文章编号: 1000-0887(2007) 07-0789-09

由一类非线性常微分方程的抛物线解所确定的扭波*

李继彬[1,2], 黎 明[3], 纳 静[4]

(1. 浙江师范大学 数学系, 浙江 金华 321004;
2. 昆明理工大学 理学院, 昆明 650093;
3. 曲靖师院 数学系, 云南 曲靖 655000;
4. 云南财经大学 计算机科学系, 昆明 650221)

(我刊编委李继彬来稿)

摘要: 通过求解与平面动力系统的两个平衡点相连接的抛物线解, 获得了 6 种非线性行波方程的扭波解存在条件, 并给出了这些扭波解的参数表达式, 以及上述解存在的参数条件.

关 键 词: 扭波解; 连接轨道; 抛物线解; 非线性行波方程; 非线性发展方程
中图分类号: O175.12 文献标识码: A

引 言

近年来, 关于非线性发展方程精确行波解的研究, 取得了重要的进展. 对于一个给定的非线性行波系统, 有许多种求解精确解的方法如逆散射法, Darbox 变换法, 双线性法, 代数几何法, 双曲函数法等(参见 Fan[1] 和列举的相关参考文献) . 然而, 什么是精确行波解的动力学行为, 以及精确行波解如何依赖于系统的参数条件, 这些都是非常值得研究的问题.

非线性发展方程中的非线性行波系统通常是一个常微系统, 因此, 对于一个给定的行波系统, 动力系统的定性理论在求解行波解以及研究其动力学行为方面起着重要的作用.

本文将用统一的方法研究以下 6 种非线性行波方程(参见(3) 式至(8) 式) 的扭波解, 给出这些扭波解的参数表达式, 并且证明这些扭波解由下面的非线性常微分方程的抛物线解所确定:

$$\phi\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}+(a_0\phi+a_1\phi^2)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}+a_5\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+g\phi^2(a_2+a_3\phi+a_4\phi^2)=0,\tag{1}$$

其中 $a_i\,(i=0\sim 5)$ 是任意参数, 且 $a_0^2+a_1^2\neq 0$, $g>0$, $a_2\neq 0$. 方程(1) 等价于下列二维系统

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}=y,\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{1}{\phi}((a_0\phi+a_1\phi^2)y+a_5y^2+g\phi^2(a_2+a_3\phi+a_4\phi^2)).\tag{2}$$

---

* 收稿日期: 2006-01-16; 修订日期: 2007-04-04
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10231020); 云南省自然科学基金资助项目(2003A0018M)
作者简介: 李继彬(1943—), 男, 云南人, 教授, 博士生导师(联系人. Tel: +86-871-5171274; E-mail: lijb@zjnu.cn).

明显地, 如果 $a_0 = a_1 = 0$, 则(2) 式是可积的系统, 李继彬和陈关荣[2] 已经研究过这种情况.

我们考虑 $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, 即(1) 式不可积的情形, 通过利用相同方程(1) 的解, 我们给出了下面的6 种非线性行波方程扭波解的存在性.

1) 复合 Burgers-KdV 方程(参见 Zhang 等[3] 和当 $p = 1$ 时, 参见 Parkes 等[4], Feng[5]):

$$u_t + au^p u_x + bu^{2p} u_x + ru_{xx} + \delta u_{xxx} = 0, \tag{3}$$

其中 a、b、r、p、δ 是实数, 且 $p > 0$, $\delta \neq 0$.

2) 广义的 Zakharov-Kuznetnov 方程(参见 Li 等[6]):

$$u_t + au^p u_x + bu^{2p} u_x + \gamma u_{xy} + \delta u_{xxx} + \rho u_{xyy} = 0, \tag{4}$$

其中 a、b、γ、δ、ρ、p 是实数, 且 $p > 0$, $\delta\rho \neq 0$.

3) 有阻尼项的非线性方程:

$$u_{tt} + \alpha u_{xxt} + \beta u_{xxxx} + \gamma (u_x^n)_x = 0 \qquad (n \geqslant 2) \tag{5}$$

和奇异非线性的反应扩散方程(参见 Li 等[7])

$$u_t = (au^p u_x)_x - bu + qu^{p+1}, \tag{6}$$

其中 $\beta \neq 0$, $a \neq 0$, $r > 0$, $q > 0$, $p > 0$.

4) 非线性分数幂方程(参见 Liu[8])

$$u_t - Du_{xx} + \alpha u^{\delta} u_x - \frac{m}{n} u_x^2 = h_1 u + h_2 u^{\delta+1} + h_3 u^{2\delta+1}, \tag{7}$$

其中 $D > 0$, $\delta > 0$, α、m、$h_i\,(i = 1, 2, 3)$ 是实数.

5) 广义的 Burgers-Huxley 方程(参见 Wan 等[9])

$$u_t + \alpha u^{\delta} u_x - u_{xx} = \beta u(1 - u^{\delta})(u^{\delta} - \gamma), \tag{8}$$

其中 $\beta \geqslant 0$, $\delta > 0$, $\gamma \in (0, 1)$.

