

转点频段旋转薄壳体的强迫 振动和特殊效应*

张志良^{1,2}, 程昌钧¹

(1. 上海市应用数学和力学所; 上海大学 力学系, 上海 200072;

2. 浙江师范大学 物理系, 浙江 金华 321004)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 利用转点频段的一致有效解研究了截顶旋转薄壳受边缘薄膜力和弯矩驱动的强迫振动. 薄壳强迫振动呈现出薄膜解和弯曲解的耦合特点: 无论由薄膜力还是由弯矩激发, 振动均俱含薄膜和弯曲运动. 揭示了转点频段薄壳强迫振动的 3 种特殊效应: 无弯曲效应、内部静止效应和内部薄膜运动外部弯曲运动效应. 这些效应具有潜在的应用价值.

关键词: 强迫振动; 特殊效应; 转点频段; 旋转薄壳

中图分类号: O326 **文献标识码:** A

引 言

在旋转薄壳(柱壳和球壳除外)自由振动的某个频段内, 存在所谓的转点问题^[1-5]: 薄膜力在薄壳内部能与横向惯性力平衡, 而在外部则不能平衡, 因而弯曲波仅在外部出现. 内部和外部的过渡区数学上称为转点, 出现转点的频段称为转点频段. Ross^[1]、 $\hat{A}\hat{1}\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\zeta}^3\hat{\eta}^6\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\tau}\hat{\omega}$ 等^[2]、Zhang 和 Zhang^[3]对薄壳转点问题研究作出了很大贡献. 最近, 本文作者得到了该问题的改进的一致有效解^[4], 利用所得解, 研究了各种边界条件下薄壳的固有频率和模态, 所得结果与数值计算结果相当吻合^[5].

转点频段是旋转薄壳振动的特有频段. 转点的出现使得该频段内的薄壳振动截然不同于其它频段. Hartung 和 Loden^[6]在数值研究了多达 3 000 个振型后评述道:“正是在转点频段展示了锥壳模态的新颖特征”. 文献[5]揭示了具有 1 个 1 阶转点的截顶薄壳在转点频段的自由振动中的特有现象, 主要表现为弯曲解和无矩解在固有频率和模态中的耦合. 本文研究边缘驱动的上述薄壳在转点频段的强迫振动, 重点揭示转点频段薄壳强迫振动的特有效应, 这些效应具有潜在的应用价值. 作者未见过关于这些效应的类似报道.

1 旋转薄壳转点频段轴对称自由振动的通解

以 u, w 代表薄壳轴对称振动的 2 个位移(见图 1), 并令 $U = [u \quad w]^T$, 文献[3]给出了采

* 收稿日期: 2006-09-28; 修订日期: 2007-05-15

基金项目: 上海市力学重点学科资助项目(Y0103); 浙江省自然科学基金资助项目(100039)

作者简介: 张志良(1965—), 男, 浙江嘉兴人, 教授(E-mail: zzl@zjnu.cn);

程昌钧, 教授(联系人, Tel: + 86-21-56331454; E-mail: chjcheng@mail.shu.edu.cn).

用 Sanders 薄壳理论的位移型旋转薄壳轴对称自由振动方程

对称轴

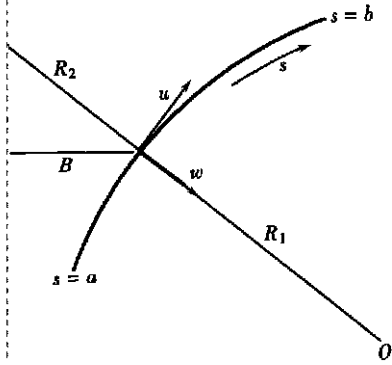


图 1 旋转薄壳几何形状和坐标系

$$(L + \mu^5 N) U = - (1 - \nu)^2 \Omega^2 U, \quad (1)$$

式中, Ω 为频率参数, ν 为泊松比, 算子 $L = [L_{ij}]_{2 \times 2}$, $N = [N_{ij}]_{2 \times 2}$ 的表达式见文献[3]. 本文中, 小参数 μ 和 ε 定义为 $\mu^5 = \varepsilon^4 = h^2/[12(1-\nu^2)]$, h 为薄壳厚度. 上式中消去以 u , 得到^[2]

$$- \mu^5 \left[\sum_{k=0}^6 a_k(s) \frac{d^k w}{ds^k} \right] + \sum_{k=0}^2 b_k(s) \frac{d^k w}{ds^k} = 0 \quad (a_6 = 1), \quad (2)$$

式中左边第 1 部分与薄壳厚度有关, 代表弯曲效应, 第 2 部分代表薄膜效应, 且 $b_2(s) = \Omega^2 - R_2^{-2}(s)$.

