

异质预期条件下房价波动非线性 延滞差分方程*

梁以德, 徐佳娜, 崔 蕊

(香港城市大学 房屋与建筑系, 中国 香港)

(郭兴明推荐)

摘要: 通过建立蛛网模型分析经济变动对具有后向预期性质的房地产市场的价格波动的影响. 其中, 市场需求函数采用简单使用者成本模型, 而供给函数则以存量-流量模型为基础. 通过建立一组 n 阶延滞差分方程来分析一类异质后向预期房价波动模型的性质, 例如均衡或振荡, 收敛或偏离等. 结果显示需求弹性小于供给弹性并不是形成振荡的必要条件. 房价的波动会随着异质后向预期假设以及其他内生因素的不同而产生本质不同的变化.

关键词: 房价波动; 延滞差分方程; 均衡与振荡; 收敛与扩散

中图分类号: O241.84; O175.4 **文献标识码:** A

引 言

近年来, 资本市场的衰退使得更多的投资涌入房地产市场. 因此, 无论是研究者亦或实际从业者都对房价的波动给予了更多的关注. 中国近 10 年来的首次提升利率引起了住宅市场的极大关注, 其主要目的之一在于为出现过热迹象的房地产市场降温. 与此同时, 关于利率是否对房地产市场波动调节的有效方法产生了不同的声音.

Hanushek 和 Quigley (1979) 提出行为主体对经济因素变动的不同预期导致了房价的波动^[1]. 很多学者通过对历史数据的统计分析指出利率变动与房价波动之间的相关关系^[2-7]. 但是, 在完全理性预期的假设条件下, 并不会出现内生的市场波动周期^[8-9]. 因此, 正有越来越多的研究者关注有限理性假设, 通过应用学习模型来模拟行为主体的不同预期^[10]. 特别是房地产市场, 由于其自身所具有的生产周期长、产品价值高、供给具有明显滞后等特征, 使得研究者认识到房地产市场无法满足金融市场研究中通常采用的有效市场假设^[11]. 理性预期假设是由 Muth^[11] 提出的, 并成为传统经济理论中的基本预期范式. 但是, 与之相对, 市场中的行为主体是具有多重异质需求的. 一些文献也提及了房地产市场中行为主体的非完全理性以及主体需求的多样性^[12].

蛛网模型在经济理论研究中被广泛应用^[13-14]. 初始的蛛网模型采用单纯预期假设^[15-16], 随后 Nerlove^[17] 和 Brock 和 Hommes^[18-19] 分别引进了适应性预期模式和适应性预期系统对传统

* 收稿日期: 2005-11-02; 修订日期: 2007-02-17

作者简介: 梁以德, 男, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86-852-27887600; Fax: + 86-852-27889643; 27887612;

E-mail: andrew.leung@cityu.edu.hk).

蛛网模型在经济和金融市场的表现加以改进. 在此基础上, 本文尝试建立异质预期条件下蛛网模型, 分析经济因素变动对房价波动的影响. 具体而言, 市场需求函数采用简单使用者成本模型, 而供给函数则以存量-流量模型为基础. 此外, 本文进一步分析需求弹性, 供给弹性, 供给延滞以及折旧率等因素的变化对模型的影响.

文献中对具有 $x_{n+1} = (\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-k}) / (A + Bx_n + Cx_{n-k})$ 形式的差分方程的稳定性加以广泛分析. Kulenovic 和 Ladas^[20] 研究了当 $k = 1$, 即具有上述形式的二阶差分方程解的边界, 全局稳定性和周期性的问题. 特别地, 当不存在时间延滞, 也就是说当 $k = 0$ 时, 具有该形式及其衍生形式的差分方程被广泛的应用于人口模型的研究^[21-23]. 但是, 在房地产市场中由于较长的生产周期, 供给的延滞是非常重要的因素. 因此, 引入时间延滞对于研究房价波动是非常必要的, 也就是说房价波动研究中差分方程的延滞项大于 0, 即 $k > 0$. 本研究通过一组 n 阶非线性延滞差分方程研究房价波动的性质, 其具体形式取决于市场行为主体的异质预期方式. 差分方程解的稳定性揭示了房价波动的性质, 例如均衡与振荡, 单调骤升与单调骤减, 以及收敛与偏离等.

本文的结构如下: 第 1 节探讨房地产市场中异质预期的识别以及基于蛛网模型的房价波动模型的建立. 第 2 节分析房价波动模型的均衡和局部稳定条件. 第 3 节通过对模型的模拟研究分析需求弹性、供给弹性、供给延滞以及折旧率等因素的变动使得房价波动所表现出的动态性特征. 最后, 本文将给出相应的研究结论.

1 房价波动模型的建立

传统蛛网模型采用单纯预期假设^[15-16], 认为当前的预期价格等于前期的实际价格. Nerlove^[17] 首先将适应预期引入蛛网模型, 假设当前的预期价格等于前期的实际价格与预期价格的加权平均. Brock 和 Hommes^[18-19] 建立起适应预期系统, 认为行为人是有限理性的, 而且可以根据演化的适应标准来选择他们的交易策略. 本文在蛛网模型的基础上, 分析异质后向预期假设下, 经济因素变动对房价波动的影响.

1.1 住宅市场蛛网模型的建立

蛛网模型是经济学研究中最简单的模型之一^[24]. Kaldor^[15] 利用以下 3 个方程对此加以说明: 1) $D_t = d(p_t)$; 2) $S_t = s(\hat{p}_t)$; 和 3) $D_t = S_t$. 其中, D_t 表示需求量, S_t 表示供给量, p_t 是 t 时刻的实际价格, 而 \hat{p}_t 则是 t 时刻的预期价格. 为了简化分析, 房价波动模型中的需求曲线采用具体的函数形式, 即假设需求量是某个外生经济变量和 t 时刻实际价格的比例函数. 因此, 住宅市场的需求函数可以表示为

$$D_t = \alpha_1 \frac{1}{U_t} p_t^{-\beta_1}, \quad (1)$$

其中, U_t 是住宅所有者的税后成本^[25-26], β_1 是需求弹性系数, α_1 是常系数.

$$U_t = (1 - T_t) \times i_t, \quad (2)$$

公式(2)中, T 是所得税率, i 是名义利率, 其 t 时刻的值以常量表示, 即 $i_t = i$, $T_t = T$. 住宅市场的需求函数通常采用存量-流量模型^[8], 即

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = (1 - \delta) + \frac{C_{t-n}}{S_{t-1}}, \quad (3)$$

