6)$$

$$-rv_{i-2}^{n+1} + (-r_i + 2r)v_{i-1}^{n+1} + v_i^{n+1} + (r_i/2 - r)v_{i+1}^{n+1} =$$

$$v_i^n + (-r_i/2 + r)v_{i+1}^n - rv_{i+2}^n, \quad (7)$$

$$v_i^{n+1} = rv_{i-2}^n + (r_i - 2r)v_{i-1}^n + v_i^n + (-r_i + 2r)v_{i+1}^n - rv_{i+2}^n, \quad (8)$$

$$-rv_{i-2}^{n+1} + (-r_i + 2r)v_{i-1}^{n+1} + v_i^{n+1} + (r_i - 2r)v_{i+1}^{n+1} + rv_{i+2}^{n+1} = v_i^n, \quad (9)$$

式中, $r = \frac{\alpha\tau}{2h^3}$, $r_i = \beta a_i \frac{\tau}{2h}$, $a_i = \frac{1}{4}(v_{i-1}^n + 2v_i^n + v_{i+1}^n)$.

现在我们讨论 KdV 方程的交替分段显-隐差分格式. 我们分内点数 $M = m - 1 = K(l + l')$ $l \geq 1, l' \geq 5$, 并且在每一时间层上把 M 个内点分成 K 个隐式段和 K 个显式段. 象在图 1 中所示的那样, 在奇数时间层上, 显式段 l 个点, 隐式段 l' 个点; 在偶数时间层上, 显式段 $l - 4$ 个点, 隐式段 $l + 4$ 个点. 在每个时间层上, 显式段上的 v_i^{n+1} 由显格式(8)直接计算, 为了计算隐式段上 v_i^{n+1} 的值, 对某个 $j, i = j + 1, j + 2, \dots, j + k$, 其中 $k = l'$ 或 $k = l + 4$. 我们给出如下的差分格式, 在隐式段的内左边界 x_{j+1}, x_{j+2} 和内右边界 x_{j+k-1}, x_{j+k} 分别对应使用(4)式、(6)式、(7)式、(5)式, 其余的点使用隐格式(9), 则隐式段上的差分方程组的矩阵形式可写成

$$(I + rP_k + R_{jk}S_k)U_j^{n+1} = U_j^n + b_{jk},$$

这里

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{jk} &= (rv_{j-1}^n + (r_{j+1} - 2r)v_j^n - (r_{j+1}/2 - r)v_{j+2}^n + \\
 &\quad (r_{j+2}/2 - r)v_{j+1}^n, 0, \dots, 0, (r - r_{j+k-1}/2)v_{j+k}^n - \\
 &\quad rv_{j+k+1}^n, (r_{j+k}/2 - r)v_{j+k-1}^n - (r_{j+k} - 2r)v_{j+k+1}^n)^T, \\
 \mathbf{U}_j^n &= (v_{j+1}^n, v_{j+2}^n, \dots, v_{j+k}^n)^T, \mathbf{R}_{jk} = \text{diag}(r_{j+1}, r_{j+2}, \dots, r_{j+k}), \\
 \mathbf{P}_k &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -2 & 1 & & & \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ & & & -1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}, \\
 \mathbf{S}_k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}.
 \end{aligned}$$

因为隐式段和显式段相互独立, 所以我们能同时求解不同段上的 v_i^{n+1} , 从而实现了并行计算.

一般情况下, 我们按照下面规则进行计算. 在奇数时间层上, 按照“显式段- 隐式段- ...- 显式段- 隐式段”进行安排. 在偶数时间层上, 按照“隐式段- 显式段- ...- 隐式段- 显式段”进行安排. 节点的分段模式如图 1 所示. 我们用 \square 代表非对称格式(4)至非对称格式(7), \circ 代表经典隐格式, \bullet 代表经典显格式.