当 $b_2(s) \neq 0$ 时, 用多尺度法可将方程(2) 分离为弯

曲方程和薄膜方程: $\varepsilon^4(d^4 w/ds^4) - b_2(s)w = 0$ 和 $b_2(s)(d^2 w/ds^2) + b_1(s)(dw/ds) + b_0(s)w = 0$. 转点位置 s^* 定义为方程 $b_2(s^*) = 0$ 的根. 因此当 Ω 位于转点频段内, 即 $R_2^{-2}(b) \leq \Omega \leq R_2^{-2}(a)$, 转点将薄壳分成 3 个区域: 转点域 $s \approx s^*$, $b_2(s) \approx 0$; 转点外部域 $s > s^*$, $b_2(s) > 0$; 转点内部域 $s < s^*$, $b_2(s) < 0$. $b_2(s)$ 的符号决定了上述弯曲方程的解的性质, 因而弯曲解在转点外部和内部有不同的行为: 在转点内部仅出现指数解, 在转点外部还出现三角函数解, 且在转点域以外求得的 4 个弯曲解在转点域奇异. 薄膜方程中, 域 $b_2(s^*) = 0$, 1 个薄膜解在转点域奇异, 另 1 个正则薄膜解不受转点出现的影响, 仍构成方程(2) 的基本解. 4 个弯曲解和 1 个薄膜解在转点域奇异, 表明方程(2) 在转点域不能作如上分离. 在转点频段有两种方法求解方程(2), 一种方法是求得在上述 3 个域内分别成立的解并加以匹配^[1], 另外一种方法是寻求全域一致有效解^[2-4]. 对后者, 解不能以初等函数表出, 只能用特殊函数(称为广义相关函数)表出. 除正则薄膜解外, 方程(1) 的另外 5 个解可以由广义相关函数 $Z_i(\zeta, p)$ ($i = 1, 2, 3, 4, p$ 为整数) 和 $R(\zeta, p)$ 表出^[4,5], 即

$$\begin{cases} u_i = \mu \alpha_1(s) Z_i(\zeta, 1), & w_i = \gamma_0(s) Z_i(\zeta, 0) \quad (i = 1, 2, 3), \\ u_4 = \mu \alpha_1(s) \zeta^{-1} Z_4(\zeta, -3) - u_6 \zeta^{-1} Z_4(\zeta, 2), \\ w_4 = \gamma_0(s) Z_4(\zeta, 0) - w_6 Z_4(\zeta, 1), \\ u_5 = u_{5m} - u_6 \zeta^{-1} R(\zeta, 2) + \ln|\zeta| + \gamma - 1 + \mu \alpha_1(s) \zeta^{-1} R(\zeta, -3), \\ w_5 = w_{5m} - w_6 [R(\zeta, 1) + \ln|\zeta| + \gamma] + \gamma_0(s) \zeta^{-1} R(\zeta, -4), \end{cases} \quad (3)$$

式中, 广义相关函数的自变量

$$\zeta = \left[\frac{5}{4} \int_{s_*}^s b_2^{1/4}(x) dx \right]^{4/5} \mu,$$

$\alpha_1(s)$ 和 $\gamma_0(s)$ 是慢变系数, 其表达式见文献[5], 欧拉常数 $\gamma = 0.577 215 664 9 \dots$, 下标 5m 和 6 分别代表上述的奇异薄膜解和正则薄膜解, 它们没有简单的表达式, 可以用数值积分得到数值解. 在转点域内, 广义相关函数由下述级数表达式计算^[4,5]

$$\begin{bmatrix} Z_1(p) \\ Z_2(p) \\ Z_3(p) \\ Z_4(p) \\ R(p) \end{bmatrix} = \frac{5^{-(p+4)/5}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5^{1/5} \zeta)^n}{n!} \Gamma^* \left(\frac{n+1-p}{5} \right) \begin{bmatrix} \sin(2\alpha_p) \\ \cos \alpha_p - \cos(2\alpha_p) \\ 1 - \cos \alpha_p \\ \sin \alpha_p \\ \pi \cos \alpha_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2J(\zeta, p) \\ 0 \\ 0 \\ 0.4J(\zeta, p) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中, $\Gamma^*(x) |_{x \neq 0, -1, -2, \dots} = \Gamma(x)$, $\Gamma^*(0) = \ln 5 - \gamma$, $J(\zeta, p) = 0 (p \leq 0)$, $J(\zeta, 1) = 1$, $J(\zeta, 2) = \zeta$, $\alpha_p = 2\pi(n+1-p)/5$. 在转点域外 ($|\zeta| > 5$), 则由下述渐近表达式计算^[4,5]

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} r \exp(\eta) \sin[\eta + (6p+1)\pi/8] \\ r \exp(\eta) \cos[\eta + (6p+1)\pi/8] \\ r \exp(-\eta) \cos[\eta + (2p+3)\pi/8] \\ r \exp(-\eta) \sin[\eta + (2p+3)\pi/8] \\ R_m \end{bmatrix} \xleftarrow{\zeta^{-\infty}} \begin{bmatrix} Z_1(p) \\ Z_2(p) \\ Z_3(p) \\ Z_4(p) \end{bmatrix} \xrightarrow{\zeta^{\pm\infty}} \begin{bmatrix} (-1)^p r \exp(-\theta)/2 \\ r \cos[\theta - (2p-1)\pi/4] \\ r \exp(\theta) \\ r \sin[\theta - (2p-1)\pi/4] + J(\zeta, p) \end{bmatrix}, \\ \begin{matrix} \xleftarrow{\zeta^{-\infty}} \\ \xrightarrow{\zeta^{+\infty}} \end{matrix} \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ R_m \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ R_m + \pi Z_2(p), \end{matrix} \quad (5)$$

式中

$$r = \frac{|\zeta|^{-(2p+3)/8}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \theta = \varepsilon^{-1} \int_{s_*}^s b_2^{1/4}(x) dx,$$

$$\eta = (\sqrt{2} \varepsilon)^{-1} \int_{s_*}^s [-b_2(x)]^{1/4} dx,$$

当 $p \leq 0$ 时, $R_m = (-p)!(-\zeta)^{p-1}$,

当 $p \geq 1$ 时, $R_m = \left[-\ln|\zeta| - \gamma + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \right] \frac{\zeta^{p-1}}{(p-1)!}$.

