

# 基于敏感性的结构损伤识别中的噪声分析\*

尹 涛<sup>1,3</sup>, 朱宏平<sup>1,2</sup>, 余 岭<sup>1,3</sup>

- (1. 华中科技大学 土木工程与力学学院, 武汉 430074;
2. 华中科技大学 控制结构湖北省重点实验室, 武汉 430074;
3. 暨南大学 力学与土木工程系, 广州 510632)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 针对基于振动测试的结构损伤识别方法很容易受到环境噪声干扰的问题, 提出了一种新的噪声分析方法, 并结合 Monte Carlo 数值模拟技术研究了测量噪声对基于敏感性的损伤识别方法的影响. 与普遍采用的摄动法不同, 提出的方法直接由敏感性矩阵的 Moore-Penrose 广义逆推导得出. 该方法不仅使得噪声分析过程更简洁而有效, 并且能同时分析频率和振型噪声对于识别结果的影响. 针对 3 种常用的基于敏感性的损伤识别方法, 通过一个单层门式框架的仿真研究, 表明了所提出的噪声分析方法的正确性和有效性.

**关键词:** 损伤识别; 统计噪声分析; Monte Carlo 模拟; 摄动法

**中图分类号:** O327      **文献标识码:** A

## 引 言

结构的损伤通常会导致结构刚度发生降低, 从而改变结构的动力特性. 因而, 可以通过结构动力特性的改变识别结构损伤, 此类方法统称为基于动力测试的损伤识别方法. 而基于敏感性的结构损伤识别方法就是其中一类, 该类方法能同时判别损伤的发生和进行损伤的位置及程度的识别<sup>[1-4]</sup>. 此外, 该类方法直接将结构动力特性参数(如自振频率、振型、模态柔度等)与表征损伤状态的结构参数联系起来, 因而实际操作起来也很容易.

但是实际模态测试过程中不可避免地存在着随机噪声, 如果利用这些受噪声污染的测量数据来进行结构损伤识别, 则往往会致错误的结构损伤识别结果. 因而, 已经有学者开始研究测量噪声对于结构损伤识别方法的影响<sup>[5-6]</sup>. 目前对于此类随机问题主要有以下两种分析方法: 1) 蒙特卡罗(Monte Carlo)数值模拟法; 2) 矩阵摄动法. 其中, Monte Carlo 数值模拟法的精度很高, 但是当用来分析较复杂的问题时, 计算量也会很大, 因而该方法得到的结果通常被用来衡量其他方法精确与否<sup>[5]</sup>. 矩阵摄动法是一种较常用的分析随机因素影响的方法, 但是

\* 收稿日期: 2005-11-14; 修订日期: 2007-05-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50608036); 水利部科技创新基金资助项目(SCX2003-18)

作者简介: 尹涛(1979—), 男, 湖北人, 博士研究生(E-mail: yintaohust@163.com);

朱宏平(1965—), 男, 湖北人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86-27-87542631; E-mail: hpzhu@mail.hust.edu.cn).

该方法分析问题的过程往往较复杂而且繁琐,特别是当考虑振型测量噪声影响的时候,这种缺点表现得更为明显<sup>[6]</sup>.

本文具体针对基于敏感性的结构损伤识别方法,提出了一种新的随机噪声分析方法.该方法直接基于结构敏感性矩阵的 Moore-Penrose 广义逆推导得出;此外,该方法能采用类似的过程,同时分析频率噪声和振型噪声对于损伤识别结果的影响,这样就使得随机噪声的分析过程更加简洁而有效.文中具体针对 3 种常用的基于敏感性的损伤识别方法(即基于频率敏感性的损伤识别方法,同时基于频率与振型敏感性的的损伤识别方法以及基于模态柔度敏感性的损伤识别方法),并接合 Monte Carlo 数值模拟法,通过一个单层门式框架结构损伤识别的数值仿真研究,表明了本文提出的噪声分析方法的正确性和有效性.