这些方程在物理学的非线性现象研究中起到了非常重要的作用(参见以上的论文及相关的参考文献).

令 $u(x, t) = u(x - ct) = u(\xi)$, 其中 c 是波速, 代入(3) 式, 作变换 $u(\xi) = (\phi(\xi))^{1/p}$, 在一定的条件下(参见文献[3]), 我们可以获得(3) 式的行波方程:

$$\phi\phi_{\xi\xi} + \frac{1-p}{p}\phi_\xi^2 + \frac{r}{\delta}\phi\phi_\xi + \frac{p}{\delta}\left(-c\phi^2 + \frac{a}{p+1}\phi^3 + \frac{b}{2p+1}\phi^4\right) = 0. \tag{3$'$}$$

对于方程(4), 令 $u(x, y, t) = u(x + ly - ct) = u(\xi)$, 代入(4) 式, 作变换 $u(\xi) = (\phi(\xi))^{1/p}$, 在一定的条件下(参见文献[6]), 我们可以得到(4) 式的行波方程:

$$\phi\phi_{\xi\xi} + \frac{1-p}{p}\phi_\xi^2 + \frac{rl}{\delta + \rho l^2}\phi\phi_\xi + \frac{p}{\delta + \rho l^2}\left(-c\phi^2 + \frac{a}{p+1}\phi^3 + \frac{b}{2p+1}\phi^4\right) = 0. \tag{4$'$}$$

对于方程(5), 令 $u(x, t) = u(x - ct) = u(\xi)$, 代入(5) 式, 关于 ξ 积分 2 次, 并作变换 $u(\xi) = (\phi(\xi))^{2/(n-1)}$, 在一定的条件下(参见文献[6]), 我们有下列行波方程:

$$\phi\phi_{\xi\xi} + \frac{3-n}{n-1}\phi_\xi^2 - \frac{c\alpha}{\beta}\phi\phi_\xi + \frac{n-1}{2\beta}(c^2\phi^2 + \gamma\phi^4) = 0. \tag{5$'$}$$

同样地, 对于方程(6), 令 $u(x, t) = u(x - ct) = u(\xi)$, 代入(6) 式, 作变换 $u(\xi) = (\phi(\xi))^{-1/p}$, 在一定的条件下, 我们可以得到下列的行波方程:

$$\phi\phi_{\xi\xi} - \frac{2p+1}{p}\phi_\xi^2 + \frac{c}{a}\phi^2\phi_\xi + \frac{p}{a}(-q\phi^2 + b\phi^3) = 0. \tag{6$'$}$$

对于方程(7), 令 $u(x, t) = u(x - ct) = u(\xi)$, 代入(7) 式, 作变换 $u(\xi) = (\phi(\xi))^{1/\delta}$, 在一定的条件下, 我们可以得到下列的行波方程:

$$\phi\phi_{\xi\xi}+\left(\frac{D+m}{D\delta}-1\right)\phi_\xi^2+\left(\frac{c}{D}\phi-\frac{\alpha}{D}\phi^2\right)\phi_\xi+\frac{\delta}{D}(h_1\phi^2+h_2\phi^3+h_3\phi^4)=0. \qquad (7)'$$

对于方程(8),作与(7)式相同的变换,可得到行波方程:

$$\phi\phi_{\xi\xi}+\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\phi_\xi^2+(c\phi-\alpha\phi^2)\phi_\xi+\delta\beta\phi^2(1-\phi)(\phi-\gamma)=0. \qquad (8)'$$

明显地,(3)′式至(8)′式是(1)式的特殊形式. 当 $\xi\in(-\infty,\infty)$ 时,假设 $u(x,t)=\phi(\xi)$ 是(2)式的一个连续解,且 $\lim_{\xi\to-\infty}\phi(\xi)=a$, $\lim_{\xi\to+\infty}\phi(\xi)=b$, 如果 $a\neq b$, 我们就称 $u(x,t)$ 为扭波解. 通常,(3)式至(8)式的一个扭波解对应于行波方程的一条异宿轨道(或称为连接轨道).

系统(2)所定义的向量场确定的相轨道给出(3)式至(8)式的所有行波解. 系统(2)是一个平面动力系统,它依赖于7个参数构成的参数组$(g, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, 因此,(2)式的解有着丰富的动力学行为. 在这篇文章中,我们仅考虑相平面(ϕ, y)内(2)式的有界解,即在以上7个参数构成空间内,发现(2)式尽可能多的异宿轨道.

本文第1节,讨论(2)式抛物线解的存在性,给出精确的参数条件. 第2节,考虑(3)式至(8)式扭波解的存在性.