(4) 式、(5) 式及下文中, 省略 $Z_i(\zeta, p)$ 和 $R(\zeta, p)$ 的自变量 ζ . (4) 式、(5) 式给出了广义相关函数的足够计算信息, 但在转点频段, 只能用数值积分薄膜方程得到奇异薄膜解和正则薄膜解, 对本文中计算的锥壳, 文献[7]给出了它们的幂级数形式解.

将(5)式代入(3)式并考虑到另外 1 个基本解——正则薄膜解不受转点出现的影响, 得解的连接公式(以 w 为例)

$$\begin{bmatrix} w_i^{(-)} \\ w_4^{(-)} \\ w_{5m} \\ w_6 \end{bmatrix} \xleftarrow{\zeta^{-\infty}} \begin{bmatrix} w_i \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\zeta^{\pm\infty}} \begin{bmatrix} w_i^{(+)} \\ w_4^{(+)} - w_6 \\ w_{5m} + \pi w_2^{(+)} \\ w_6 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6)$$

式中 $w_1^{(-)} \sim w_4^{(-)}$ 和 $w_1^{(+)} \sim w_4^{(+)}$ 分别代表转点内部域和转点外部域的弯曲解. 前 3 个解在转点域外为纯粹的弯曲解, 第 6 个解在全域为纯粹的薄膜解. 旋转薄壳转点频段解与通常解的不同之处体现在第 4 个和第 5 个解: 在由转点内部穿过转点后, 第 4 个弯曲解还另外连接了正则薄膜解, 而奇异薄膜解则连接了 1 个弯曲解. 正是这不同之处将导致在转点频段薄壳强迫振动的特殊效应.

以广义相关函数表示的第一主坐标方向的薄膜内力 N , 弯矩 M 和剪力 Q 为^[5]

$$\begin{cases} N_i = C_N Z_i(1) & (i = 1, 2, 3), \\ N_4 = C_N \zeta^{-1} Z_4(-3) - N_6 \zeta^{-1} Z_4(2), \\ N_5 = N_{5m} - N_6 [\zeta^{-1} R(2) + \ln \zeta + \gamma - 1] + C_N \zeta^{-1} R(-3), \\ M_i = -\zeta^2 \gamma_0(s) Z_i(-2), \quad M_5 = -\zeta^2 \gamma_0(s) R(-2), \\ Q_i = -\zeta^3 \gamma_0(s) Z_i(-3), \quad Q_5 = -\zeta^3 \gamma_0(s) R(-3) & (i = 1, 2, 3, 4), \end{cases} \quad (7)$$

式中 $C_N = - (1 - \nu^2) \mu \alpha_1(s) \frac{B'}{B} \left[\nu + \frac{R_2}{R_1} \right]^{-1}$.

2 转点频段薄壳的强迫振动

考察如下 3 种边缘力激励的薄壳的强迫振动: 薄膜力或弯矩分别作用于薄壳的内、外边, 而其余的 5 个边界自由, 即有边界条件如下

情形 1: $N_a = -F, Q_a = M_a = Q_b = M_b = N_b = 0$;

情形 2: $N_b = F, Q_a = M_a = N_a = Q_b = M_b = 0$;

情形 3: $M_b = m, Q_a = M_a = N_a = Q_b = N_b = 0$,

式中, 下标 a, b 代表相应的量在 $s = a, s = b$ 处的值. 本文仅限于考虑转点不在薄壳两端 (包括边界邻域) 的情形, 此时相关函数的渐近表达式在边界是适用的.

2.1 情形 1: 小端受薄膜力驱动

由 (7) 式、(3) 式和边界条件可解得位移

$$\begin{cases} w(s) = -A_5 \frac{\pi e^{-\theta_b}}{\sqrt{2 \sin \theta_b}} \gamma_0 Z_3(0) - A_5 \pi \cot \theta_b [\gamma_0 Z_4(0) - w_6 Z_4(1)] + \\ \quad A_5 \left\{ w_{5m} - w_6 [R(1) + \ln |\zeta| + \gamma] + \gamma_0 \zeta^{-1} R(-4) - \frac{N_{5mb}}{N_{6b}} w_6 - \pi \cot \theta_b w_6 \right\}, \\ u(s) = -A_5 \frac{\pi e^{-\theta_b}}{\sqrt{2 \sin \theta_b}} \mu \alpha_1 Z_3(1) - A_5 \pi \cot \theta_b [\mu \alpha_1 \zeta^{-1} Z_4(-3) - u_6 \zeta^{-1} Z_4(2)] + \\ \quad A_5 \left\{ u_{5m} - u_6 [\zeta^{-1} R(2) + \ln |\zeta| + \gamma - 1] + \mu \alpha_1 \zeta^{-1} R(-3) - \right. \\ \quad \left. \frac{N_{5mb}}{N_{6b}} u_6 - \pi \cot \theta_b u_6 \right\}, \end{cases} \quad (8)$$