## 1 基于敏感性的损伤识别方法

结构有限元模型(FEM)的动力特性方程与质量正交方程可以分别表示如下:

$$\mathbf{K} \varphi^{(j)} - \lambda_j \mathbf{M}_0 \varphi^{(j)} = 0, \quad (1)$$

$$(\varphi^{(j)})^T \mathbf{M}_0 \varphi^{(j)} = 1, \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{K}$  为结构损伤后的整体刚度矩阵,  $\mathbf{M}_0$  为结构的整体质量矩阵(假设结构损伤前后无变化),  $\lambda_j$ 、 $\varphi^{(j)}$  分别为损伤结构的第  $j$  阶特征值和特征向量(也称振型),  $j = 1, 2, \dots, N_m$ ,  $N_m$  为测量模态阶数;  $\lambda_j = (2\pi f_j)^2$ ,  $f_j$  表示第  $j$  阶自振频率(Hz).

结构损伤将导致结构的刚度降低,于是结构刚度矩阵可以表示为

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N_e} \alpha \mathbf{K}^{(i)}, \quad \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T, \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{K}^{(i)}$  表示结构 FEM 中第  $i$  单元的单元扩阶刚度矩阵,  $N_e$  为 FEM 中的单元总数,  $\alpha$  表示单元刚度参数向量,且在本文中表各单元的弹性模量.

将结构模态参数向量  $z$  对  $\alpha$  进行一阶 Taylor 级数展开,可以得到如下的近似表达式:

$$\mathbf{S} \Delta \alpha = \Delta z, \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{S}$  为结构 FEM 的敏感性矩阵,表示模态参数向量  $z$  对  $\alpha$  的一阶导数;  $\Delta z$  表示结构损伤前后模态参数向量的变化;  $\Delta \alpha$  表示单元刚度参数向量的改变(即结构损伤),它可以从式(4)中得到:

$$\Delta \alpha = \mathbf{S}^+ \Delta z, \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{S}^+$  代表敏感性矩阵  $\mathbf{S}$  的 Moore-Penrose 广义逆.从式(5)可以看出,当获得结构损伤前后的模态参数向量的改变  $\Delta z$  后,表示损伤位置和程度的量  $\Delta \alpha$  就可以确定出来.

### 1.1 基于频率敏感性的损伤识别方法

第  $j$  阶特征值对  $\alpha$  的一阶导数  $\partial \lambda_j / \partial \alpha$ , 可由式(1)两边同时对  $\alpha$  求导得到

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha} - (\partial \lambda_j / \partial \alpha) \mathbf{M}_0 \right] \varphi^{(j)} + (\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M}_0) \partial \varphi^{(j)} / \partial \alpha = 0. \quad (6)$$

将式(1)进行转置,并注意到结构整体矩阵的对称性,可得

$$(\varphi^{(j)})^T (\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M}_0) = 0. \quad (7)$$

将式(6)的两边同时左乘  $(\varphi^{(j)})^T$ , 并注意到式(2)与式(7), 可得

$$\partial \lambda_j / \partial \alpha = (\varphi^{(j)})^T (\partial \mathbf{K} / \partial \alpha) \varphi^{(j)} = (\varphi^{(j)})^T \mathbf{K}^{(i)} \varphi^{(j)}. \quad (8)$$

由于  $\lambda_j = (2\pi f_j)^2$ , 因此,  $\partial f_j / \partial \alpha$  可以表示为

$$\partial f_j / \partial \alpha = (\varphi^{(j)})^T \mathbf{K}^{(i)} \varphi^{(j)} / (4\pi \sqrt{\lambda_j}), \quad i = 1, 2, \dots, N_e; j = 1, 2, \dots, N_m, \quad (9)$$

这样频率敏感性矩阵  $\mathbf{S}_{N_m \times N_e}^f$  可以由式(9)导出.若通过模态试验获得了结构损伤前后的

频率改变  $\Delta f$ , 则根据式(5), 即可得到  $\Delta\alpha$ , 即结构损伤.