1 式(2)抛物线解的存在性及参数表达式

令 $d\xi=\phi d\eta$, 除直线 $\phi=0$ 外,系统(2)和下面的系统有相同的拓扑相图:

$$\frac{d\phi}{d\eta}=y\phi,\quad \frac{dy}{d\eta}=-((a_0\phi+a_1\phi^2)y+a_5y^2+g\phi^2(a_2+a_3\phi+a_4\phi^2)), \qquad (9)$$

记

$$f(\phi)=\phi^2(a_2+a_3\phi+a_4\phi^2). \qquad (10)$$

当 $\Delta=a_3^2-4a_2a_4>0$, $a_4\neq0$ 时,函数$f(\phi)$有3个0点,分别为:

$$\phi_0=0,\quad \phi_1=\frac{1}{2a_4}\left(-a_3+\sqrt{a_3^2-4a_2a_4}\right),\quad \phi_2=-\frac{1}{2a_4}\left(a_3+\sqrt{a_3^4-4a_2a_4}\right). \qquad (11)$$

当 $\Delta=a_3^2-4a_2a_4=0$, $a_4\neq0$ 时,(10)式有2个0点:$\phi=0$, $\phi_{1,2}=-a_3/(2a_4)$. 特别地,当 $a_4=0$, $a_2a_3\neq0$ 时,(10)式有2个0点:$\phi=0$, $\phi_a=-a_2/a_3$; 当 $a_3=0$, $a_2a_4<0$ 时,(10)式有3个0点:$\phi=0$, $\phi_{1,2}=\pm\sqrt{-a_2/a_4}$.

因此,(9)式至多存在3个平衡点$O(0,0)$, $E_{1,2}(\phi_{1,2},0)$.

注意到奇直线 $\phi=0$ 是(9)式的一条不变直线解,所以在ξ的有限时间区间内,(9)式的所有解不能穿过直线 $\phi=0$.

记$\boldsymbol{M}(\phi_i,0)$为(9)式的线性化系统在平衡点$(\phi_i,0)$处的系数矩阵,通过计算,我们有

$$J(0,0)=\det\boldsymbol{M}(0,0)=0,\quad \mathrm{tr}(\boldsymbol{M}(\phi_{1,2},0))=(a_0\phi_{1,2}+a_1\phi_{1,2}^2), \qquad (12)$$

$$J(\phi_{1,2},0)=\det\boldsymbol{M}(\phi_{1,2},0)=g\phi_{1,2}f'(\phi_{1,2})=$$
$$g\phi_{1,2}^2(2a_2+3a_3\phi_{1,2}+4a_4\phi_{1,2}^2). \qquad (13)$$

根据平面动力系统理论(参见文献[10]),对于平面多项式系统(9)的平衡点$(\phi_i,0)(i=1,2)$:若 $J<0$,则它是鞍点;若 $J>0$, $(\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}(\phi_i,0)))^2-4J(\phi_i,0)>0(<0)$,则它是结点(焦点);若 $J=0$ 并且平衡点的Poincar 指标为0,则该平衡点是尖点.

在这篇文章中,我们假设 $J(\phi_i,0)>0$, 且

$$(\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}(\phi_i,0)))^2-4J(\phi_i,0)=$$
$$\phi_i^2[(a_0+a_1\phi_i)^2-4g(2a_2+3a_3\phi_i+4a_4\phi_i^2)]>0, \qquad (14)$$

即(9)式没有焦点的情况,因此,存在连接(0,0)和$(\phi_i, 0)(i=1,2)$的连接轨道(当$\phi_1\phi_2>0$时,存在连接$(\phi_1, 0)$和$(\phi_2, 0)$的连接轨道).

根据上面的分析,我们可以得到如下的结论.

1) 当$a_4>0, a_3>0, a_2>0$时,则有$\phi_2<\phi_1<0$, $E_1(\phi_1, 0)$是鞍点, $E_2(\phi_2, 0)$是结点;

2) 当$a_4>0, a_3<0, a_2>0$时,则有$0<\phi_2<\phi_1$, $E_2(\phi_2, 0)$是鞍点, $E_1(\phi_1, 0)$是结点;

3) 当$a_4>0, a_2<0, a_3\neq 0$时,则有$\phi_2<0<\phi_1$, $E_{1,2}(\phi_{1,2}, 0)$是结点;

4) 当$a_4<0, a_3>0, a_2<0$时,则有$0<\phi_2<\phi_1$, $E_1(\phi_1, 0)$是鞍点, $E_2(\phi_2, 0)$是结点;

5) 当$a_4<0, a_3<0, a_2<0$时,则有$\phi_2<\phi_1<0$, $E_1(\phi_1, 0)$是结点, $E_2(\phi_2, 0)$是鞍点;

6) 当$a_4<0, a_2>0, a_3\neq 0$时,则有$\phi_2<0<\phi_1$, $E_{1,2}(\phi_{1,2}, 0)$是鞍点;

7) 当$a_4=0, a_2a_3>0$时,则有$\phi_a<0$. 如果$a_3>0(<0)$, $E(\phi_a, 0)$是鞍点(结点);当$a_4=0, a_2a_3<0$时,则有$\phi_a>0$. 如果$a_3>0(<0)$, $E(\phi_a, 0)$是结点(鞍点);

8) 当$a_3=0, a_2a_4<0$时,则有$\phi_2<0<\phi_1$, $\phi_2=-\phi_1$. 如果$a_4>0\ (<0)$, $E(\phi_{1,2}, 0)$是结点(鞍点).