式中, 第 5 个解的系数 $A_5 = (F/N_{6a}) / (N_{5mb}/N_{6b} - N_{5ma}/N_{6a} + \pi \cot \theta_b)$. 在转点域外, 利用渐近表达式 (5), 上式简化为:

$$\begin{cases} \text{当 } s^* < s \leq b: \\ w(s) = A_5 \left\{ -\frac{\pi \mathcal{H}_w(s)}{\sin \theta_b} \left[\frac{e^{-\theta_b}}{\sqrt{2}} + \sin \left(\theta - \theta_b + \frac{\pi}{4} \right) \right] + w_{5m} - \frac{N_{5mb}}{N_{6b}} w_6 \right\}, \\ u(s) = A_5 \left\{ -\frac{\pi \mathcal{H}_u(s)}{\sin \theta_b} \left[\frac{e^{-\theta_b}}{\sqrt{2}} - \cos \left(\theta - \theta_b + \frac{\pi}{4} \right) \right] + u_{5m} - \frac{N_{5mb}}{N_{6b}} u_6 \right\}, \\ \text{当 } a \leq s < s^*: \\ w(s) = A_5 \left\{ w_{5m} - \frac{N_{5mb}}{N_{6b}} w_6 - \pi \cot \theta_b w_6 \right\}, \\ u(s) = A_5 \left\{ u_{5m} - \frac{N_{5mb}}{N_{6b}} u_6 - \pi \cot \theta_b u_6 \right\}, \end{cases} \quad (9)$$

式中

$$H_w(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{B(s^*)}{B(s)} \right)^{1/2} \frac{b_2'(s^*)^{1/2}}{|b_2(s)|^{3/8}},$$

$$H_u(s) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \left(\frac{B(s^*)}{B(s)} \right)^{1/2} \frac{b_2'(s^*)^{1/2}}{|b_2(s)|^{5/8}}.$$

注意解(8)式对全域有效,而解(9)式在转点是奇异的,但有明显的物理意义:由于 θ 与薄壳厚度有关,因此解(9)式中 θ 的函数代表弯曲解.受篇幅所限,以下仅给出转点域外解.

2.2 情形 2: 大端受薄膜力驱动

此时解为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{当 } s^* < s \leq b: \\ w(s) = A_5 \left\{ -\frac{\pi H_w(s)}{\sin \theta_b} \left[\frac{e^{\theta - \theta_b}}{\sqrt{2}} + \sin \left(\theta - \theta_b + \frac{\pi}{4} \right) \right] + w_{5m} - \left(\frac{N_{5ma}}{N_{6a}} + \pi \cot \theta_b \right) w_6 \right\}, \\ u(s) = A_5 \left\{ -\frac{\varepsilon \pi H_u(s)}{\sin \theta_b} \left[\frac{e^{\theta - \theta_b}}{\sqrt{2}} - \cos \left(\theta - \theta_b + \frac{\pi}{4} \right) \right] + u_{5m} - \left(\frac{N_{5ma}}{N_{6a}} + \pi \cot \theta_b \right) u_6 \right\}, \\ \text{当 } a \leq s < s^*: \\ w(s) = A_5 \left\{ w_{5m} - \frac{N_{5ma}}{N_{6a}} w_6 \right\}, \\ u(s) = A_5 \left\{ u_{5m} - \frac{N_{5ma}}{N_{6b}} u_6 \right\}, \end{array} \right. \quad (10)$$

式中, $A_5 = (F/N_{6b}) / (N_{5mb}/N_{6b} - N_{5ma}/N_{6a} + \pi \cot \theta_b)$.

2.3 情形 3: 小端受弯矩驱动

此时解为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{当 } s^* < s \leq b: \\ \frac{w(s)}{A_5} = H_w(s) \left\{ e^{\theta - \theta_b} \left[T \cos \left(\theta_b + \frac{\pi}{4} \right) - \pi \sin \left(\theta_b + \frac{\pi}{4} \right) \right] + T \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + \pi \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right\} + w_{5m} - \frac{N_{5mb}}{N_{6b}} w_6, \\ \frac{u(s)}{A_5} = \mathcal{H}_u(s) \left\{ e^{\theta - \theta_b} \left[T \cos \left(\theta_b + \frac{\pi}{4} \right) - \pi \sin \left(\theta_b + \frac{\pi}{4} \right) \right] - T \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + \pi \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right\} + u_{5m} - \frac{N_{5mb}}{N_{6b}} u_6, \\ \text{当 } a \leq s < s^*: \\ w(s) = A_5 \left\{ w_{5m} - \frac{N_{5ma}}{N_{6a}} w_6 \right\}, \\ u(s) = A_5 \left\{ u_{5m} - \frac{N_{5ma}}{N_{6a}} u_6 \right\}, \end{array} \right. \quad (11)$$

式中, $A_5 = [-\varepsilon^2 m / (\sqrt{2b_2 u H w b})] / (T \sin \theta_b + \pi \cos \theta_b)$, $T = N_{5mb} / N_{6b} - N_{5ma} / N_{6a}$.