### 1.2 同时基于频率与振型敏感性的损伤识别方法

第  $j$  阶振型对  $\alpha_i$  的一阶导数  $\partial \varphi^{(j)} / \partial \alpha_i$  可以由文献[7]得到

$$\frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial \alpha_i} = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{N_m} \frac{\varphi^{(r)} (\varphi^{(r)})^T \mathbf{K}^{(i)} \varphi^{(j)}}{\lambda_j - \lambda_r}, \quad i = 1, 2, \dots, N_e; r, j = 1, 2, \dots, N_m. \quad (10)$$

此时, 根据实测自由度信息, 振型敏感性矩阵  $\mathbf{S}_{N_{md} \times N_e}^\varphi$  可以由式(10)得到,  $N_{md} = N_m \times N_d$ ,  $N_d$  表示测量自由度总数. 因而, 由式(9), 整个敏感性矩阵  $\mathbf{S}^m$  及模态参数向量  $\mathbf{z}$  可以分别表示为:

$$\mathbf{S}_{N \times N_e}^m = [(\mathbf{S}^f)^T, (\mathbf{S}^\varphi)^T]^T, \quad (11)$$

$$\mathbf{z}_{N \times 1} = [\mathbf{f}^T, \boldsymbol{\phi}^T]^T, \quad (12)$$

其中,  $N = N_m \times (N_d + 1)$ ,  $\boldsymbol{\phi} = [(\varphi^{(1)})^T, (\varphi^{(2)})^T, \dots, (\varphi^{(N_m)})^T]^T$  为  $N_{md}$  维向量. 为简便, 此处及下文中与实测自由度对应的  $N_d$  维振型向量仍用符号  $\varphi$  来表示.

同样, 如果通过模态试验获得了结构损伤前后的模态参数改变  $\Delta\mathbf{z}$ , 则将  $\Delta\mathbf{z}$  和式(11)代入到式(5)中后就可以得到损伤识别结果.

### 1.3 基于模态柔度敏感性的损伤识别方法

结构柔度矩阵可以近似地表示为前几阶低阶模态特征对之和<sup>[3]</sup>, 因而, 由计算模态和测量模态构成的柔度矩阵可以分别表示如下:

$$\mathbf{F}_{N_d \times N_d} = \sum_{j=1}^{N_m} \frac{\varphi^{(j)} (\varphi^{(j)})^T}{\lambda_j}, \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_{N_d \times N_d} = \sum_{j=1}^{N_m} \frac{\boldsymbol{\varphi}^{(j)} (\boldsymbol{\varphi}^{(j)})^T}{\lambda_j}. \quad (14)$$

令  $\mathbf{F}^{(j)}$  表示与第  $j$  阶模态对应的柔度矩阵, 则

$$\mathbf{F}^{(j)} = \varphi^{(j)} (\varphi^{(j)})^T / \lambda_j, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{(j)}}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{\lambda_j} \left[ \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial \alpha_i} (\varphi^{(j)})^T + \varphi^{(j)} \frac{\partial (\varphi^{(j)})^T}{\partial \alpha_i} \right] - \frac{\varphi^{(j)} (\varphi^{(j)})^T}{\lambda_j^2} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \alpha_i}, \quad (16)$$

其中,  $\partial \mathbf{F}^{(j)} / \partial \alpha_i$  表示第  $j$  阶模态对应的柔度矩阵对于  $\alpha_i$  的敏感性矩阵. 模态参数向量  $\mathbf{z}$  可以由各阶模态柔度矩阵的对角线元素组成, 即

$$\mathbf{z}_{N_{md} \times 1} = [(\mathbf{g}^{(1)})^T, (\mathbf{g}^{(2)})^T, \dots, (\mathbf{g}^{(N_m)})^T]^T, \quad \mathbf{g}_{N_d \times 1}^{(j)} = \text{diag}(\mathbf{F}^{(j)}), \quad (17a, b)$$

其中,  $j = 1, 2, \dots, N_m$ . 符号  $\text{diag}$  表示矩阵对角元素提取算子. 此时, 模态柔度敏感性矩阵  $\mathbf{S}^F$  可以表示为以下形式:

$$\mathbf{S}_{N_{md} \times N_e}^F = [\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(N_e)}]; \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_{N_{md} \times 1}^{(i)} = [(\mathbf{v}^{(1)})^T, (\mathbf{v}^{(2)})^T, \dots, (\mathbf{v}^{(N_m)})^T]^T, \quad \mathbf{v}_{N_d \times 1}^{(j)} = \text{diag}(\partial \mathbf{F}^{(j)} / \partial \alpha_i), \quad (19a, b)$$

其中, 向量  $\mathbf{v}^{(j)}$  与  $i$  有关, 为简便, 故略去  $i$ . 类似地, 若通过模态试验获得了模态参数在损伤前后的变化值  $\Delta\mathbf{z}$ , 则将  $\Delta\mathbf{z}$  与式(18)代入式(5)中即可得到结构损伤程度的识别值.