其中, δ 是折旧率, C_{t-n} 是 t 时刻新的供给量. 而其中对供给的延滞 n 的考虑是由于住宅市场

产品生产周期长的特征决定的。因此, t 时刻所能够提供交付的供给量取决于 n 个周期之前决策者对 t 时刻价格的预期与判断, 公式(4) 给出了具体的表述形式

$$\frac{C_{t-n}}{S_{t-1}} = \alpha_2 \hat{p}_{t^2}^{\beta_2} \tag{4}$$

其中, \hat{p}_t 是行为人在 $t-n$ 时刻所预期的 t 时刻的价格, β_2 是供给弹性系数, α_2 是常系数。

1.2 异质后向预期

当 $D_t = S_t$ 时, 一组延滞差分方程可以用来描述住宅市场中预期价格的波动。方程的具体形式取决于行为人的异质预期方式。由于 t 时刻的供给量取决于行为主体在 $t-n$ 时刻对 t 时刻价格的预期, 那么显然异质的预期方式会影响市场价格的波动。这一部分内容将侧重分析两类不同的后向预期方式对价格波动的影响, 包括简单后向预期(即假设 t 时刻的预期价格是历史实际价格的线性函数)和适应预期(即假设 t 时刻的预期价格是历史实际价格与历史预期价格的调整), 在考虑历史实际价格对未来价格影响的同时, 也考虑行为人原有预期方式或者思维方式的惯性对未来价格预期的影响。

首先, 在第一类预期方式下, 假设 t 时刻预期价格遵循简单线性交易原则, 即

$$\hat{p}_t = gp_{t-n} + h \tag{5}$$

尽管线性后向预期法则形式上很简单, 但是却适合在房地产市场的应用研究^[10]。考虑到房地产市场供给的延滞特征, 本文主要采用 3 种以 $t-n$ 时刻的实际价格数据为依据的预期方式。

单纯预期

传统蛛网模型是以单纯预期为基础的, 可以表述为交付时刻 t 的预期价格等于决策时刻 $t-n$ 的实际价格, 即 $\hat{p}_t = p_{t-n}$ 。因此, 单纯预期条件下房价波动模型为

$$\left(\frac{\hat{p}_{t-n}}{\hat{p}_{t-n-1}} \right)^{-\beta_1} = (1-\delta) + \alpha_2 \hat{p}_{t^2}^{\beta_2} \tag{6}$$

偏好预期

经济学理论认为市场的行为主体对风险和收益有着不同的偏好, 通常包括风险喜好、风险中性以及风险厌恶型。偏好预期可以表述为

$$\hat{p}_t = p_{t-n} + h \tag{7}$$

其中, h 是偏好系数。如果行为主体对价格的预期具有持续的乐观偏好, 则 $h > 0$; 相反, 如果行为主体持有悲观偏好, 则 $h < 0$ 。特别地, 当 $h = 0$ 时, 偏好预期将会简化为传统的单纯预期。偏好预期条件下房价波动模型可以描述为

$$\left(\frac{\hat{p}_{t-n} - h}{\hat{p}_{t-n-1} - h} \right)^{-\beta_1} = (1-\delta) + \alpha_2 \hat{p}_{t^2}^{\beta_2} \tag{8}$$

趋势预期

趋势跟随现象或者说“羊群效应”是有限理性研究中一个比较典型的例子, 其表达形式如下

$$\hat{p}_t = p_{t-n} + g \times (p_{t-n} - \hat{p}^*) \tag{9}$$

其中, g 是趋势变化比率系数, \hat{p}^* 为需求等于供给时的均衡价格。公式(9) 表明行为主体对 t 时刻价格的预期受到前期价格变化趋势的影响。换句话说, 当决策期价格高于均衡价格时, 行为主体认为预期价格的上升趋势将会继续, 因此 t 期的价格将会是实际价格高于均衡价格程度的比例函数; 相反, 当决策期价格低于均衡价格时, 行为主体认为预期价格的下降趋势将

会继续, 那么相应地 t 期的价格将会是实际价格低于均衡价格程度的比例函数. 趋势预期条件下, 房价波动模型为

$$\left(\frac{\hat{p}_{t+n} - g \times \hat{p}^*}{\hat{p}_{t+n-1} - g \times \hat{p}^*} \right)^{-\beta_1} = (1 - \delta) + \alpha_2 \times \hat{p}_{t-1}^{\beta_2}. \quad (10)$$

当公式(8)或者公式(10)中的一些参数取特定值时, 例如当 $h = 0$ 或者 $g = 0$ 时, 偏好预期和趋势预期模型将会转变成单纯预期模型. 因此, 在模拟过程中, 上述3种基于后向线性预期方式的模型应该显示相似的性质, 只是数量程度上的不同.

调整预期

调整预期是另外一种非常重要的后向预期方式. 与上述3种以历史实际价格为基础的预期方式不同, 调整预期在考虑历史实际价格的同时, 也考虑历史预期价格的影响, 也就是说考虑到原有预期方式的影响, 即

$$\hat{p}_t = \omega p_{t-n} + (1 - \omega) \hat{p}_{t-n}, \quad 0 \leq \omega \leq 1. \quad (11)$$

公式(11)表明交付时刻 t 的预期价格是决策期 $t - n$ 时的实际价格与预期价格的加权平均数, 其权重为 ω . 当 $\omega = 1$ 时, 即完全不考虑原有预期价格的影响时, 调整预期模型简化为单纯预期. 相应地, 当 $\omega = 0$ 时, 则 $\hat{p}_t = \hat{p}_{t-n}$, 即交付时刻 t 的预期价格等于决策时刻 $t - n$ 的预期价格. 公式(11)可以改写成如下形式:

$$\hat{p}_t = \hat{p}_{t-n} + \omega(p_{t-n} - \hat{p}_{t-n}), \quad 0 \leq \omega \leq 1, \quad (12)$$

公式(12)表明, 交付时刻 t 的预期价格是对决策时刻 $t - n$ 时预期价格的调整与纠正, 而调整的程度则取决于系数 ω 的大小. 调整预期条件下, 房价波动模型为

$$\left(\frac{\hat{p}_{t+n} - (1 - \omega) \hat{p}_t}{\hat{p}_{t+n-1} - (1 - \omega) \hat{p}_{t-1}} \right)^{-\beta_1} = (1 - \delta) + \alpha_2 \hat{p}_{t-1}^{\beta_2}. \quad (13)$$

2 房价波动模型的均衡分析

假设 \hat{p}^* 是满足 $f(\hat{p}_t) = \hat{p}_t = \hat{p}^*$ 稳定条件的均衡点, 因此

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = 1, \quad \hat{p}^* = \left[\frac{\delta}{\alpha_2} \right]^{1/\beta_2}. \quad (14)$$

在房地产市场波动研究中, 振荡可以定义为受到不可预期经济变动后价格对其均衡状态的偏离. 如果价格曲线仅仅达到稳定状态一次, 那么定义为单调骤升或者单调骤降. 如果价格曲线不断重复从稳定到偏离再回归稳定的过程, 则定义为周期. 此外, 如果价格曲线相对稳定状态的偏离程度逐渐缩小, 逐渐逼近稳定状态, 则称为收敛. 相反, 如果价格曲线相对稳定状态的偏离程度逐渐扩大并逐步远离稳定状态, 则定义为扩散.

对房价波动模型稳定性的分析将分成两个部分, 首先分析需求弹性和供给弹性相等并同时为1时的状况; 然后, 进一步探讨当需求弹性和供给弹性并不相等时候的情况.