对于以上1)至8)种情形,我们考虑表达式为$y=A\phi(\phi-\phi_i)(i=1,2)$的抛物线解,以及对于情形1)、2)和情形4)、5),我们考虑表达式为$y=B(\phi_1-\phi)(\phi-\phi_2)$的抛物线解.

首先,假设$a_4\neq 0$, $\Delta=a_3^2-4a_2a_4\geqslant 0$, 从(9)式可以得到

$$y\phi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}=-((a_0\phi+a_1\phi^2)y+a_5y^2+g\phi^2(a_2+a_3\phi+a_4\phi^2))=$$
$$-((a_0\phi+a_1\phi^2)y+a_5y^2+ga_4\phi^2(\phi-\phi_1)(\phi-\phi_2)),\tag{15}$$

其中ϕ_1、ϕ_2是由(11)式给出. 代$y=A\phi(\phi-\phi_i)(i=1,2)$入(15)式,约去公因式$\phi(\phi-\phi_i)$,得到

$$A^2\phi(2\phi-\phi_i)+A(a_0\phi+a_1\phi^2)+a_5A^2\phi(\phi-\phi_i)+ga_4\phi(\phi-\phi_j)=0,\tag{16}$$

其中$i=1, j=2$或$i=2, j=1$. 比较(16)式的系数,可以得到下面两个恒等式:

$$A^2\phi_i(1+a_5)-a_0A+ga_4\phi_j=0,\quad (2+a_5)A^2+a_1A+ga_4=0.\tag{17}$$

从(17)可以看出,当$a_5\neq -1, -2$; $a_0(2+a_5)+a_1(1+a_5)\phi_i\neq 0$时,有

$$A=\frac{g[(2+a_5)\phi_j-(1+a_5)\phi_i]}{2[a_0(2+a_5)+a_1(1+a_5)\phi_i]},\tag{18}$$

因此,可以得到

$$A=A_1=\frac{-g[a_3+(3+2a_5)\sqrt{\Delta}]}{2[a_0(2+a_5)+a_1(1+a_5)\phi_i]},\qquad i=1; j=2,\tag{19a}$$

$$A=A_2=\frac{-g[a_3-(3+2a_5)\sqrt{\Delta}]}{2[a_0(2+a_5)+a_1(1+a_5)\phi_i]},\qquad i=2; j=1.\tag{19b}$$

特别地,如果$\Delta=0$, $a_3a_4\neq 0$, 有$\phi_1=\phi_2=\phi_{1,2}=-a_3/(2a_4)$,

$$A=A_3=\frac{-ga_3a_4}{2a_0a_4(2+a_5)-a_1a_3(1+a_5)},\tag{20}$$

其中$2a_0a_4(2+a_5)-a_1a_3(1+a_5)\neq 0$.

如果$a_3=0$, $a_2a_4<0$, $\phi_{1,2}=\pm\sqrt{-a_2/a_4}$, 有

$$A=A_4=\frac{-g(3+2a_5)\sqrt{-a_2a_4}}{a_0(2+a_5)+a_1(1+a_5)\phi_i},\qquad i=1; j=2,\tag{21a}$$

$$A=A_5=\frac{g(3+2a_5)\sqrt{-a_2a_4}}{a_0(2+a_5)+a_1(1+a_5)\phi_i},\qquad i=2; j=1,\tag{21b}$$

其中 $a_0(2+a_5)+a_1(1+a_5)\phi_i\neq 0$.

当 $a_5=-1$ 时, 从(17) 可以得到

$$A=A_{1,2}=(1/2)(-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4ga_4}),\quad a_0A_{1,2}-ga_4\phi_j=0,\tag{22}$$

其中 $a_0\neq 0$, $a_1^2-4ga_4\geqslant 0$.

当 $a_5=-2$ 时, 同样从(17) 式可以得到

$$A=A_{1,2}=(1/(2\phi_i))(a_0^2\pm\sqrt{a_0^2+4ga_4\phi_i\phi_j}),\quad a_1A_{1,2}+ga_4=0,\tag{23}$$

其中 $a_1\neq 0$, $a_0^2+4ga_4\phi_i\phi_j\geqslant 0$.