为了分析方便, 将基于频率敏感性的损伤识别方法定义为方法 1, 将同时基于频率与振型敏感性的损伤识别方法定义为方法 2, 将基于模态柔度敏感性的损伤识别方法定义为方法 3.

## 2 测量噪声对识别结果的影响分析

实际动力测量数据中的噪声往往不具有零均值性. 由于这种具有非零均值的测量数据的统计分布规律往往又不容易得到, 因而绝大多数学者关于测量噪声的研究工作都是在零均值

且为正态分布的假设条件下进行的<sup>[6]</sup>. 本文所研究的测量噪声也是基于零均值且为正态分布的假设条件, 其中, 第  $j$  阶频率和相应振型的噪声模式可以分别表示为以下的形式:

$$f_j = f_j(1 + \xi^j), \quad (20)$$

$$\varphi^{(j)} = \varphi^{(j)} \times (\mathbf{1} + \eta^{(j)}), \quad j = 1, 2, \dots, N_m, \quad (21)$$

其中, 上标  $\wedge$  与  $-$  分别代表有测量噪声和无测量噪声的情形, 且假设频率噪声与振型噪声互不相关. 符号  $\times$  代表向量逐元相乘运算符.  $\eta^{(j)}$  表示与第  $j$  阶实测振型向量  $\varphi^{(j)}$  对应的测量噪声, 其维数等于测量自由度数目  $N_d$ .

若将测量噪声堆积成一个向量的形式, 则可以得到如下的表达式:

$$\varepsilon_{N \times 1} = [(\xi^f)^T, (\xi^\varphi)^T]^T, \quad (22a)$$

$$\xi_m^f \times 1 = [\xi_1^f, \xi_2^f, \dots, \xi_m^f]^T, \quad \varepsilon_{N_m \times 1} = [(\eta^{(1)})^T, (\eta^{(2)})^T, \dots, (\eta^{(N_m)})^T]^T, \quad (22b, c)$$

这时, 噪声向量  $\varepsilon$  的均值向量  $E(\varepsilon)$  和协方差矩阵  $C_{\text{cov}}(\varepsilon, \varepsilon)$  的两个部分可以分别由下式给出:

$$E(\varepsilon) = \mathbf{0}_{N \times 1}; \quad (23)$$

$$C_{\text{cov}}(\xi^f, \xi^f) = \sigma_f^2 I_{N_m}, \quad C_{\text{cov}}(\xi^\varphi, \xi^\varphi) = \sigma_\varphi^2 I_{N_{md}}, \quad (24a, b)$$

其中,  $\sigma_f$  和  $\sigma_\varphi$  分别是频率噪声和振型噪声的标准差.  $I_{N_m}$  和  $I_{N_{md}}$  分别表示  $N_m \times N_m$  维和  $N_{md} \times N_{md}$  维单位对角矩阵.

为了研究测量噪声对单元刚度参数向量  $\alpha$  的影响, 现将  $\alpha$  展开为噪声  $\varepsilon_i$  的二阶 Taylor 展开式:

$$\alpha \approx \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_i} \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \varepsilon_i \varepsilon_j, \quad (25)$$

其中,  $\alpha_0$  为无噪声情况下的理论计算值.

基于零均值噪声假设 ( $E(\varepsilon) = \mathbf{0}$ ),  $\alpha$  的均值  $E(\alpha)$  可以表示如下

$$\begin{aligned} E(\alpha) &\approx E(\alpha_0) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_i} E(\varepsilon_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varepsilon_i^2} C_{\text{cov}}(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \\ &\alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varepsilon_i^2} C_{\text{cov}}(\varepsilon_i, \varepsilon_i). \end{aligned} \quad (26)$$

其相应的协方差矩阵则由下式给出:

$$C_{\text{cov}}(\alpha, \alpha)_{N_e \times N_e} \approx [\partial \alpha / \partial \varepsilon]_{N_e \times N} C_{\text{cov}}(\varepsilon, \varepsilon)_{N \times N} [\partial \alpha / \partial \varepsilon]^T_{N_e \times N}, \quad (27)$$