案1 需求弹性和供给弹性同时等于1

1) 单纯预期——Pielou 方程

当假设需求弹性和供给弹性同时等于1, 即 $\beta_1 = 1, \beta_2 = 1$ 时, 则单纯预期条件下房价波动模型为

$$\hat{p}_{t+1} = \frac{a \hat{p}_t}{1 + b \hat{p}_{t-k}}, \quad (15)$$

其中, $a = 1/(1 - \delta)$, $b = \alpha_2/(1 - \delta)$, $k = n - 1$. 如果公式(15)满足 $a \in (1, \infty)$ 、 $b \in (0,$

∞) 和 $n \in \mathbf{Z} = \{0, 1, 2, \dots\}$, 将成为 Pielou 方程^[27], 一类离散延滞 logistic 方程. Kuruklis 和 Ladas^[28] 证明方程 (15) 的每一个正值解在其正向均衡点 $(a - 1)/b$ 附近振荡, 当且仅当满足

$$\frac{a - 1}{a} > \frac{k^k}{(k + 1)^{k+1}}. \tag{16}$$

特别地, 当 $k = 1$ 时, 差分方程的每一个解将会收敛到正向均衡解^[29].

命题 1 假设需求弹性系数与供给弹性系数同时为 1 的时候, 如果房地产市场中供给延滞为 1, 则单纯预期条件下房价波动将会收敛到均衡价格, 而单调骤升与单调骤降都不会产生.

当供给延滞大于 1, 即 $k > 1$, 则单纯预期房价波动模型将围绕均衡点 $p^* = \delta/\alpha_2$ 振荡, 当且仅当

$$\frac{1/(1 - \delta) - 1}{1/(1 - \delta)} > \frac{(n - 1)^{n-1}}{n^n}, \quad \delta > \frac{(n - 1)^{n-1}}{n^n}, \tag{17}$$

命题 2 当需求弹性系数与供给弹性系数同时为 1 时, 房价波动模型的稳定性取决于模型参数折旧率与供给延滞的值.

这说明需求弹性系数小于供给弹性系数并不是出现振荡的必要条件, 这与 Wheaton 的结论不一致^[8]. 本文研究表明, 即使需求弹性系数与供给弹性系数相等, 当供给延滞足够大时, 振荡仍然会出现.

2) 偏好预期与趋势预期

如公式 (8) 和公式 (10) 所示, 尽管偏好预期与趋势预期在经济含义和主体行为方面都不尽相同, 但二者的房价波动模型在形式上具有相似性, 认为交付期的预期价格是对历史实际价格的线性组合. 公式 (8) 和公式 (10) 可以被改写为

$$\hat{p}_{t+n} = \frac{\hat{p}_{t+n-1} - \Delta}{[(1 - \delta) + \alpha_2 \hat{p}_{t-1}^{1/\beta_1}]^{1/\beta_1}} + \Delta. \tag{18}$$

当需求弹性系数 β_1 和供给弹性系数 β_2 同时等于 1 时, 房价波动模型具有如下形式:

$$\hat{p}_{t+1} = \frac{\hat{p}_t - \Delta}{(1 - \delta) + \alpha_2 \hat{p}_{t-k}} + \Delta. \tag{19}$$

当供给延滞 $k = 1$ 时, 公式 (19) 简化为

$$\hat{p}_{t+1} = \frac{\hat{p}_t + \Delta \alpha_2 \hat{p}_{t-1} - \delta \Delta}{(1 - \delta) + \alpha_2 \hat{p}_{t-1}}. \tag{20}$$

通过变量换算 $\hat{p}_t = (1 - \delta)x_t/\alpha_2$, 公式 (20) 可以表述为

$$x_{t+1} = \left[\frac{1}{1 - \delta} x_t + \frac{\Delta \alpha_2}{1 - \delta} x_{t-1} - \frac{\Delta \alpha_2 \delta}{(1 - \delta)^2} \right] \bigg/ (1 + x_{t-1}). \tag{21}$$

因为均衡点满足 $f(x^*, x^*) = x^*$, 则

$$x^* = \left\{ \left[\frac{1}{1 - \delta} + \frac{h \alpha_2}{1 - \delta} - 1 \right] + \sqrt{\left[\frac{1}{1 - \delta} + \frac{h \alpha_2}{1 - \delta} - 1 \right]^2 + 4 \left[-\frac{h \alpha_2 \delta}{(1 - \delta)^2} \right]} \right\} \bigg/ 2. \tag{22}$$

对公式 (21) 在其均衡点进行线性化转换

$$y_{t+1} - \frac{1/(1 - \delta)}{1 + x^*} y_t + \left\{ \left[-\frac{\Delta \alpha_2 \delta}{(1 - \delta)^2} - \frac{\Delta \alpha_2}{1 - \delta} + \frac{1}{1 - \delta} x^* \right] \bigg/ (1 + x^*)^2 \right\} y_{t-1} = 0. \tag{23}$$

线性稳定性定理^[30] 如果二次方程 $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ 的两个根均在开区间单位圆 $|\lambda| <$

1 内, 那么方程 $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), n = 0, 1, \dots$ 的均衡点 x^* 是局部渐进稳定的.

应用线性稳定性定理, Kulenovic 和 Ladas 证明对于所有参数, 方程 $x_{n+1} = (p + qx_n + rx_{n-1})/(1 + x_{n-1}), n = 0, 1, \dots$ 的均衡点 x^* 是局部渐进稳定的.

命题 3 当需求弹性系数与供给弹性系数同时为 1 时, 如果满足条件供给延滞为 1, 则经济因素的变动的的影响并不会使偏好预期与趋势预期房价波动模型产生振荡.

当供给延滞大于 1 时, 即 $k > 1$, 令 $\hat{p}_t = ((1 - \delta)/\alpha_2)x_t$, 则公式(18)可以写成

$$x_{t+1} = \left[\frac{1}{1 - \delta} x_t + \frac{h\alpha_2}{1 - \delta} x_{t-k} - \frac{h\alpha_2 \delta}{(1 - \delta)^2} \right] \bigg/ (1 + x_{t-k}). \quad (24)$$

对公式(24)在其均衡点 x^* 进行线性化

$$\begin{cases} y_{t+1} - \frac{1/(1 - \delta)}{1 + x^*} y_t + \left\{ \left[-\frac{h\alpha_2 \delta}{(1 - \delta)^2} - \frac{h\alpha_2}{1 - \delta} + \frac{1}{1 - \delta} x^* \right] \bigg/ (1 + x^*)^2 \right\} y_{t-k} = 0, \\ y_{t+1} - P y_t + Q y_{t-k} = 0. \end{cases} \quad (25)$$

定理 1^[31] 设 P 和 Q 为任意实数, k 为正整数, 则 $|P| + |Q| < 1$ 是差分方程(25)渐进稳定的充分条件.