其次, 假设 $a_4=0$, $a_2a_3\neq 0$, (9) 式存在解 $y=A_6\phi(\phi-\phi_a)$, $\phi_a=-a_2/a_3$, 利用同样的方法, 得到

$$A_6^2\phi(2\phi-\phi_a)+A_6(a_0\phi+a_1\phi^2)+a_5A_6^2\phi(\phi-\phi_a)+ga_3\phi=0,\tag{24}$$

比较(24) 式两边的系数, 得到

$$A_6^2(\phi_a+a_5\phi_a)-a_0A_6-ga_3=0,\quad (2+a_5)A_6^2+a_1A_6=0.\tag{25}$$

当 $a_5\neq -2$, $a_1a_2(1+a_5)-a_0a_3(2+a_5)\neq 0$ 时, 有

$$A_6=\frac{ga_3^2(2+a_5)}{a_1a_2(1+a_5)-a_0a_3(2+a_5)}.\tag{26}$$

接下来, 我们考虑对于情形 1)、2) 和情形 4)、5), (9) 式的抛物线解表达式是 $y=B(\phi_1-\phi)(\phi-\phi_2)$ 的情况. 在 $a_4\neq 0$, $\Delta=a_3^2-4a_2a_4>0$ 的条件下, 从(9) 式可以得到

$$y\phi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}=-((a_0\phi+a_1\phi^2)y+a_5y^2-ga_4\phi^2(\phi_1-\phi)(\phi-\phi_2)),\tag{27}$$

其中 ϕ_1、ϕ_2 是由(11) 式给出. 代 $y=B(\phi_1-\phi)(\phi-\phi_2)$ 入(27) 式, 约去公因式 $(\phi_1-\phi)(\phi-\phi_2)$, 得到

$$B^2\phi(\phi_1+\phi_2-2\phi)+B(a_0\phi+a_1\phi^2)+a_5B^2(\phi_1-\phi)(\phi-\phi_2)-ga_4\phi^2=0,\tag{28}$$

比较(28) 式的系数, 可以得到下面 3 个恒等式:

$$a_5\phi_1\phi_2=0,\quad B^2(\phi_1+\phi_2)(1+a_5)+a_0B=0,\quad (2+a_5)B^2-a_1B+ga_4=0,\tag{29}$$

从(29) 可以看出, 当 $2a_0a_4-a_1a_3\neq 0$ 时, 有

$$a_5=0,\quad B=\frac{-ga_3a_4}{2a_0a_4-a_1a_3}.\tag{30}$$

利用(2) 式的第一个方程, 容易得到抛物线解的参数表达式. 根据以上的分析, 我们得到如下的结论.

定理 1.1 假设上述的参数条件成立.

(i) 如果存在由(19a) 式至(24) 式确定的 $A=A_i(i=1,2,\cdots,6)$, $\bar{A}_{1,2}$, $A_{1,2}$, 那么方程(1) 存在连接原点(0, 0) 和平衡点(ϕ_i, 0) 的抛物线解 $y=A\phi(\phi-\phi_i)(i=1,2)$, 其参数表达式为:

$$\phi(\xi)=\frac{1}{2}\left(\phi_i-|\phi_i|\tanh\left(\frac{A|\phi_i|}{2}\xi\right)\right),\qquad i=1,2.\tag{31}$$

(ii) 当 $a_5=0$ 时, 如果存在由(30) 式确定的 B, 那么方程(1) 存在连接平衡点(ϕ_1, 0) 和(ϕ_2, 0) 的抛物线解 $y=B(\phi_1-\phi)(\phi-\phi_2)$, 其参数表达式为:

$$\begin{aligned}\phi(\xi)&=\frac{1}{2}((\phi_1+\phi_2)+(\phi_1-\phi_2)\tanh(\Omega\xi))=\\&\frac{1}{2}\left(-\frac{a_3}{a_4}+\frac{\sqrt{\Delta}}{a_4}\tanh\left(\frac{B\sqrt{\Delta}}{2a_4}\xi\right)\right),\end{aligned}\tag{32}$$

其中 $\Omega=\dfrac{B(\phi_1-\phi_2)}{2}=\dfrac{B\sqrt{\Delta}}{2a_4}$.

2 非线性波方程的 6 种扭波解

在这部分, 我们利用引言的结果, 给出方程(3) 至方程(6) 的的精确扭波解. 为获得行波方程(3)′ 至方程(8)′ 的解, 当 $p\neq 0$ 时, 作变换 $u=(\phi(\xi))^{1/p}$: 如果 p 是偶数或者是一个无理数, 我们需要考虑 $\phi(\xi)\geqslant 0(\xi\in(-\infty,\infty))$, 也就是考虑连接 0 和 $\phi_i(\phi_i>0, i=1,2)$ 的轨道以及连接 ϕ_2 和 $\phi_1(0<\phi_2<\phi_1)$ 轨道的情况; 如果 p 是奇数, $\phi(\xi)$ 就可以为负值了, 即可以考虑 $\phi_i<0(i=1,2)$ 的情况. 接下来, 我们考虑 $c>0$, $\phi_i>0\ (i=1,2)$ 的情况.