其中,  $C_{\text{cov}}(\varepsilon, \varepsilon)$  表示测量噪声的协方差矩阵,  $\partial \alpha / \partial \varepsilon$  表示  $\alpha$  对测量噪声的敏感性矩阵. 从式(26)与式(27)中可以看到, 当  $\partial \alpha / \partial \varepsilon_i$  和  $\partial^2 \alpha / \partial \varepsilon_i^2$  已知时,  $\alpha$  的均值向量和协方差矩阵就能求出,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

对于方法 1,  $\alpha$  可以由式(5)得到, 即

$$\alpha = \mathbf{1} + (\mathbf{S}^f)^+ (\mathbf{f} - \mathbf{f}), \quad (28)$$

其中,  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{f}$  分别表示测量频率向量和计算频率向量. 由于  $(\mathbf{S}^f)^+$  和  $\mathbf{f}$  均与噪声无关, 因此, 可以得到  $\partial \alpha / \partial \xi^j$  的表达式如下:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi^j} = (\mathbf{S}^f)^+ \frac{\partial (\mathbf{f} \times (\mathbf{1} + \xi^j) - \mathbf{f})}{\partial \xi^j} = (\mathbf{S}^f)^+ (\mathbf{f} \times \mathbf{e}^{(j)}) = \mathbf{a}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N_m. \quad (29)$$

其中,  $\mathbf{a}$  表示矩阵  $(\mathbf{S}^f)^+$  的第  $j$  列元素, 为  $N_e$  维向量.  $\mathbf{e}^{(j)} = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$  表示第  $j$  个分量为 1, 而其余分量为 0 的  $N_m$  维列向量.

同样地, 对于方法 2, 由式(5)可以得到  $\alpha$  的表达式

$$\alpha = \mathbf{1} + (\mathbf{S}^m)^+ (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}), \quad (30)$$

$\partial \alpha / \partial \xi_j$  可以采用类似于式(29)的推导过程得到

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_j} = (\mathbf{S}^m)^+ \frac{\partial (\mathbf{z} + \frac{(\mathbf{1} + \xi) - \mathbf{z}}{\partial \xi_j})}{\partial \xi_j} = (\mathbf{S}^m)^+ (\mathbf{z} + \mathbf{e}^{(j)}) = \mathbf{b}z_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (31)$$

其中,  $\mathbf{b}$  表示矩阵  $(\mathbf{S}^m)^+$  的第  $j$  列元素, 为  $N_e$  维向量.  $\mathbf{e}^{(j)} = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$  表示第  $j$  个分量为 1, 而其余分量为 0 的  $N$  维列向量. 依据方法 2 的定义, 可以得到: 当  $j = 1, 2, \dots, N_m$  时,  $z_j = f_j$ ; 当  $j = N_m + 1, N_m + 2, \dots, N$  时,  $z_j = \phi_k, k = j - N_m$ .

从式(29)与式(31)中可以看到, 对于方法 1 和方法 2 来说,  $\partial \alpha / \partial \xi_j (j = 1, 2, \dots, N)$  均为常数向量, 因而其对噪声元素  $\xi_j$  的二阶偏导数等于  $\mathbf{0}$ , 即  $\partial^2 \alpha / \partial \xi_j^2 = \mathbf{0}$ . 此时, 单元刚度参数向量  $\alpha$  的均值向量和协方差矩阵就可以直接由式(26)与式(27)导出, 即

$$\mathbf{E}(\alpha) \approx \alpha_0, \quad (32)$$

$$\mathbf{C}_{\text{cov}}(\alpha, \alpha) \approx [\partial \alpha / \partial \xi] \mathbf{C}_{\text{cov}}(\xi, \xi) [\partial \alpha / \partial \xi]^T. \quad (33)$$

类似地, 对于方法 3,  $\alpha$  的表达式可以由式(5)得到

$$\alpha = \mathbf{1} + (\mathbf{S}^f)^+ (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}), \quad (34)$$