因此, 当需求弹性系数与供给弹性系数同时为 1, 供给延滞大于 1, 如果满足公式(26), 则偏好预期与趋势预期房价波动模型的解是渐进稳定的.

$$\left| -\frac{1/(1 - \delta)}{1 + x^*} \right| + \left| \left[-\frac{h\alpha_2 \delta}{(1 - \delta)^2} - \frac{h\alpha_2}{1 - \delta} + \frac{1}{1 - \delta} x^* \right] \bigg/ (1 + x^*)^2 \right| < 1. \quad (26)$$

考虑方程(24)的均衡点 x^*

$$x^* = \frac{\left\{ \left[\frac{1}{1 - \delta} + \frac{h\alpha_2}{1 - \delta} - 1 \right] + \sqrt{\left[\frac{1}{1 - \delta} + \frac{h\alpha_2}{1 - \delta} - 1 \right]^2 + 4 \left[-\frac{h\alpha_2 \delta}{(1 - \delta)^2} \right]} \right\} \bigg/ 2}{\frac{(h\alpha_2 + \delta) + |h\alpha_2 - \delta|}{2(1 - \delta)}}. \quad (27)$$

住宅市场中, 折旧率满足 $0 \leq \delta \leq 1$. 如果 $h\alpha_2 > \delta$, 则 $x^* = h\alpha_2/(1 - \delta)$. 不等式(26)的左边项等于 $1/(1 - \delta + h\alpha_2)$. 由于 $h\alpha_2 > \delta$, 则 $h\alpha_2 - \delta > 0$, 所以 $1 - \delta + h\alpha_2 > 1$. 根据前述定理, 方程(26)的解是渐进稳定的. 如果 $h\alpha_2 > \delta$ 而且 $x^* = \delta/(1 - \delta)$, 则不等式(26)的左边项等于 $1/(1 + \delta - h\alpha_2)$. 由于定理假设 $h\alpha_2 > \delta$, 即 $1/(1 + \delta - h\alpha_2) > 1$, 因此渐进稳定的条件无法满足.

命题 4 当需求弹性系数与供给弹性系数同时为 1 时, 如果满足条件供给延滞大于 1, 则偏好预期与趋势预期房价波动模型的稳定性, 取决于行为人有限理性预期的程度和折旧率的值.

案 2 需求弹性与供给弹性不相等

1) 单纯预期

当需求弹性系数与供给弹性系数不同时等于 1 时, 单纯预期房价波动模型为

$$(\hat{p}_{t+n})^{\beta_1} = \frac{(\hat{p}_{t+n-1})^{\beta_1}}{(1 - \delta) + \alpha_2 \rho^{\beta_2}}, \quad (28)$$

令 $x_t = (\hat{p}_{t+n})^{\beta_1}$, 则公式(28)等价于

$$x_t = \frac{x_{t-1}}{(1 - \delta) + \alpha_2 (x_{t-n})^{\beta_2/\beta_1}} = \frac{x_{t-1}/(1 - \delta)}{1 + [\alpha_2/(1 - \delta)](x_{t-n})^{\beta_2/\beta_1}}. \quad (29)$$

Milton 和 Belair^[22] 将具有 $x_{t+1} = \alpha_n + \beta x_t / (1 + (x_t)^\gamma)$ 形式的非延滞差分方程作为北 Wisconsin 人口模型. Ladas 在此基础上将非 0 的延滞系数 k 引入模型中. Graef 等人^[23] 进一步分析了差分方程 $x_{t+1} = \alpha_n + \beta x_t / (1 + (x_{t-k})^\gamma)$ 的局部稳定和全局稳定条件. 根据上述分析, 具有后向预期方式的房价波动模型可以被描述为 n 阶延滞差分方程 $x_{t+1} = \beta x_t / (1 + \mu(x_{t-k})^\gamma)$, 其均衡点为 $x^* = ((\beta - 1) / \mu)^{1/\gamma}$. 在 x^* 对一般形式的房价波动模型线性化, 得到

$$x_{t+1} - x_t + \frac{\gamma(\beta - 1)}{\beta} x_{t-k} = 0. \tag{30}$$

根据线性化稳定性定理, 房价波动模型在均衡点 x^* 是局部渐进稳定的, 如果方程(30) 的平凡解 $q \in (-\infty, +\infty)$ 是渐进稳定的. 根据 Levin 和 May^[32], 方程 $y_{t+1} + y_t + qy_{t-k} = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) 的平凡解是渐进稳定的, 当且仅当 $0 < q < 2\cos(k\pi/(2k+1))$, $k \in \{0, 1, \dots\}$. 如果 $\gamma < (2\beta/(\beta-1))\cos(k\pi/(2k+1))$, 则 x^* 是局部渐进稳定的.

命题 5 当房地产市场供给弹性大于需求弹性时, 如果满足条件 $\beta_2/\beta_1 < (2/(1+\delta))\cos(k\pi/(2k+1))$, 单纯预期房价波动模型的均衡点 x^* 是局部渐进稳定的.

2) 偏好预期与趋势预期

在偏好预期与趋势预期条件下, 房价波动模型的一般形式如下:

$$\hat{p}_{t+n} = \frac{\hat{p}_{t+n-1} - h}{[(1-\delta) + \alpha_2 \hat{p}_{t-1}^{1/\beta_1}] + h}, \tag{31}$$

均衡点满足 $f(\hat{p}^*, \hat{p}^*) = \hat{p}^*$, 所以 $\hat{p}^* = (\delta/\alpha_2)^{\beta_1}$. 其在均衡点 \hat{p}^* 的线性化形式为

$$\hat{p}_{t+1} - \hat{p}_t + \frac{\beta_2}{\beta_1} \delta \left[1 - \frac{h}{\hat{p}^*} \right] \hat{p}_{t-k} = 0. \tag{32}$$

命题 6 当房地产市场供给弹性大于需求弹性时, 如果满足条件 $0 < (\beta_2/\beta_1)\delta(1-h/\hat{p}^*) < 2\cos(k\pi/(2k+1))$, 偏好预期和趋势预期房价波动模型的均衡点 \hat{p}^* 是局部渐进稳定的.

由上述分析可以看出, 房价波动模型的稳定性不仅取决于需求弹性和供给弹性, 而且受到其他因素的影响, 如供给延滞和折旧率等. 显然, 当供给延滞相当大的时候, 不同的预期方式, 如单纯预期、偏好预期和趋势预期对房价的波动产生不同影响, 它们仍具有一些相似的特征. 例如, 如果供给延滞很小, 当需求弹性小于供给弹性时, 房地产市场的振荡将不会产生.