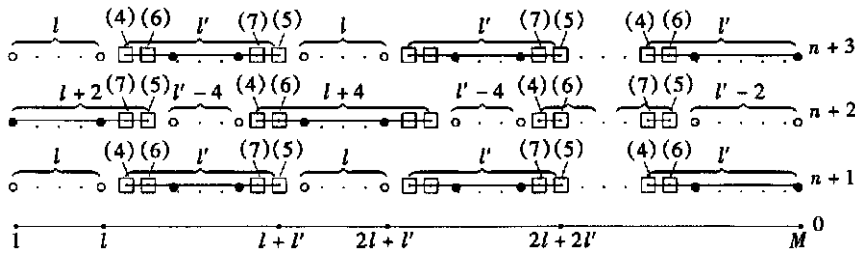


图 1 交替分段显-隐格式示意图

从图 1 中容易看出, 在上下两个相邻的时间层上, 格式(4)和格式(7)、格式(5)和格式(6)、格式(8)和格式(9)是交替使用的. 在同一时间层上, 格式(4)和格式(5)、格式(6)和格式(7)是对称使用的. 从初始层 $n = 0$ 起, 并且交替使用 t^{n+1} 层上和 t^{n+2} 层上的格式, 于是得到交替分段显-隐差分方法, 其矩阵形式是

$$(I + G_1^{(n)}) U^{n+1} = (I - G_2^{(n)}) U^n, \quad n = 0, 2, 4, \dots, \tag{10a}$$

$$(I + G_2^{(n+1)}) U^{n+2} = (I - G_1^{(n+1)}) U^{n+1}, \quad n = 0, 2, 4, \dots, \tag{10b}$$

这里, $U^n = (v_1^n, v_2^n, \dots, v_M^n)^T$ 是 M 维向量. 矩阵 $G_1^{(n)}$ 和 $G_2^{(n)}$ 有下面的形式:

$$G_1^{(n)} = rG_1^{(1)} + G_1^{(2)}, \quad G_2^{(n)} = rG_2^{(1)} + G_2^{(2)},$$

$$G_1^{(1)} = \text{diag}(Q_l, P_l, \dots, Q_l, P_l, Q_l, P_R),$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_1^{(2)} &= \text{diag}(\mathbf{Q}_l, \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{S}_l, \dots, \mathbf{Q}_l, \mathbf{R}^{(K)} \mathbf{S}_l), \\
 \mathbf{G}_2^{(1)} &= \text{diag}(\mathbf{P}_L, \mathbf{Q}_{l-4}, \mathbf{P}_{l+4}, \mathbf{Q}_{l-4}, \dots, \mathbf{P}_{l+4}, \mathbf{Q}_{l-2}), \\
 \mathbf{G}_2^{(2)} &= \text{diag}(\mathbf{R}^{(0)} \mathbf{S}_{l+2}, \mathbf{Q}_{l-4}, \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{S}_{l+4}, \mathbf{Q}_{l-4}, \dots, \\
 &\quad \mathbf{R}^{(K-2)} \mathbf{S}_{l+4}, \mathbf{Q}_{l-4}, \mathbf{R}^{(K-1)} \mathbf{S}_{l+4}, \mathbf{Q}_{l-2}), \\
 \mathbf{P}_L &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & & & \\ 2 & 0 & -2 & 1 & & \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ & & & -1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(l+2) \times (l+2)}, \\
 \mathbf{P}_R &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & -2 & 1 & & \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ & & & -1 & 2 & 0 & -2 \\ & & & & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{l' \times l'}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_k' = \text{diag}(0, 0, \dots, 0),$$

$$\mathbf{R}^{(j)} = \text{diag}(r_{j(l+(j-1)l+1)}, r_{j(l+(j-1)l+2)}, \dots, r_{j(l+jl)}), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

$$\mathbf{R}_0 = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_{l+2}),$$

$$\mathbf{R}^{(j)} = \text{diag}(r_{j(l+l)-1}, r_{j(l+l)}, \dots, r_{(j+1)l+jl+2}), \quad j = 1, 2, \dots, k-1,$$

这里 \mathbf{Q}_k' 是 k' 阶 0 对角块 ($k' = l, l-4$ 或 $l-2$), $\mathbf{R}^{(j)}$ 、 \mathbf{R}_0 、 $\mathbf{R}^{(j)}$ 分别是 l' 阶、 $l+2$ 阶或 $l+4$ 阶对角块. 矩阵块 \mathbf{P}_L 和 \mathbf{P}_R 是由 \mathbf{P}_k 稍加修改而成, 分别代表靠近左、右边界隐式段上的隐式块, \mathbf{P}_k ($k = l', l+2, l+4$) 代表内部隐式段上的隐式块 (参阅图 1).