令方法 3 的噪声向量为  $\xi_{\text{md}}^{f \times 1}$ , 为了研究该噪声向量的表达式, 令  $F_{kk}^{(i)}$  表示第  $i$  阶实测模态柔度矩阵  $\mathbf{F}^{(i)}$  对角线上的第  $k$  个元素, 即

$$F_{kk}^{(i)} = (\varphi_k^{(i)})^2 / \lambda_i = (\varphi_k^{(i)} / (2\gamma_i)) ^2 (1 + \eta_k^{(i)} / (1 + \xi_i^f))^2, \quad (35)$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, N_m, k = 1, 2, \dots, N_d$ . 根据方法 3 的定义,  $F_{kk}^{(i)}$  应该位于向量  $\hat{\mathbf{z}}$  中的第  $l$  行,  $l = (i - 1)N_d + k$ , 即  $\hat{z}_l = F_{kk}^{(i)}$ . 令  $F_{kk}^{(i)} = (\varphi_k^{(i)} / (2\gamma_i))^2$ , 则  $F_{kk}^{(i)}$  在向量  $\mathbf{z}$  中也应位于第  $l$  行, 即  $z_l = F_{kk}^{(i)}$ . 同理, 噪声项  $(1 + \eta_k^{(i)} / (1 + \xi_i^f))^2 - 1$  也应该位于噪声向量  $\xi^f$  中的第  $l$  行, 即

$$\xi_l^f = \left( \frac{1 + \eta_k^{(i)}}{1 + \xi_i^f} \right)^2 - 1, \quad l = (i - 1)N_d + k, i = 1, 2, \dots, N_m; k = 1, 2, \dots, N_d, \quad (36)$$

从式(36)中可知, 当  $i, k$  分别在其取值范围内变化时,  $l$  可以依次取到 1 至  $N_{\text{md}}$  之间的所有值, 因而从该式中可以得到噪声向量  $\xi^f$  的表达式. 从该表达式中可以看出,  $\xi^f$  的统计分布规律同时由频率噪声向量  $\xi^f$  与振型噪声向量  $\xi^\varphi$  所决定, 且其各元素均不相关. 但  $\xi^f$  的均值向量与协方差矩阵的具体表达式却不方便直接由  $\xi^f$  和  $\xi^\varphi$  的分布来确定. 然而, 采用数值模拟法(如 Monte Carlo 方法)却可以很方便地得出  $\xi^f$  的分布规律, 因此, 本文采用 Monte Carlo 方法来确定  $\xi^f$  的统计分布规律.

因此, 式(35)可以表示为

$$\hat{z}_l = z_l (1 + \xi_l^f), \quad l = 1, 2, \dots, N_{\text{md}} \quad (37)$$

进一步将式(37)表示为向量的形式, 即

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{z} + (\mathbf{1} + \xi^f). \quad (38)$$

通过类似于式(29)和式(31)的推导过程, 可得  $\partial \alpha / \partial \xi_j^f$  的表达式为

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_j^f} = (\mathbf{S}^f)^+ \frac{\partial (\mathbf{z} + \frac{(\mathbf{1} + \xi^f) - \mathbf{z}}{\partial \xi_j^f})}{\partial \xi_j^f} = (\mathbf{S}^f)^+ (\mathbf{z} + \mathbf{e}^{(j)}) = \mathbf{c}z_j, \quad j = 1, 2, \dots, N_{\text{md}} \quad (39)$$

其中,  $\mathbf{c}$  表示矩阵  $(\mathbf{S}^f)^+$  的第  $j$  列元素, 为  $N_e$  维向量.  $\mathbf{e}^{(j)} = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$  表示第  $j$  个分量为 1, 而其余分量为 0 的  $N_{\text{md}}$  维向量.

从式(39)中可以看到,  $\alpha$  关于  $\xi_j^f$  的二次偏导数为  $\mathbf{0}, j = 1, 2, \dots, N_{\text{md}}$ , 但均值  $\mathbf{E}(\xi^f)$  却不一

定为  $\mathbf{0}$ . 因此, 根据式(25),  $\alpha$  的均值与协方差矩阵可以分别由下面两式导出:

$$E(\alpha) \approx E(\alpha_0) + \sum_{i=1}^{N_{ml}} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_i^F} E(\xi_i^F) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{ml}} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial (\xi_i^F)^2} C_{cov}(\xi_i^F, \xi_i^F) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N_{ml}} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_i^F} E(\xi_i^F). \quad (40)$$

$$C_{cov}(\alpha, \alpha)_{N_c \times N_c} \approx [\partial \alpha / \partial \xi^F]_{N_c \times N_{ml}} C_{cov}(\xi^F, \xi^F)_{N_{ml} \times N_{ml}} [\partial \alpha / \partial \xi^F]^T_{N_c \times N_{ml}}. \quad (41)$$

如前所述, 以上两式中噪声向量  $\xi^F$  的均值和协方差矩阵均由 Monte Carlo 模拟给出.