案 3 调整预期

与上述的预期方式不同, 调整预期是建立在对历史实际价格与历史预期价格的修正的基础之上的. 调整预期的房价波动模型可以被描述为

$$\hat{p}_{t+1} = \frac{\hat{p}_t - (1-\omega)\hat{p}_{t-(k+1)}}{(1-\delta) + \alpha_2 \hat{p}_{t-k}} + (1-\omega)\hat{p}_{t-k}. \tag{33}$$

其均衡点是 $\hat{p}^* = \delta/\alpha_2$. 当需求弹性系数 $\beta_1 = 1$ 和供给弹性系数 $\beta_2 = 1$, 公式(33) 在均衡点的线性化表达式为

$$\hat{p}_{t+1} = \hat{p}_t + (1-\omega-\omega\delta)\hat{p}_{t-k} - (1-\omega)\hat{p}_{t-(k+1)}. \tag{34}$$

当需求弹性系数与供给弹性系数不同时等于 1 时, 在其均衡点 $\hat{p}^* = (\delta/\alpha_2)^{1/\beta_2}$ 的线性化方程为

$$\hat{p}_{t+1} = \hat{p}_t + \left[1 - \omega - \frac{\beta_2}{\beta_1} \omega \delta \right] \hat{p}_{t-k} - (1-\omega)\hat{p}_{t-(k+1)}. \tag{35}$$

方程(35) 可以简化为

$$x_{t+1} - x_t = qx_{t-m} - px_{t-n}, \tag{36}$$

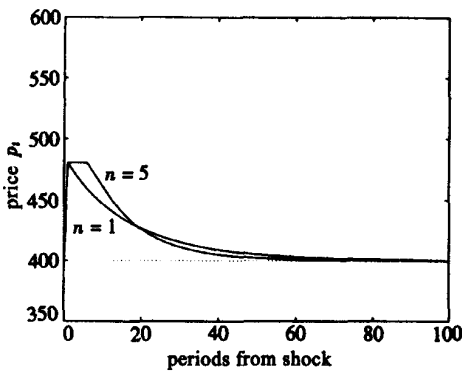
调整预期房价波动模型中参数满足, $q = 1 - \omega - (\beta_2/\beta_1)\omega\delta$, $p = 1 - \omega$, $m = k$ 和 $n = k + 1$.

定理 2^[33-34] 如果参数 p, q 是正实数, 而且 m, n 是大于等于 1 的整数, 在 $0 < p < n^n/(n + 1)^{n+1}$ 的条件下, 方程(36) 的零解是渐进稳定的, 当且仅当 $q - p < 0$.

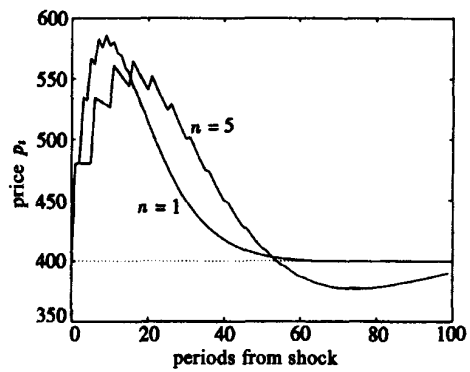
定理 3^[35] 如果 p, q 是负实数, 而且 m, n 是大于等于 1 的整数, 方程 $x_{t+1} = \alpha_0 x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_k x_{t-k}$ 的 0 解是渐价稳定的, 如果对于所有 $i = 1, 2, \dots, k$ 满足条件 $\alpha_i < 0$ 而且满足下列两个条件之一

$$(C1) \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \leq \alpha_0 \leq 1 \text{ 和 } 0 < k \sum_{i=1}^k |\alpha_i| < 1;$$

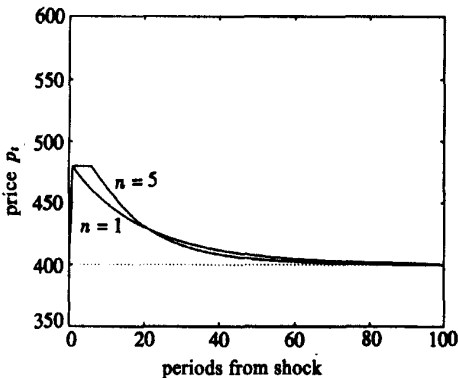
$$(C2) 1 < \alpha_0 < 1 + \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \text{ 和 } k \sum_{i=1}^k |\alpha_i| < \frac{1 - \alpha_0 + \sum_{i=1}^k |\alpha_i|}{-1 + \alpha_0 + \sum_{i=1}^k |\alpha_i|}.$$



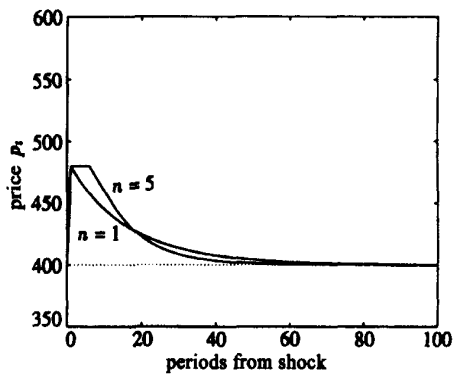
(a) 单纯预期房价波动



(b) 调整预期房价波动



(c) 偏好预期房价波动

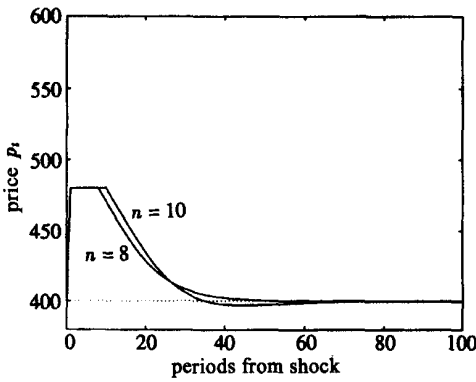


(d) 趋势预期房价波动

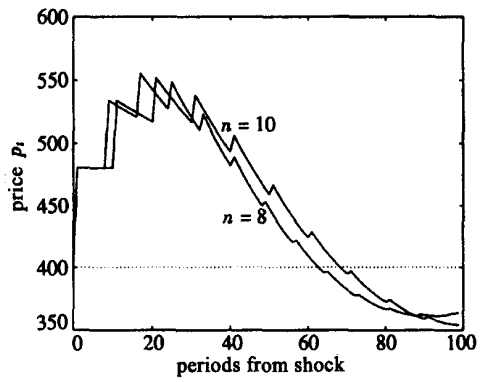
图 1 异质预期房价波动(当参数设定为: 供给延滞 $n = 1$ 和 5 ; 折旧率 $\delta = 0.05$; 需求弹性 $\beta_1 = 1$; 供给弹性 $\beta_2 = 1$)

命题 7 当房地产市场供给弹性大于需求弹性时, 调整预期房价波动模型的稳定性取决于以下条件: 对于 $0 < 1 - \omega < (k + 1)^{k+1}/(k + 1)^{k+2}$, 如果 $1 - \omega - (\beta_2/\beta_1)\omega\delta > 0$, $0 < 1 - \omega < (k + 1)^{k+1}/(k + 1)^{k+2}$, 系统的解是渐进稳定的. 对于 $0 < (\beta_2/\beta_1)\omega\delta \leq 1$, $0 < (\beta_2/\beta_1)k\delta$

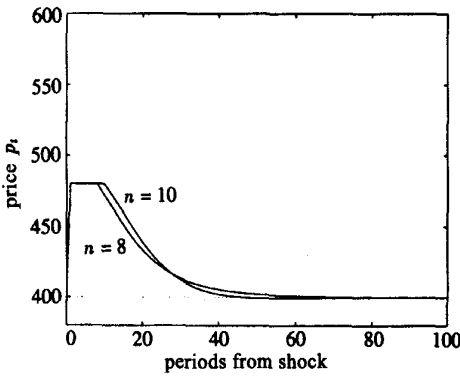
< 1 和 $1/(1 - (\beta_2/\beta_1) \delta) > \omega > 1/(1 + (\beta_2/\beta_1) \delta)$, 如果 $1 - \omega - (\beta_2/\beta_1) \omega \delta > 0$, 则系统是稳定的.