式 (10b) 中的 $\mathbf{G}_i^{(n+1)}$ 与 $\mathbf{G}_i^{(n)}$ ($i = 1, 2$) 有类似的形式.

2 线性稳定性分析

在分析交替分段显-隐格式 (10) 的稳定性时, 我们用到下面的引理.

引理 2.1 (Kellogg^[12]) 设 $\theta > 0$, 矩阵 \mathbf{G} 是非负定的, 则 $(\theta\mathbf{I} + \mathbf{G})^{-1}$ 存在, 并且有

$$\|(\theta\mathbf{I} + \mathbf{G})^{-1}\|_2 \leq \theta^{-1}, \quad \|(\theta\mathbf{I} - \mathbf{G})(\theta\mathbf{I} + \mathbf{G})^{-1}\|_2 \leq 1.$$

引理 2.2 若 \mathbf{G} 是 m 阶反对称矩阵, \mathbf{v} 是 m 阶向量, 则 $(\mathbf{G}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$.

为了对交替分段显-隐格式 (10) 进行线性稳定性分析, 我们设 $a_i^n = a$ (常数), 记 $r_i = \beta a_i^n (\tau/(2h)) = r$, 则在式 (10) 中, $\mathbf{G}_i^{(n)} = \mathbf{G}_i^{(n+1)} = \mathbf{G}_i$ ($i = 1, 2$), 并且矩阵 \mathbf{G}_1 和 \mathbf{G}_2 可以写成下面的形式:

$$\mathbf{G}_1 = r\mathbf{G}_1^{(1)} + r\mathbf{G}_1^{(2)}, \quad \mathbf{G}_2 = r\mathbf{G}_2^{(1)} + r\mathbf{G}_2^{(2)}, \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{G}_2^{(2)} = \text{diag}(\mathbf{S}_{l+2}, \mathbf{Q}_{l-4}, \mathbf{S}_{l+4}, \mathbf{Q}_{l-4}, \dots, \mathbf{S}_{l+4}, \mathbf{Q}_{l-4}, \mathbf{S}_{l+4}, \mathbf{Q}_{l-2}),$$

$$\mathbf{G}_1^{(2)} = \text{diag}(\mathbf{Q}_l, \mathbf{S}_l, \dots, \mathbf{Q}_l, \mathbf{S}_l),$$

式中 S_{l+2} 、 S_{l+4} 、 S_l 、 Q_l 、 Q_{l-4} 、 Q_{l-2} 定义同前。

由于矩阵块 P_k 、 S_k 、 Q_k 都是反对称的, 容易验证下面的结论成立。

引理 2.3 对任意的 r 和 r , 由式(11) 定义的矩阵 G_1 和 G_2 是反对称矩阵。

于是我们可以得到下面的定理:

定理 2.1 设 n 为偶数, 则对任意实数 r 和 r , 由式(10) 定义的交替分段显-隐格式线性绝对稳定。

证明 为了分析格式(10) 的线性稳定性, 我们把式(10) 改写成下面的形式:

$$U^n = GU^{n-2},$$

式中 G 为增长矩阵, $G = (I + G_2)^{-1}(I - G_1)(I + G_1)^{-1}(I - G_2)$ 。记 G 的相似矩阵

$$G = (I + G_2)G(I + G_2)^{-1} = (I - G_1)(I + G_1)^{-1}(I - G_2)(I + G_2)^{-1},$$

由引理 2.3 和引理 2.2 可知, 矩阵 G_1 和 G_2 是反对称实矩阵, 并且都是非负定的。再由引理 2.1 可以推出, 对任意实数 r 和 r , 有

$$\|(I - G_i)(I + G_i)^{-1}\|_2 \leq 1, \quad i = 1, 2.$$

记 $\rho(G)$ 为矩阵 G 的谱半径, 于是 $\rho(G) = \rho(G) \leq \|G\|_2 \leq 1$ 。由 von Neumann 条件, 定理得证。

3 数值试验

为了验证并行交替分段显-隐格式的精度和稳定性, 我们对(1) 式至(3) 式选取下面两个模型问题进行数值试验:

例 1 考虑 KdV 方程的标准形式, 即取 $\beta = 6$ 、 $\varepsilon = 1$, 并且取方程(1) 的初始条件为^[13]:

$$u(x, 0) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c}(x + x_0) \right], \quad (12)$$

这个问题有一个孤立波解

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c}(x - ct + x_0) \right], \quad (13)$$

其中 x_0 为孤立波的初始位置, c 与孤立波的振幅有关, 正割函数里的 \sqrt{c} 表明波的传播速度依赖孤立波的振幅(孤立波的显著特性)。在这里, 我们取 $c = 0.5$ 、 $x_0 = 0$ 。

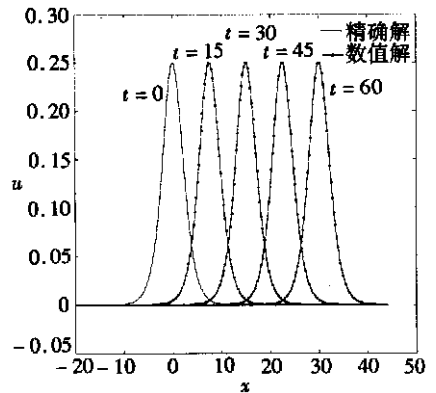


图 2 例 1 的精确解与数值解的比较

表 1 数值解误差 L_2 模及数值解的收敛速度 ($M = 720$, $l = 10$, $l' = 14$)

t	$\lambda = 1.14$		$\lambda = 0.57$	
	e_h	e_h/h^2	e_h	e_h/h^2
10	4.0453×10^{-4}	0.0513	2.8162×10^{-4}	0.03574
20	9.5652×10^{-4}	0.1214	6.3475×10^{-4}	0.08055
30	1.6781×10^{-3}	0.2129	1.0769×10^{-3}	0.1367
40	2.5998×10^{-3}	0.3299	1.6473×10^{-3}	0.2091

首先估计交替分段显-隐格式的收敛速度, 选取网比 $\lambda = \tau/h^3 = 0.57$ 和 1.14 , $-20 \leq x \leq 44$, 用公式(10) 分别计算了 $t = 10$ 、 $t = 20$ 、 $t = 30$ 和 $t = 40$ 时误差的 L_2 模

$$e_h = \|U - u\|_{L_2} = \left(\sum_{i=1}^m |v_i^n - u_i^n|^2 h \right)^{1/2}$$

和收敛阶 e_h/h^2 , 计算结果如表 1 所示. 从表 1 的计算结果可以看出, 其收敛阶大约是 $O(h^2)$.

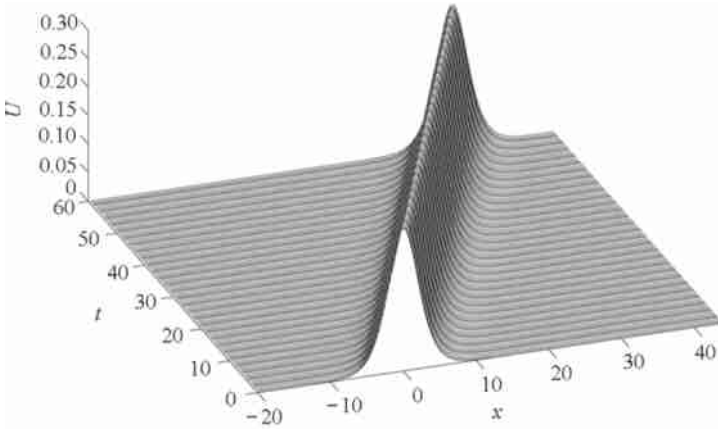


图 3 例 1 的孤立波数值解 ($t: 0 \rightarrow 60$)