1) 根据方程(3) 式和(3)′, 比较方程(3)′ 和方程(1) 的系数, 有

$$a_0=\frac{r}{\delta},\quad a_1=0,\quad a_2=-c,\quad a_3=\frac{a}{p+1},\quad a_4=\frac{b}{2p+1},\quad a_5=\frac{1-p}{p},\quad g=\frac{p}{\delta},$$

因此, 我们可以得到

$$\phi_{1,2}=\frac{-a(2p+1)\pm\sqrt{a^2(2p+1)^2+4(p+1)^2(2p+1)bc}}{2b(p+1)},$$

$$\Delta=\frac{a^2(2p+1)^2+4(p+1)^2(2p+1)bc}{(p+1)^2(2p+1)^2},\quad B=-\frac{a}{4r}(p=1, a_5=0),$$

$$A_{1,2}=\frac{-p^2[a(2p+1)\pm(p+2)\sqrt{a^2(2p+1)^2+4(p+1)^2(2p+1)bc}]}{2r(p+1)^2(2p+1)},$$

$$A_3=\frac{-p^2ab}{2r(p+1)^2},\quad A_{4,5}=\pm\frac{p(p+2)\sqrt{bc}}{r(p+1)\sqrt{2p+1}},\quad A_6=-\frac{ap}{r(p+1)}.$$

从定理 1. 1 可以得到下列结论.

定理 2. 1

(i) 如果 $b>0$, $a\neq 0$, 那么对于任意 $c>0$ 和实数 $p>0, p\neq 1$, 有

$$\Delta=\frac{a^2(2p+1)^2+4(p+1)^2(2p+1)bc}{(p+1)^2(2p+1)^2}>0,\qquad \phi_1>0>\phi_2,$$

方程(3) 有 1 个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(\frac{1}{2}\phi_1-\frac{1}{2}\phi_1\tanh\left(\frac{A_1\phi_1}{2}(x-ct)\right)\right)^{1/p}. \tag{33}$$

(ii) 如果 $b<0$, $a>0$, 且 $\Delta>0$, 有 $\phi_1>\phi_2>0$, 那么对于任意 $c>0$ 和实数 $p>0, p\neq 1$, 方程(3) 有 2 个扭波解(33) 式和(34) 式:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(\frac{1}{2}\phi_2-\frac{1}{2}\phi_2\tanh\left(\frac{A_2\phi_2}{2}(x-ct)\right)\right)^{1/p}. \tag{34}$$

对于 $p=1$, 方程(3) 有 1 个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=-\frac{3a}{4b}+\frac{3\sqrt{\Delta}}{2b}\tanh\left(\frac{3a\sqrt{\Delta}}{8r(-b)}\xi\right), \tag{35}$$

其中 $\Delta=(1/12)(3a^2+16bc)$. 当 $\Delta=0$ 时, 有 $\phi_1=\phi_2=\phi_{12}=-(a(2p+1))/(2b(p+1))$, 那么, 对于给定 $c>0$, 满足 $\Delta=0$ 和实数 $p>0$, $p\neq 1$, 方程(3) 存在 1 个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(\frac{1}{2}\phi_{12}-\frac{1}{2}\phi_{12}\tanh\left(\frac{A_3\phi_{12}}{2}(x-ct)\right)\right)^{1/p}. \tag{36}$$

(iii) 如果 $a=0$, $b>0$, 有 $\phi_{1,2}=\pm\sqrt{(c(2p+1))/b}$, 那么对于任意 $c>0$ 和实数 $p>0$, $p\neq 1$, 方程(3) 有 1 个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c(2p+1)}{b}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c(2p+1)}{b}}\tanh\left(\frac{A_4\sqrt{(c(2p+1))/b}}{2}(x-ct)\right)\right)^{1/p}. \tag{37}$$

(iv) 如果 $b=0$, $a>0$, 有 $\phi_a=(c(p+1))/a>0$, 那么对于任意 $c>0$ 和实数 $p>0$, $p\neq 1$, 方程(3) 有 1 个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(\frac{c(p+1)}{2a}+\frac{c(p+1)}{2a}\tanh\left(\frac{pc}{2r}(x-ct)\right)\right)^{1/p}. \tag{38}$$

2) 根据方程(4)和方程(4)′, 比较方程(4)′和方程(1)的系数, 有

$$a_0=\frac{rl}{\delta+pl},\ a_1=0,\ a_2=-c,\ a_3=\frac{a}{p+1},\ a_4=\frac{b}{2p+1},\ a_5=\frac{1-p}{p},\ g=\frac{p}{\delta+pl}.$$

明显地, (4)′式和(3)′式仅仅是系数 a_0、g 不同, 因此, (4)式有与(3)式相同的扭波解.

3) 根据方程(5)和方程(5)′, 比较方程(5)′和方程(1)的系数, 有

$$a_0=-\frac{c\alpha}{\beta},\ a_1=0,\ a_2=c^2,\ a_3=0,\ a_4=\gamma,\ a_5=\frac{3-n}{n-1},\ g=\frac{n-1}{2\beta}.$$

因此, 当 $\gamma<0$ 时, 有 $\phi_{1,2}=\pm c/(\sqrt{-\gamma})$, 从(21)式可以得到

$$A_{4,5}=\pm[(n-1)(n+3)\sqrt{-\gamma}]/(2\alpha(n+1)).$$

由此, 可以得到下面的定理.