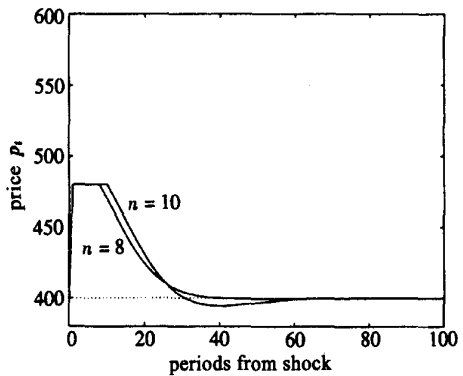
(a) 单纯预期房价波动



(b) 调整预期房价波动



(c) 偏好预期房价波动



(d) 趋势预期房价波动

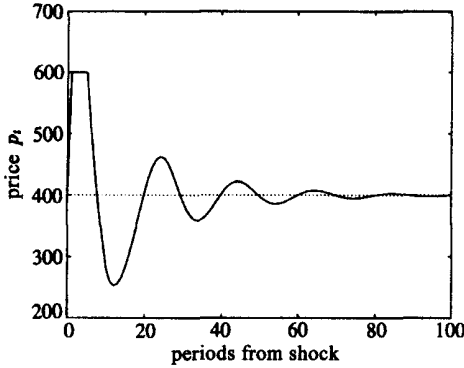
图2 供给延滞对异质预期房价波动的影响(其他参数设定为: 折旧率 $\delta = 0.05$; 需求弹性 $\beta_1 = 1$; 供给弹性 $\beta_2 = 1$)

3 模型仿真

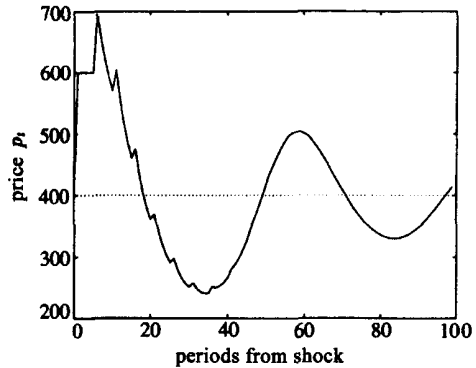
这一节的目的是, 在于模拟分析异质预期房价波动模型的动态特征, 包括参数需求弹性系数 β_1 , 供给弹性系数 β_2 , 供给延滞 n 以及折旧率 δ 变化产生的影响. 其他的参数设定为 $\rho^* = \$ 400/\text{ft}^2$ ($1\text{ft} = 0.092903 \text{ m}^2$) 和 $i = 5\%$. 首先, 为了与 Wheaton^[8] 的结论作比较, 需求弹性系数与供给弹性系数设为 1, 折旧率为 0.05, 供给延滞为 5 期. 与此同时, 另一个较小的供给延滞值 $n = 1$ 时的情况也将被考虑. 图 1 给出了异质预期房价波动模型的模拟结果.

图 1(a) 描述采用上述参数值的单纯预期模型的房价波动. 对于调整预期方式而言, 与第 2 节的稳定性分析结果一致. 利用给定的参数, 不等式右边项等于 0.1481, 小于其左边项的值 0.7, 无法满足其稳定性条件 $0 < 1 - \omega < (n + 1)^{n+1}/(n + 2)^{n+2}$. 因此, 如模拟结果所示, 即使供给延滞为 1, 调整预期房价波动模型中振荡仍然会出现. 当参数 $\delta = 0.05$, $n = 5$, 不等式 (17) 的右边项等于 0.0819 大于其左边项的值. 因此, 振荡并不会出现. 尽管如此, 当供给延滞大于 8, 即 $n > 8$ 时, 振荡就会出现. 这与 Wheaton 的结论:“短视”预期模型只有当供给弹性大于需求弹性的时候才会出现振荡, 是不一致的.

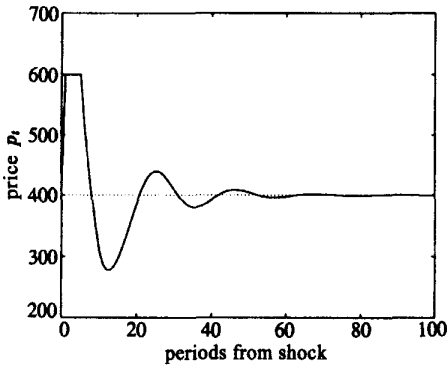
图 2 显示了供给延滞较大,如 $n = 8$ 和 $n = 10$ 时, 房价波动模型的模拟结果. 虽然供给延滞参数加大了, 偏好预期、趋势预期仍然在数量特征上与单纯预期表现出相似性. 随着供给延滞参数的增加, 偏好预期与趋势预期模型都显现出振荡现象, 如图 2(c) 和图 2(d) 所示. 模拟结果与稳定性分析条件 $h\alpha_2 > \delta$ 相一致. 在偏好预期与趋势预期假设下, 设参数 $h = 50, g = 0.3, \alpha_2 = 0.05/400$, 则不等式的左边项的值分别为 0.63% 和 0.15% , 均小于其右边项的值. 因此, 稳定性条件无法满足, 出现振荡.



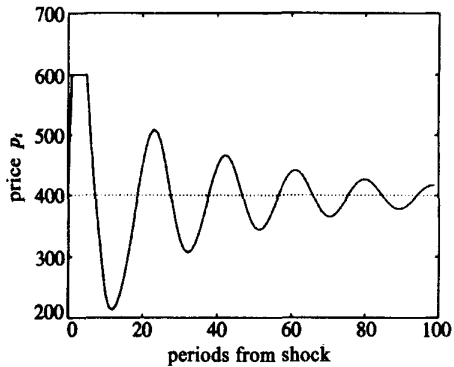
(a) 单纯预期房价波动



(b) 调整预期房价波动



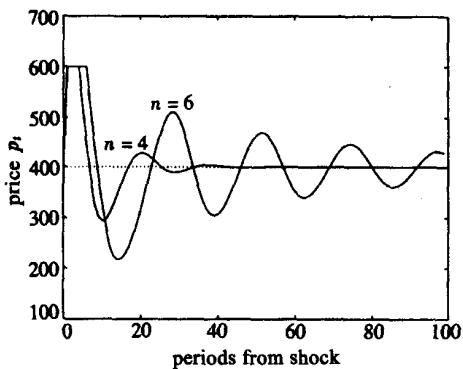
(c) 偏好预期房价波动



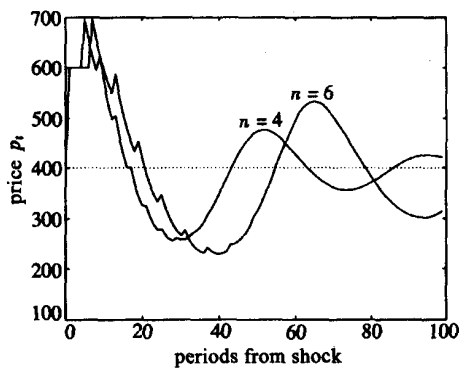
(d) 趋势预期房价波动

图 3 需求弹性与供给弹性不等时, 异质预期房价的波动(参数设定为: 供给延滞 $n = 5$; 折旧率 $\delta = 0.05$; 需求弹性 $\beta_1 = 0.4$; 供给弹性 $\beta_2 = 2$)