2.4 转点频段薄壳的强迫振动特征

由(9)式至(11)式发现在转点频段,无论是由薄膜力还是由弯矩激发的薄壳振动均含薄膜运动和弯曲运动,后者只存在于转点外部.据(8)式算得的典型的运动特征示于图2中,图中,

波长很长的全域薄膜运动和波长很短的局限于转点外部的弯曲运动同时存在, 薄膜运动中, 纵向和横向位移同量级, 弯曲运动中, 横向位移远大于纵向位移. 本文计算的薄壳为锥壳, 其参数为半顶角 30° , 内半径 17 mm、外半径 83 mm、厚度 0.23 mm、弹性模量 $2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 密度 600 kg/m^3 , 泊松比 0.3. 算得其转点频段为 $3\,032 \text{ Hz} < f < 14\,803 \text{ Hz}$. 计算中, 薄膜激励力取 1 N, 弯矩取 $1 \times 10^{-3} \text{ Nm}$. 本文中由解析解揭示的现象均采用有限元法计算验证. 图 2 中的黑点表示转点位置.

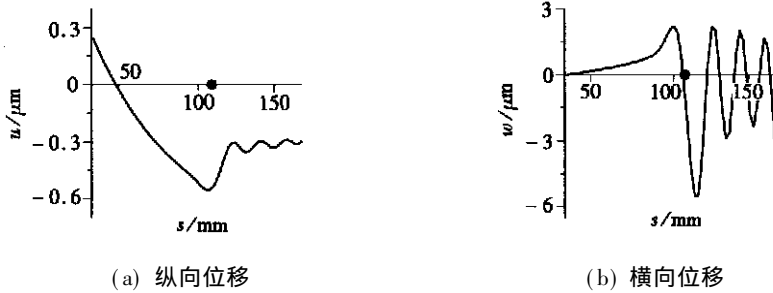


图 2 转点频段的典型位移(情形 1, 4600 Hz)

3 特殊效应

3.1 无弯曲效应

对情形 1, 当

$$N_{6b} = 0, \quad (12)$$

(8) 式中位移成为:

$$w(s) = - \left[\frac{F}{N_{6a}} \right] w_6, \quad u(s) = - \left[\frac{F}{N_{6a}} \right] u_6. \quad (13)$$

对情形 2, 当

$$N_{6a} = 0, \quad (14)$$

(10) 式中位移成为:

$$w(s) = \left[\frac{F}{N_{6b}} \right] w_6, \quad u(s) = \left[\frac{F}{N_{6b}} \right] u_6. \quad (15)$$

由于 u_6 和 w_6 为薄壳无矩方程的正则薄膜解, 可见此时位移(13)和位移(15)完全是薄膜型的. 称之为无弯曲效应.

还可见无弯曲效应频率方程(12)和无弯曲效应频率方程(14)与弯曲边界条件无关. 事实上, 无弯曲效应发生于正则薄膜解(第 6 个解)同时满足薄壳两端的两个薄膜边界条件. 一旦正则薄膜解满足了薄膜边界条件, 齐次的弯曲边界条件必能被剩余的 5 个全为 0 的解满足. 因此可进一步得到结论: 无弯曲效应频率方程必是下述 4 个方程之一: $u_{6a} = 0, N_{6a} = 0, u_{6b} = 0, N_{6b} = 0$.

无弯曲效应现象可以通过数值计算应变能系数 \times 得到进一步证实. 应变能系数定义为弯曲应变能和总应变能的比^[8], 即

$$\times = \frac{V_B}{V_B + V_S} \quad (16)$$

式中, V_B 为弯曲应变能, V_S 为拉伸应变能. 图 3 示出了上述两种情形的应变能系数 \times 的频率特征: 情形 1, 明显的谷出现在图 3(a) 中的 7 217 Hz 和 13 143 Hz 处; 情形 2, 出现在图 3(b) 中的

4 052 Hz 处. 由本文公式算得的频率分别为 7 217 Hz, 13 141 Hz 和 4 053 Hz. 7 217 Hz 的位移表示在图 4 中, 其中, 黑点表示转点的位置. 对比图 2 可见, 不仅弯曲运动消失了, 而且转点的影响也不见了. 这证明了正则薄膜解确实不受转点出现影响.