定理 2.2

(i) 如果 $n\neq 3$, $\gamma<0$, 那么对于任意 $c>0$ 和实数 $n>2$, 方程(5) 有 1 个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(\frac{c}{2\sqrt{-\gamma}}-\frac{c}{2\sqrt{-\gamma}}\tanh\left(\frac{(n-1)(n+3)c}{4\alpha(n+1)}(x-ct)\right)\right)^{2/(n-1)}. \tag{39}$$

4) 根据方程(6)和方程(6)′, 比较方程(6)′和方程(1)的系数, 有

$$a_0=0,\ a_1=\frac{c}{a},\ a_2=-q,\ a_3=b,\ a_4=0,\ a_5=-\frac{2p+1}{p},\ g=\frac{p}{a},$$

因此, 当 $bq>0\ (<0)$, $\phi_a=q/b>0\ (<0)$ 时, 从(26)式可以得到 $A_6=-pb^2/(q(p+1))$.

定理 2.3　如果 $bq>0$, 方程(6) 有 1 个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(\frac{q}{2b}+\frac{q}{2b}\tanh\left(\frac{p}{2c(p+1)}(x-ct)\right)\right)^{-1/p}. \tag{40}$$

5) 根据方程(7)和方程(7)′, 比较方程(7)′和方程(1)的系数, 有

$$a_0=\frac{c}{D},\ a_1=-\frac{\alpha}{D},\ a_2=h_1,\ a_3=h_2,\ a_4=h_3,\ a_5=\frac{D+m}{D\delta}-1,\ g=\frac{\delta}{D},$$

所以, 当 $\Delta=h_2^2-4h_1h_3\geqslant 0$, $h_3\neq 0$ 时, 有

$$\phi_{1,2}=\frac{1}{2h_3}(-h_2\pm\sqrt{h_2^2-4h_1h_3}),$$

$$A_1=-\frac{D\delta^2[h_2+(D\delta+2D+2m)\sqrt{\Delta}]}{2[c(D\delta+D+m)-\alpha(D+m)\phi_1]},$$

$$A_2=-\frac{D\delta^2[h_2-(D\delta+2D+2m)\sqrt{\Delta}]}{2[c(D\delta+D+m)-\alpha(D+m)\phi_2]},$$

$$A_3=-\frac{D\delta h_2h_3}{2ch_3(D\delta+D+m)+\alpha h_2(D+m)},$$

$$A_{4,5}=\mp\frac{\delta^2(D\delta+2D+2m)\sqrt{-h_1h_3}}{c(\delta+m)-\alpha m\phi_{1,2}},$$

$$A_6=-\frac{D\delta^2 h_2(D\delta+D+m)}{\alpha h_1(D+m)+ch_2(D\delta+D+m)},\quad B=-\frac{\delta h_2h_3}{2ch_3+\alpha h_2}.$$

定理 2.4

(i) 如果 $h_3>0,h_1<0,h_2\neq 0$, 那么对于实数 $\delta>0,\ \delta\neq 1+m/D$, 有 $\Delta=h_2^2-4h_1h_3>0,\ \phi_1>0>\phi_2$, 方程(6)有1个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(\frac{1}{2}\phi_1-\frac{1}{2}\phi_1\tanh\left(\frac{A_1\phi_1}{2}(x-ct)\right)\right)^{1/\delta}.\tag{41}$$

(ii) 如果 $h_3>0,h_2<0,h_1>0$ 或者 $h_3<0,h_2>0,h_1<0$, 且 $\Delta=h_2^2-4h_1h_3>0$, 有 $\phi_1>\phi_2>0$, 那么对于任意实数 $\delta>0,\ \delta\neq 1+m/D$, 方程(6)有2个扭波解(41)式和(42)式:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(\frac{1}{2}\phi_2-\frac{1}{2}\phi_2\tanh\left(\frac{A_2\phi_2}{2}(x-ct)\right)\right)^{1/\delta}.\tag{42}$$

对于 $\delta=1+m/D=\delta_0$(即在(1)式中 $a_5=0$), 方程(6)还有1个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(-\frac{h_2}{2h_4}+\frac{\Delta}{2h_3}\tanh\left(\frac{B\sqrt{\Delta}}{2h_3}(x-ct)\right)\right)^{1/\delta_0}.\tag{43}$$

当 $\Delta=0,\ \phi_1=\phi_2=\phi_{1,2}=-h_2/(2h_3)$ 时, 方程(6)还有1个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(-\frac{h_2}{4h_4}-\frac{h_2}{4h_3}\tanh\left(-\frac{A_3h_2}{4h_3}(x-ct)\right)\right)^{1/\delta}.\tag{44}$$