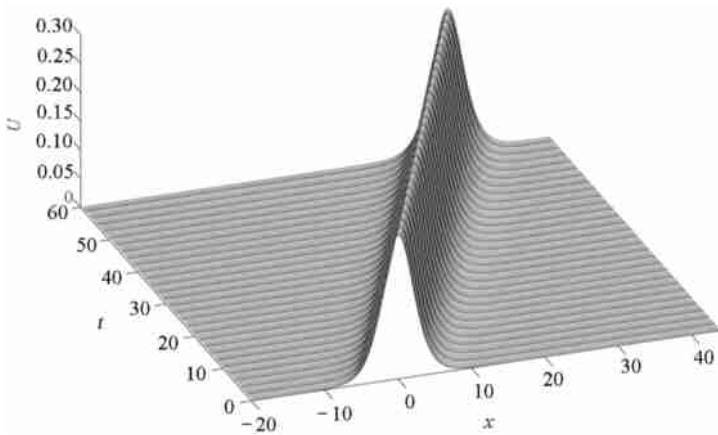


图 4 例 1 的孤立波精确解 ($t: 0 \rightarrow 60$)

其次, 我们对用交替分段显-隐差格式得到的数值解与精确解进行了比较, 计算结果见图 2. 其中我们选取 $\lambda = 0.57$, 图 2 中最左面的图形表示 $t = 0$ 时问题 1 的精确解, 然后依次是 $t = 15, t = 30, t = 45, t = 60$ 的精确解与数值解的图形对比. 由图形可以看出, 数值解与精确解吻合的很好. 无论从表 1 还是图 2 都可以看出, 本文给出的方法有很好的精确度.

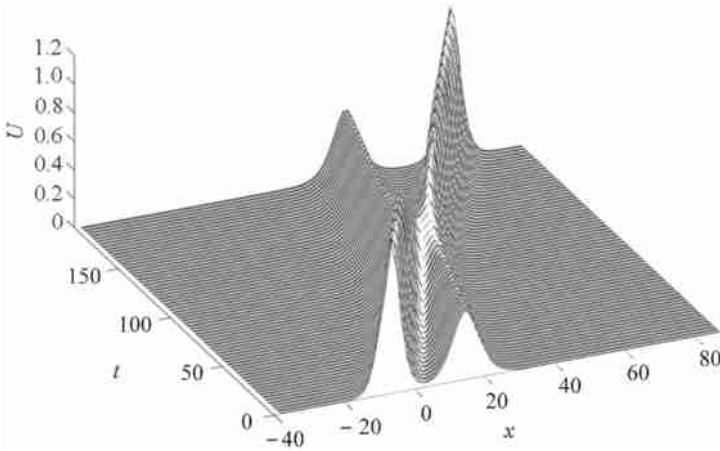
在图 3 中我们还给出了问题 1 的孤立波解从时间 $t = 0$ 到 $t = 60$ 的数值模拟结果, 图 4 则是问题 1 的孤立波解从时间 $t = 0$ 到 $t = 60$ 的精确解的波形. 对照两个图形, 我们可以看出, 数值结果稳定可靠, 保持了与精确解几乎完全一致的波形.

例 2 2 个孤立波解的情况

考虑下面形式的三阶 KdV 方程^[14]:

$$u_t + uu_x + \mu u_{xxx} = 0, \quad -L_1 < x < L_2; 0 < t < T. \quad (14)$$

选取初始条件

图5 例2的2个孤立波数值解 ($t: 0 \rightarrow 192$)

$$u(x, t = 0) = \sum_{i=1}^2 A_i \operatorname{sech}^2(kx - \omega t - x_i), \quad (15)$$

这里 $A_i = 12k_i^2$, $\omega_i = 4k_i^3$. 我们对 $\mu = 1, k_1 = 0.3, k_2 = 0.2, x_1 = -2, x_2 = 3, -40 \leq x \leq 88$, 取 $M = 512, l = 32, \tau = 0.01$, t 从 $t = 0$ 到 $t = 192$ 进行了数值模拟, 模拟结果如图5所示. 由式(15)知, 具有较大振幅 A_1 的孤立波初始位置在 x_1 , 而另一个具有较小振幅 A_2 的孤立波初始位置则在 x_2 . 我们已经知道, 具有较大振幅的孤立波速度要比具有较小振幅的孤立波的速度快, 所以随着时间的推移, 速度快的孤立波会赶上速度慢的孤立波, 然后两波逐渐碰撞融合在一起, 融合过程直到速度快的孤立波超过速度慢的孤立波结束, 之后两波完全分离, 分离后的两个孤立波仍然保持了各自的波形和波速进行传播.