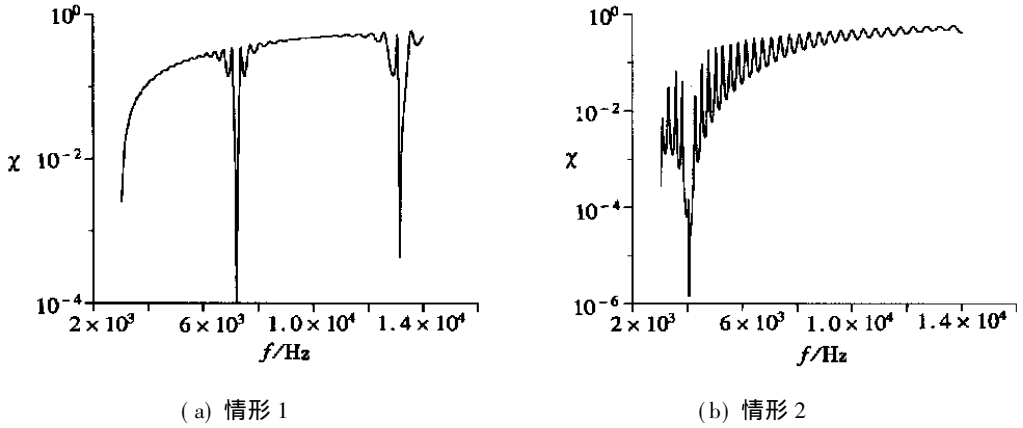


图 3 应变系数 χ 的频率响应

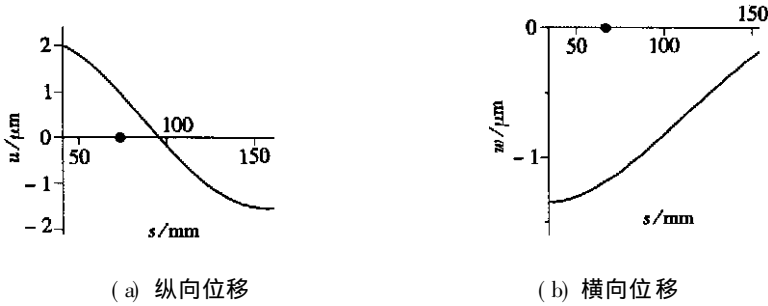


图 4 无弯曲效应的位移分布(情形 1, 7 217 Hz)

若含有横向位移 w 的边界条件, 在其它频段的薄壳强迫振动中也会同时存在薄膜运动和弯曲运动, 因而当受薄膜力激励时无弯曲效应现象也会发生. 但两者的机制显然不同: 高频段无弯曲效应决定于两个薄膜解满足所有薄膜边界条件和含横向位移 w 的边界条件. Frankort^[9] 在数值研究扬声器振动时, 发现了无弯曲效应. 但由于没有解析解, 他没能给出转点频段的无弯曲效应频率方程, 所得到的频率方程仅适用于高频段.

3.2 内部薄膜运动外部弯曲运动效应

在情形 1 中, 即薄壳小端受薄膜力驱动时, 当

$$\theta_b = n\pi, \tag{17}$$

(9) 式中位移成为:

$$\begin{cases} \text{当 } s^* < s \leq b: \\ w(s) = -\mathcal{H}H_w(s) \frac{F}{N_{6a}} \left[\frac{e^{\theta - \theta_b}}{\sqrt{2}} + \sin\left(\theta - \theta_b + \frac{\pi}{4}\right) \right], \\ u(s) = -\mathcal{E}H_u(s) \frac{F}{N_{6a}} \left[\frac{e^{\theta - \theta_b}}{\sqrt{2}} - \cos\left(\theta - \theta_b + \frac{\pi}{4}\right) \right], \\ \text{当 } a \leq s < s^*: \\ w(s) = -\frac{F}{N_{6a}}w_6, \quad u(s) = -\frac{F}{N_{6a}}u_6, \end{cases} \tag{18}$$

此时, 在转点内部是完全的薄膜运动, 而在外部是纯粹的弯曲运动. 该现象显然是转点频段特有的. 频率方程 (17) 仅决定于大端的弯曲边界条件, 并由下式导出

$$Q_{3b}M_{4b} = Q_{4b}M_{3b}, \tag{19}$$

对任意的大端弯曲边界条件组合, 形如 (19) 式的频率方程可直接得出.

该效应在情形 3 也能发生. 当

$$N_{6a} = 0, \tag{20}$$

(11) 式中位移成为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{当 } s^* < s \leq b: \\ w(s) = -\frac{\mathcal{E}^2 m / (\sqrt{2b_{2b}})}{\sin \theta_b H_{wb}} H_w(s) \left[e^{-\theta_b} \cos \left(\theta_b + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right], \\ u(s) = -\frac{\mathcal{E}^2 m / (\sqrt{2b_{2b}})}{\sin \theta_b H_{wb}} H_u(s) \left[e^{-\theta_b} \cos \left(\theta_b + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right], \\ \text{当 } a \leq s < s^*: \\ w(s) = -\frac{\mathcal{E}^2 m / \sqrt{2b_{2b}}}{\sin \theta_b H_{wb}} w_6, \quad u(s) = -\frac{\mathcal{E}^2 m / \sqrt{2b_{2b}}}{\sin \theta_b H_{wb}} u_6. \end{array} \right. \tag{21}$$

大端受任意弯曲激励, 该效应的频率方程均可直接由小端薄膜边界条件直接得出: 对薄膜自由边界条件为 $N_{6a} = 0$; 对薄膜夹紧边界条件为 $u_{6a} = 0$.

计算得到的上述两种情形的内部薄膜运动外部弯曲运动效应示于图 5 和图 6. 对本文选取的薄壳, 由于 θ_b 的快变特性, 情形 1 包含了多达 34 个频率, 图 5 示出了其中第 8 个频率的位移. 对照图 2, 现在这些位移 (特别是 u) 的特征是它们基本上关于横轴对称. 图 5 和图 6 清楚地表明了在这些频率, 薄壳起着天然的纵波—横波转换器的作用. 图中黑点表示转点位置.