(iii) 如果 $h_2=0,\ h_1h_3<0$, 有 $\phi_{1,2}=\pm\sqrt{-h_1/h_3}$, 方程(1)有1个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{h_1}{h_3}}-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{h_1}{h_3}}\tanh\left(\frac{A_4\sqrt{-(h_1/h_3)}}{2}(x-ct)\right)\right)^{1/\delta}.\tag{45}$$

(iv) 如果 $h_3=0,\ h_1h_2<0$, 有 $\phi_a=-h_1/h_2>0$, 方程(1)有1个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(-\frac{h_1}{2h_2}-\frac{h_1}{2h_2}\tanh\left(-\frac{A_6h_1}{2h_2}(x-ct)\right)\right)^{1/\delta}.\tag{46}$$

6) 根据方程(8)和方程(8)′, 比较方程(8)′和方程(1)的系数, 有

$$a_0=c,\quad a_1=-\alpha,\quad a_2=-\gamma,\quad a_3=1+\gamma,\quad a_4=-1,\quad a_5=\frac{1-\delta}{\delta},\quad g=\delta\beta.$$

明显地, 我们可以得到 $0<\gamma=\phi_2<\phi_1=1,\ \Delta=(1-\gamma)^2>0$,

$$A_1=\frac{\beta\delta(\delta-\gamma+1)}{\alpha-c(\delta+1)},\quad A_2=\frac{\beta\delta(2\delta\gamma+\delta-2)}{2(\alpha\gamma-c(\delta+1))},\quad B=\frac{\beta(1+\gamma)}{\alpha(1+\gamma)-2c}.$$

定理 2.5 当 $\delta\neq 1$ 时, 方程(8)有2个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{A_1}{2}(x-ct)\right)\right)^{1/\delta}\tag{47}$$

和

$$u(x,t)=u(x-ct)=\left(\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\gamma\tanh\left(\frac{A_2\gamma}{2}(x-ct)\right)\right)^{1/\delta}.\tag{48}$$

当 $\delta=1$ 时(即在(1)式中 $a_5=0$), 方程(8)有1个扭波解:

$$u(x,t)=u(x-ct)=\frac{1}{2}\left((1+\gamma)+(1-\gamma)\tanh\left(\frac{\beta(1-\gamma^2)}{2(\alpha(1+\gamma)-2c)}(x-ct)\right)\right).\tag{49}$$

[参 考 文 献]

[1] FAN En-gui. Uniformly constructing a series of explict exact solutions to nonlinear equations in

mathematical physics[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, **16**: 819-839.

[2] LI Ji-bin, CHEN Guang-rong. Bifurcations of travelling wave solutions for four classes of nonlinear wave equations[J]. Internat J Bifucation and Chaos, 2005, **15**(12): 3973-3998.

[3] ZHANG Wei-guo, CHANG Qian-shun, JIANG Bao-guo. Explict exact solitary-wave solutions for compound KdV-type and compound KdV-Burgers equations with nolinear terms of any order[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2002, **13**: 311-319.

[4] Parkes E J, Duffy B R. Travelling wave solutions to a compound KdV-Burgers equation[J]. Phys Letter A, 1997, **229**(4): 217-220.

[5] FENG Zhao-sheng. A note on "Explict exact solutions to the compound KdV equation" [J]. Phys Letter A, 2003, **312**: 65-71.

[6] LI Biao, CHEN Yong, ZHANG Hong-qing. Exact travelling wave solutions for a generalized Zakharov-Kuznetsov equation[J]. Appl Math Comput, 2003, **146**(2): 653-666.

[7] LI Biao, CHEN Yong, ZHANG Hong-qing. Explict exact solutions for some nolinear partial differential equations with nonlinear terms of any order[J]. Czech J Phys, 2003, **53**: 283-295.

[8] LIU Chun-ping. Exact analytical solutions for nonlinear reaction-diffusion equations[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2003, **18**: 97-105.

[9] Wan X Y, Zhu Z S, Lu Y K. Solitary wave solutions of the generalized Burgers-Huxley equation[J]. J Phys A: Math Gen, 1990, **23**: 271-274.

[10] Chow S N, Hale J K. Method of Bifurcation Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1981.

Kink Wave Determined by a Parabola Solution of a Nonlinear Ordinary Differential Equation

LI Ji-bin[1,2], LI Ming[3], NA Jing[4]

(1. Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, P. R. China;
2. School of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P. R. China;
3. Department of Mathematics, Qujing Normal Institute, Qujing, Yunnan 655000, P. R. China;
4. Computer Science Department, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming 650221, P. R. China)

Abstract: By finding a parabola solution connecting two equilibrium points of a planar dynamical system, the existence of the kink wave solution for 6 classes of nonlinear wave equations was shown. Some exact explicit parametric representations of kink wave solutions were given. Explicit parameter conditions to guarantee the existence of kink wave solutions were determined.

Key words: kink wave solution; connecting orbit; parabola solution; nonlinear wave equation; nonlinear evolution equation