### 3 数值仿真研究

为了验证本文所提出的噪声分析方法的正确性, 本节对文献[8]中的一个单层框架结构进行了分析. 该框架结构的 FEM 如图 1 中所示.

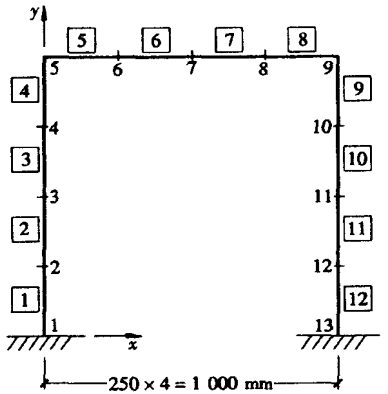


图 1 单层框架结构的有限元模型图

该框架的 FEM 是由 12 个等长的平面二维梁单元所组成的. 其截面特性与材料特性如下: 弹性模量  $E =$

$2.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ; 截面面积  $A = 3.03 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  (柱) 与  $2.43$

$\times 10^{-4} \text{ m}^2$  (梁); 截面惯性矩  $I = 9.09 \times 10^{-10} \text{ m}^4$  (柱) 与

$7.29 \times 10^{-10} \text{ m}^4$  (梁); 材料密度  $\rho = 7.67 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . 考

虑了多损伤工况, 即单元 1、8、11 同时被设置为损伤单

元, 且均发生 20% 的刚度降低. 损伤前后的前 6 阶频

率及 16 个测量自由度见表 1, 将在下文的损伤识别中采

用. 不失一般性, 本例将噪声水平设置为  $NL = (1\%,$

$10\%)$ , 表示频率测量噪声的标准差为 1% 且振型测量

噪声的标准差为 10%.

表 1 损伤前后的频率 (Hz) 及实测自由度 (MDOF) 信息

	模态 1	模态 2	模态 3	模态 4	模态 5	模态 6
健康结构	4.69	18.23	28.97	31.53	64.90	77.40
损伤结构	4.49	17.97	27.96	30.63	63.31	74.78
差别 $e/(\%)$	4.26	1.43	3.49	2.85	2.45	3.39
MDOF(节点号和方向)	2x, 3x, 4x, 5x, 5y, 6x, 6y, 7x, 7y, 8x, 8y, 9x, 9y, 10x, 11x, 12x					

实际工程结构中, 发生的损伤的单元数目往往比结构总体单元数少得多, 因而为了方便起见, 文中用单元刚度降低系数向量  $\theta$  来代替单元刚度参数向量  $\alpha$ , 其中,  $\theta = \mathbf{1} - \alpha$ , 表示单元损伤程度. 图 2 比较了在无噪声情况下 3 种不同的损伤识别方法得到的识别结果. 从该图中可以看出, 方法 1 没能正确地识别出损伤, 并且识别出的结果是对称的, 这说明仅仅采用频率改变来识别损伤往往是不可行的; 但基于模态参数的敏感性的损伤识别方法又不能缺少频率信息, 因为频率提供了有关结构损伤的全局信息. 另外, 从该图中也可以看出方法 2 和方法 3 都较好地识别出了结构损伤, 并且方法 3 识别的损伤精度较高.

当考虑测量噪声时, 本文引入变异系数 (coefficients of variance) 向量  $\mu$  来衡量识别结果受噪声影响程度的大小, 并定义为单元刚度参数向量  $\alpha$  的标准差和相应均值的百分比. 同时采用本文提出的噪声分析方法与 Monte Carlo 数值模拟法 (1 000 次模拟) 对方法 1、方法 2 和方法 3 进行噪声分析, 所得结果见图 3. 从该图中可以看出, 对于 3 种损伤识别方法, 本文方法与 Monte Carlo 方法得到的结果很接近, 这就证明了本文提出方法的正确性. 图 3(a) 也表明仅采

用频率进行结构损伤识别是不太可行的. 同时, 从图 3(c)、(e) 中可以看出, 方法 2 对损伤的识别精度比方法 3 要高些; 而图 3(b)、(d)、(f) 则反映出方法 3 受噪声的影响最大.