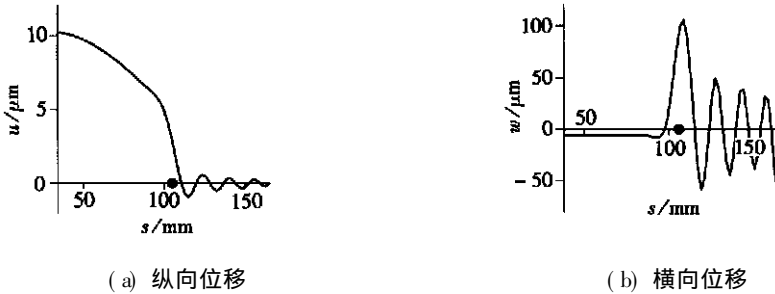


图 5 内部薄膜运动外部弯曲运动效应的位移分布(情形 1, 4 770. 5 Hz)

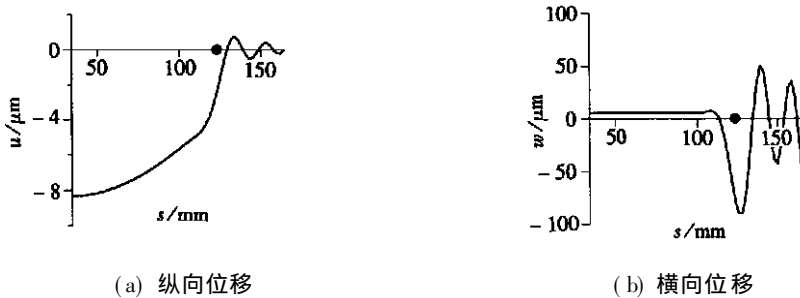


图 6 内部薄膜运动外部弯曲运动效应的位移分布(情形 3, 4 052 Hz)

3.3 内部静止效应

对情形 2, 当

$$\theta_b = n\pi, \tag{22}$$

(10) 式中位移成为:

$$\begin{cases} \text{当 } s^* < s \leq b: \\ w(s) = -\frac{F}{N_{6b}} \left\{ \frac{H_w(s)}{\cos \theta_b} \left[\frac{e^{-\theta_b}}{\sqrt{2}} + \sin \left(\theta - \theta_b + \frac{\pi}{4} \right) \right] + w_6 \right\}, \\ u(s) = -\frac{F}{N_{6b}} \left\{ \frac{\mathcal{E}\mathcal{H}u(s)}{\cos \theta_b} \left[\frac{e^{-\theta_b}}{\sqrt{2}} - \cos \left(\theta - \theta_b + \frac{\pi}{4} \right) \right] + u_6 \right\}, \\ \text{当 } a \leq s < s^*: \\ w(s) = 0, u(s) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

对情形 3, 当

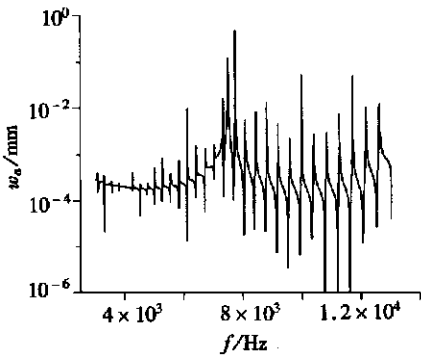
$$N_{6b} = 0, \tag{24}$$

位移(11)式变成

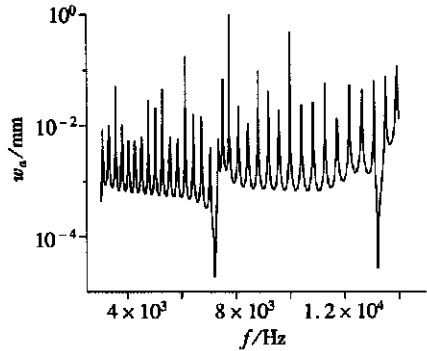
$$\begin{cases} \text{当 } s^* < s \leq b: \\ w(s) = -\frac{\mathcal{E}^2 m / \sqrt{2b_2b}}{A_5 \sin \theta_b} \left\{ H_w(s) \left[e^{-\theta_b} \cos \left(\theta_b + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] - w_6 \right\}, \\ u(s) = -\frac{\mathcal{E}^2 m / \sqrt{2b_2b}}{A_5 \sin \theta_b} \left\{ \mathcal{H}u(s) \left[e^{-\theta_b} \cos \left(\theta_b + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] - u_6 \right\}, \\ \text{当 } a \leq s < s^*: \\ w(s) = 0, u(s) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

位移表达式(23)和位移表达式(25)中, 内部位移为 0 表示它们比外部位移小 1 个量级. 这些位移表达式表明, 当薄壳大端单独受薄膜或弯曲激励时, 在某些特定频率薄壳转点内部保持为静止. 显然, 这又是转点频段强迫振动的一个特有现象.

上述两种情形的小端横向位移的频率特征示于图 7. 图中相当尖锐的谷即为内部静止效应. 同样由于 θ_b 的快变特性, 图 7(a) 的谷排列得非常紧密. 图 8 示出了情形 2 中第 8 个频率的位移; 图 9 则示出了情形 3 中第 1 个频率的位移. 图 8 和图 9 中黑点表示转点位置. 在这些频率转点起着内边界的作用: 纵波完全被转点反射回去.