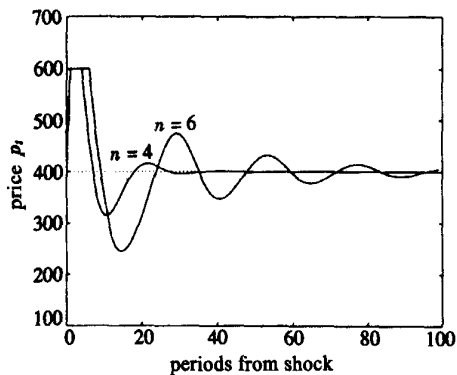
图 3 给出了当需求弹性小于供给弹性时异质预期模型模拟结果, 其中参数设定为: $\beta_1 = 0.4, \beta_2 = 2, p^* = \$ 400, i = 5\%$ 和 $n = 5$. 4 种预期方式下, 房价波动模型都显现出振荡收敛的特征. 图 3(a), 图 3(c) 和图 3(d) 分别描述了需求弹性小于供给弹性时, 单纯预期、偏好预期以及趋势预期房价波动模型模拟结果. 考虑单纯预期房价波动模型的稳定性条件, 其左边项 $\beta_2/\beta_1 < (2/(1 + \delta)) \cos(n\pi/(2n + 1))$ 的值为 5 , 远大于其右边项的值 0.2711 , 因此模拟结果中出现了振荡, 如图 3(a) 所示. 图 3(b) 描述了调整预期房价波动模型的模拟结果. 根据给定的参数值 $1 - \omega - (\beta_2/\beta_1)\omega\delta > 0$, 渐进稳定的条件 $0 < 1 - \omega < (n + 1)^{n+1}/(n + 2)^{n+2}$ 无法满足, 因此出现市场的波动. 随着新的供给的交付价格仍然维持高位一段时间, 而且在其总体下降趋势的初始阶段仍表现出局部的增加. 与其他的预期方式相比较, 调整预期模型表现出较低的波动频率.



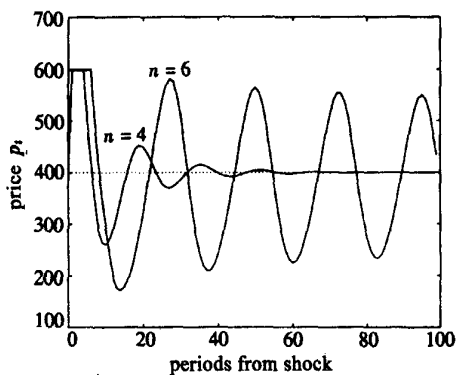
(a) 单纯预期房价波动



(b) 调整预期房价波动



(c) 偏好预期房价波动



(d) 趋势预期房价波动

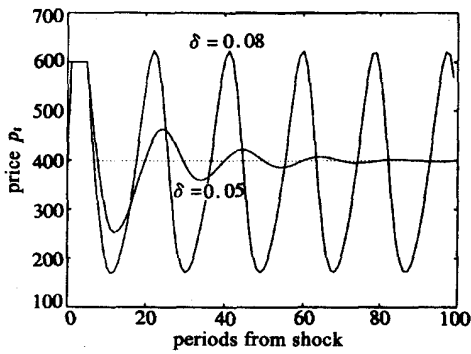
图4 需求弹性与供给弹性不相等时,供给延滞的变化对异质预期房价波动的影响
(其他参数设定为:折旧率 $\delta = 0.05$;需求弹性 $\beta_1 = 0.4$;供给弹性 $\beta_2 = 2$)

图4和图5显示了参数供给延滞或者折旧率 δ 的变化,对异质预期房价波动模型的影响.

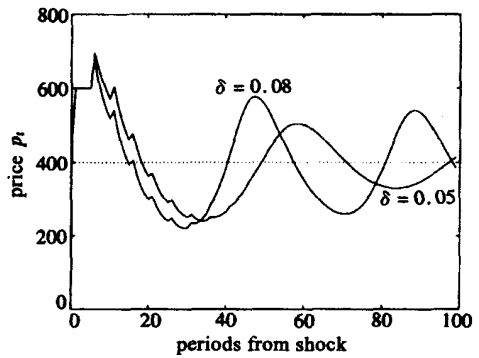
虽然参数 n 和 δ 的增加都在保持了原有基本波动性质的基础上加剧了模型的不稳定性,但是二者也有着显著的不同.例如,当供给延滞由4增加到6时,所有的有限理性预期方式下房价波动幅度都有所增加,而且价格从顶峰收敛到稳定状态的趋势仍然非常明显,特别是对于单纯预期和偏好预期而言.但是,当折旧率 δ 从0.05增加到0.08时,波动幅度剧烈增加,而收敛到稳定状态的特征却不再明显.另外一个明显的差别在于波动周期频率上.随着供给延滞的增加,在波动幅度增加的同时波动频率却降低了;然而,当增加折旧率的时候,在波动幅度增加的同时波动频率也随之增加.

4 结 论

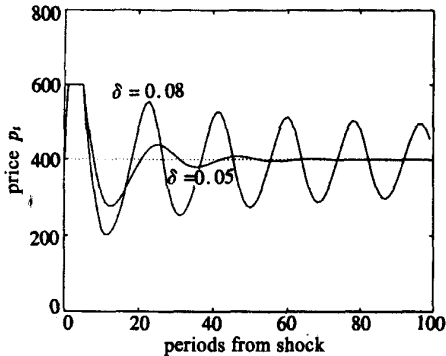
利率是房地产市场调节的最为常用的金融工具之一.然而,对其有效性却众说纷纭,不同市场或者不同时期的应用都呈现出不同的结果.本文研究房地产市场中一些重要的因素对房价波动的影响,包括:需求弹性、供给弹性、供给延滞以及折旧率等.结果表明,需求弹性小于供给弹性并不是房地产市场出现波动的必要条件.即使需求弹性等于供给弹性,当供给延滞足够大的时候,波动依然会出现.当需求弹性小于供给弹性的时候使得市场的波动加剧.同时,供给延滞和折旧率的增加都会增加市场的不稳定性.对于4种有限理性预期模型而言,供



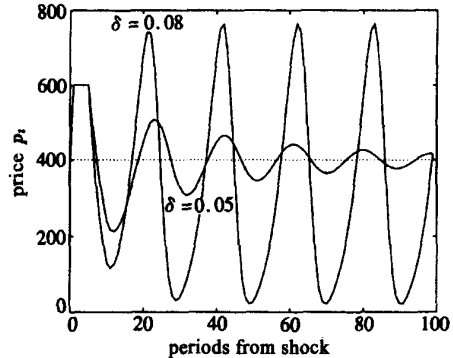
(a) 单纯预期房价波动



(b) 调整预期房价波动



(c) 偏好预期房价波动



(d) 趋势预期房价波动

图5 需求弹性与供给弹性不相等时,折旧率的变化对异质预期房价波动的影响

(其他参数设定为:供给延滞 $n = 5$;需求弹性 $\beta_1 = 0.4$;供给弹性 $\beta_2 = 2$)