4 结束语

从图1的分段模式和矩阵 $G_i^{(n)}$ 的表达式可以看出, 交替分段显-隐差分格式把一个 M 阶的离散问题化成一些独立的小问题进行求解, 其并行特性是显而易见的. 格式(10)的分段模式可以根据问题的实际情况任意选取, 只要注意到格式(4)和格式(7), 格式(5)和格式(6), 格式(8)和格式(9)在上下两层是交替使用的原则即可. 交替分段显-隐差分格式的计算也很简单, 每一时间层上的计算只是在每个隐式段上解一个低阶的方程组. 分析和试验表明, 交替分段显-隐差分格式稳定, 有很好的精度. 因此本文提供的格式是求解KdV方程的一个有效的本质并行算法. 另外, 本文提供的算法还可以推广到KdV-Burgers方程, 关于这方面的结果将另文发表.

[参 考 文 献]

- [1] 杨伯君, 赵玉芳. 高等数学物理方法[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2003.
- [2] Zabusky N J, Kruskal M D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states[J]. Physical Rev Lett, 1965, 15(6): 240-243.
- [3] Osborne A R. Nonlinear fourier analysis for the infinite-interval Korteweg-de Vries equation I: An algorithm for direct scattering transform[J]. J Comput Phys, 1991, 94(2): 284-313.
- [4] 彭点云. KdV方程的多点格式方法[J]. 数值计算与计算机应用, 1998, 19(4): 244-251.
- [5] Djidjeli K, Price W G, Twizell E H, et al. Numerical methods for the solution of the third- and fifth-

- order dispersive Korteweg-de Vries equations[J]. J Comput Appl Math, 1995, **58**(3): 307-336.
- [6] FENG Bao-feng, Taketomo Mitsui. A finite difference method for the Korteweg-de Vries and the Kadomtsev-Petviashvili equations[J]. J Comput Appl Math, 1998, **90**(1): 95-116.
- [7] Evans D J, Abdullah A R B. Group explicit methods for parabolic equations[J]. Intern J Comput Math, 1983, **14**(1): 73-105.
- [8] ZHANG Bao-lin, LI Wen-zhi. On alternating segment Crank-Nicolson scheme[J]. Parallel Computing, 1994, **20**(6): 897-902.
- [9] YUAN Guang-wei, SHEN Long-jun, ZHOU Yu-lin. Unconditional stability of alternating difference schemes with intrinsic parallelism for two-dimensional parabolic systems[J]. Inc Numer Methods Partial Differential Eq, 1999, **15**(6): 25-636.
- [10] ZHU Shao-hong, Zhao J. The alternating segment explicit-implicit method for the dispersive equation [J]. Applied Mathematics Letters, 2001, **14**(6): 657-662.
- [11] 朱少红, 袁光伟. 色散方程的一类本性并行的差分格式[J]. 应用数学学报, 2003, **26**(3): 495-503.
- [12] Kellogg R B. An alternating direction method for operator equations[J]. J Soc Indust Appl Math, 1964, **12**(4): 848-854.
- [13] LI Ping-wah. On the numerical study of the KdV equation by the semi-implicit and leap-frog method [J]. Computer Physics Communications, 1995, **88**(2/3): 121-127.
- [14] Djidjeli K, Price W G, Temarel P, et al. A linearized implicit pseudo-spectral method for certain non-linear water wave equations[J]. Commun Numer Meth Engng, 1998, **14**(10): 977-993.

Alternating Segment Explicit-Implicit Scheme for Nonlinear Third-Order KdV Equation

QU Fut-li, WANG Wen-qia

(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University,
Jinan 250100, P. R. China)

Abstract: A group of asymmetric difference schemes to approach the Korteweg-de Vries (KdV) equation was given here. Using the schemes and the full explicit difference scheme and the full implicit difference scheme, the alternating difference scheme for solving the KdV equation was constructed. The scheme is linear unconditionally stable by analysis of linearization procedure, and is used directly on the parallel computer. The numerical experiments show that the method has high accuracy.

Key words: KdV equation; intrinsic parallelism; alternating segment explicit-implicit difference scheme; linear unconditionally stable