(a) 情形 2



(b) 情形 3

图 7 锥壳小端横向位移的频率特征

总结起来, 薄壳小端受薄膜力激励时, 会发生无弯曲效应和内部薄膜运动外部弯曲运动效应; 薄壳大端受薄膜力激励时, 会发生无弯曲效应和内部静止效应; 薄壳大端受弯矩激励, 则出

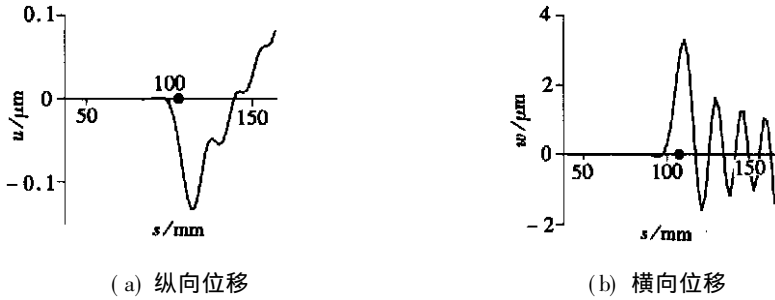


图 8 内部静止效应的位移分布(情形 2, 4 770 Hz)

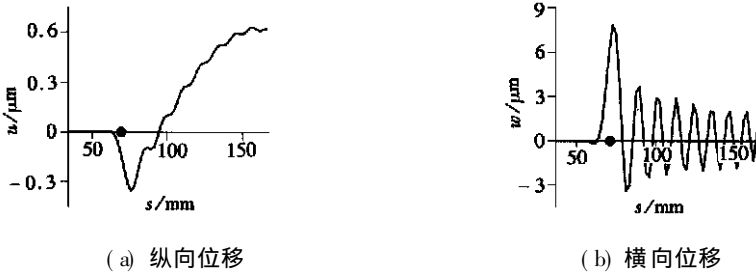


图 9 内部静止效应的位移分布(情形 3, 7 217 Hz)

现内部薄膜运动外部弯曲运动效应和内部静止效应。

另外,注意到无弯曲效应和内部薄膜运动外部弯曲运动效应的频率方程得自于非驱动端的边界条件,而内部静止效应的频率方程得自于驱动端的不同类型的的边界条件,即薄膜力驱动则得自于齐次弯曲边界条件,弯矩驱动则得自于齐次薄膜边界条件。因此,对边缘位移驱动,频率方程将保持不变。

4 结 论

转点和转点频段是旋转薄壳特有的现象,在此频段,薄膜解可由弯曲解“生出”,反之亦然。因此无论由薄膜力还是由弯矩激发的薄壳振动均含有薄膜和弯曲运动。内部静止效应和内部薄膜运动外部弯曲运动效应是转点频段薄壳强迫振动所特有的效应;转点频段的无弯曲效应和其余频段的无弯曲效应的发生机制和频率方程不同。

所揭示出的 3 种效应的工程应用有待进一步研究:无弯曲效应频率已被证实是扬声器薄壳的高频截止频率^[10],另外薄壳无弯曲状态的实现可以充分利用材料性能;利用纵波和横波的波长和力阻抗的不同,内部薄膜运动外部弯曲运动效应或许可用于换能器;而内部静止效应或许可用于振动和噪声控制。

[参 考 文 献]

[1] Ross E W Jr. Transition solutions for axisymmetric shell vibrations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1966, 54(4): 335-35.

[2] 张志良,程昌钧. 旋转薄壳转点频段的轴对称振动解[J]. 固体力学学报, 1999, 27(2): 135-140.

[3] Zhang R J, Zhang W. Turning point solution for thin shell vibration[J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 27(10): 1311-1326.

[4] 张志良,程昌钧. 旋转薄壳转点频段的轴对称振动解[J]. 固体力学学报, 2006, 27(2): 135-140.

- [5] ZHANG Zhi-liang, CHENG Chang-jun. Natural frequencies and mode shapes for axisymmetric vibrations of shells in turning-point range[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43** (18/19): 5525-5540.
- [6] Hartung R F, Loden W A. Axisymmetric vibration of conical shells[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1970, **7**(10): 1153-1159.
- [7] ZHANG Zhi-liang, CHENG Chang-jun. Analytical solutions for axisymmetric vibration of loudspeaker cone in transitional range[J]. Available Online 22 September 2006. <http://www.science-direct.com> [2007-05-07].
- [8] Kalnins A. Effect of bending on vibrations of spherical shells[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, **36**(1): 74-81.
- [9] Frankort F J M. *Vibration and Sound Radiation of Loudspeaker Cones* [M]. Eindhoven: N V. Philips' Gloeilampenfabrieken, 1975.
- [10] ZHANG Zhi-liang, CHENG Chang-jun. Vibrations of loudspeaker cones in transitional range[J]. *Journal of the Audio Engineering Society*, 2006, **54**(7/8): 598-603.

Forced Vibration and Special Effects of Revolution Shells in Turning-Point Range

ZHANG Zhi-liang^{1,2}, CHENG Chang-jun¹

- (1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics;
Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;
2. Department of Physics, Zhejiang Normal University,
Jinhua, Zhejiang 321004, P. R. China)

Abstract: The forced vibration in the turning point frequency range of a truncated revolution shell subject to a membrane drive or a bending drive at its small end or large end was studied by applying the uniformly valid solutions obtained in a previous paper. The vibration in the turning point range shows a strong coupling between the membrane and bending solutions: either the membrane drive or the bending drive causes motions of both the membrane type and bending type. Three interesting effects characteristic of the forced vibration in the turning point range emerge from the coupling nature: the non-bending effect, the inner-quietent effect and the inner-membrane motion and outer-bending motion effect. These effects may have potential applications in engineering.

Key words: forced vibration; special effect; turning-point range; revolution shell