给延滞的增加,在使得波动幅度增加的同时降低了波动周期的频率。然而,通过提高折旧率,使得波动幅度剧烈增加的同时,波动周期的频率也增加了。结果显示不同的因素对房价波动的影响是不同的,因此不同的市场或者市场处于不同时期时,对利率变动的反应也是不同的。

[参 考 文 献]

- [1] Harushek E A, Quigley J M. The dynamics of housing market: a stock adjustment model of housing adjustment[J]. Journal of Applied Econometrics, 1979, 6(1): 90-111.
- [2] Pozdena R J. Do interest rates still affect housing[J]. Economic Review, 1990, 90(3): 3-14.
- [3] Tse R Y C, Ho C W, Ganesan S. Matching housing supply and demand: an empirical study of Hong Kong's market[J]. Construction Management and Economics, 1999, 17(5): 625-633.
- [4] Gauger J, Snyder T C. Residential fixed investment and macroeconomy: has deregulation altered key relationships? [J]. Journal of Real Estate Finance and Economics, 2003, 27(3): 335-354.
- [5] Meen G P. Housing cycles and efficiency[J]. Scottish Journal of Political Economy, 2002, 47(2): 114-140.
- [6] Laura B-T, Ellis L. Housing construction cycles and interest rates[Z]. Research Discussion Paper, Reserve Bank of Australia, 2004.
- [7] Kahn G A. The changing interest sensitivity of the U S economy[J]. Federal Reserve Bank of Kansas City, Economic Review, 1989, 11(1): 13-34.

- [8] Wheaton W C. Real estate "cycles": some fundamentals[J]. *Real Estate Economics*, 1999, **27**(2): 209-230.
- [9] Poterba J M. Tax subsidies to owner-occupied housing: an asset-market approach[J]. *The Quarterly Journal of Economics*, 1984, **99**(4): 729-752.
- [10] Hommes C H. Financial markets as nonlinear adaptive evolutionary system[J]. *Quantitative Finance*, 2001, **1**(1): 149-167.
- [11] Muth J F. Rational expectations and the theory of price movements[J]. *Econometrica*, 1961, **29**(3): 315-335.
- [12] Case K E, Shiller R J. The efficiency of the market for single family homes[J]. *American Economic Review*, 1989, **79**(1): 125-137.
- [13] Buchanan N S. A reconsideration of the cobweb theorem[J]. *The Journal of Political Economy*, 1939, **47**(1): 67-81.
- [14] Stein J L. Cobwebs, rational expectations and futures markets[J]. *The Review of Economics Studies*, 1992, **74**(1): 127-134.
- [15] Kaldor N. A classificatory note on the determinateness of equilibrium[J]. *Review of Economics Studies*, 1934, **1**(2): 122-136.
- [16] Ezekiel M. The cobweb model[J]. *The Quarterly Journal of Economics*, 1938, **52**(2): 255-280.
- [17] Nerlove M. Adaptive expectations and cobweb phenomena[J]. *The Quarterly Journal of Economics*, 1958, **72**(2): 227-240.
- [18] Brock W A, Hommes C H. Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1998, **22**(8): 1235-1274.
- [19] Goerke J K, Hommes C H. Heterogeneous beliefs and the non-linear cobweb model[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2000, **24**(5): 761-798.
- [20] Kulenovic M R S, Ladas G. *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations: With Open Problems and Conjectures* [M]. New York: Chapman & Hall/ CRC, 2002.
- [21] Pielou E C. *Population and Community Ecology* [M]. New York: Gordon and Breach, 1974.
- [22] Milton J G, Belair J. Chaos, noise, and extinction in models of population growth[J]. *Theoretical Population Biology*, 1990, **37**(2): 273-290.
- [23] Graef J R, Qian C, Spikes P W. Stability in a population model[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1998, **89**(1): 119-132.
- [24] Hommes C H. Dynamics of the cobweb model with adaptive expectations and nonlinear supply and demand[J]. *Journal of Economic Behaviour and Organization*, 1994, **24**(3): 315-335.
- [25] Quigley J M. Real estate prices and economic cycles[J]. *International Real Estate Review*, 1999, **2**(1): 1-20.
- [26] Capozza D R, Hendershott P H, Mack C. An anatomy of price dynamics in illiquid markets: analysis and evidence from local housing markets[J]. *Real Estate Economics*, 2004, **32**(1): 1-32.
- [27] Pielou E C. *An Introduction to Mathematical Ecology* [M]. New York: Wiley Interscience, 1969.
- [28] Kurukdis S A, Ladas G. Oscillation and global attractivity in a discrete delay logistic model[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1992, **2**(2): 227-233.
- [29] Liu P Z, Cui X Y. Hyperbolic logistic difference equation with infinitely many delays[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2000, **52**(3): 231-250.
- [30] Kocic V L, Ladas G. *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations: With Open Problems and Conjectures* [M]. New York: Chapman & Hall, 2002.

- [31] Kocic V L, Ladas G. Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order With Applications [M]. Holland: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [32] Levin S, May R. A note on difference-delay equations [J]. Theoretical Population Biology, 1976, **9** (4): 178-187.
- [33] Gy-l-ri I, Ladas G. Oscillation Theory of Delay Differential Equations [M]. New York: Oxford Science, 1991.
- [34] Gy-l-ri I, Ladas G, Vlahos P N. Global attractivity and persistence in a discrete population model [J]. Nonlinear Analysis, 1991, **17**(5): 473-479.
- [35] Liz E. On explicit conditions for the asymptotic stability of linear higher order difference equations [J]. Journal of Mathematics Analysis and Applications, 2005, **303**(2): 492-498.
- [36] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: an analysis of decision under risk [J]. Econometrica, 1979, **47**(2): 263-291.
- [37] Kahneman D, Tversky A. Judgement Under Uncertainty Heuristics and Biases [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

Nonlinear Delay Difference Equations for Housing Dynamics Assuming Heterogeneous Backward-Looking Expectations

LEUNG Andrew Y T, XU Jia-na, TSUI Wing-shum

(Building and Construction, City University of Hong Kong, P. R. China)

Abstract: This paper aims to analyze the housing price dynamics after an unanticipated economic shock, which was believed to have similar properties with the backward-looking expectation models. The analysis of the housing price dynamics was based on the cobweb model with a simple user cost affected demand and a stock-flow supply assumption. Several n th-order delay rational difference equations were set up to illustrate the properties of housing dynamics phenomena, such as the equilibrium or oscillations, overshoot or undershoot and convergent or divergent, for a kind of heterogeneous backward-looking expectation models. The results show that demand elasticity is less than supply elasticity is not a necessary condition for the occurrence of oscillation. The housing price dynamics will vary substantially with the heterogeneous backward-looking expectation assumption and some other endogenous factors.

Key words: housing price dynamics; delay rational difference equations; equilibrium and oscillations; convergent and divergent; overshoot and undershoot