图 4 比较了在部分和完整测量自由度振型情况下, 本文提出的噪声分析方法对方法 2 与方法 3 的噪声影响分析结果. 图 4(a)、(c) 表示无噪声情况, 图 4(b)、(d) 表示噪声水平  $NL = (1\%, 10\%)$  的情况. 从图 4(a)、(c) 中可以看出, 当不考虑测量噪声时, 两种方法在完整测量自由度和非完整测量自由度两种情况下的损伤识别结果相近. 这说明在无测量噪声情况下, 两种方法仅利用频率及部分测量自由度的振型就能够识别出损伤. 然而, 当考虑测量噪声时, 结果却不一样了. 考虑了测量噪声时的识别结果可以从以下两个方面反映出来, 如图 4(b)、(d) 所示.

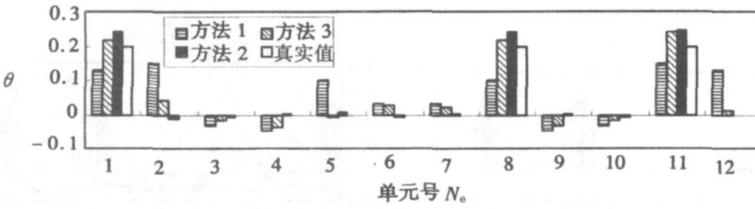
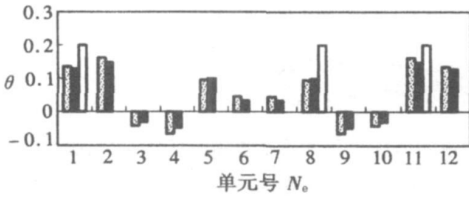
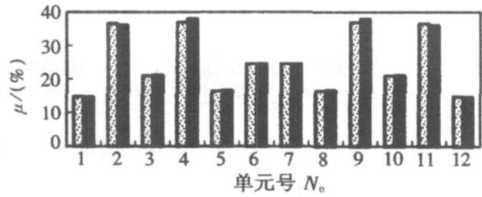


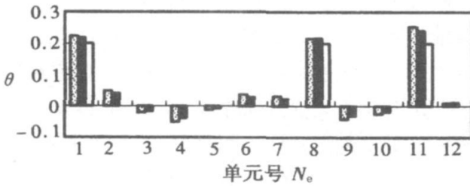
图 2 无噪声情况下各损伤识别方法的识别结果比较



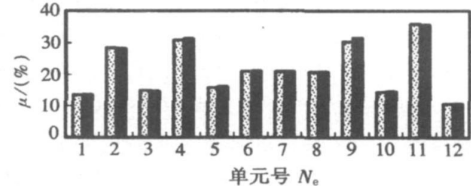
(a) 方法 1



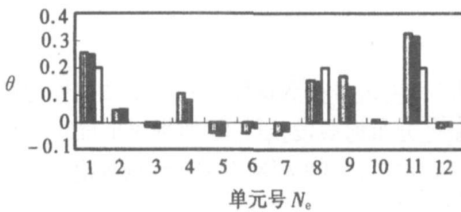
(b) 方法 1



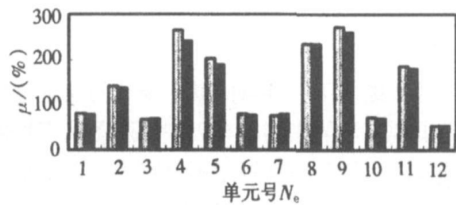
(c) 方法 2



(d) 方法 2



(e) 方法 3



(f) 方法 3

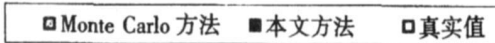


图 3 本文方法与 Monte Carlo 方法对 3 种损伤识别方法噪声分析结果的比较

首先, 图 4(b) 表示方法 2 在非完整测量自由度下识别结果( $\theta$  值)与完整测量自由度下的

值很接近. 而图 4(d) 则表示方法 3 在完整测量自由度下识别出的  $\theta$  值比相应的非完整自由度下的结果要更接近真实值一些, 这表明在考虑测量噪声的情况下, 方法 3 较方法 2 更依赖于振型测量自由度的完整性.

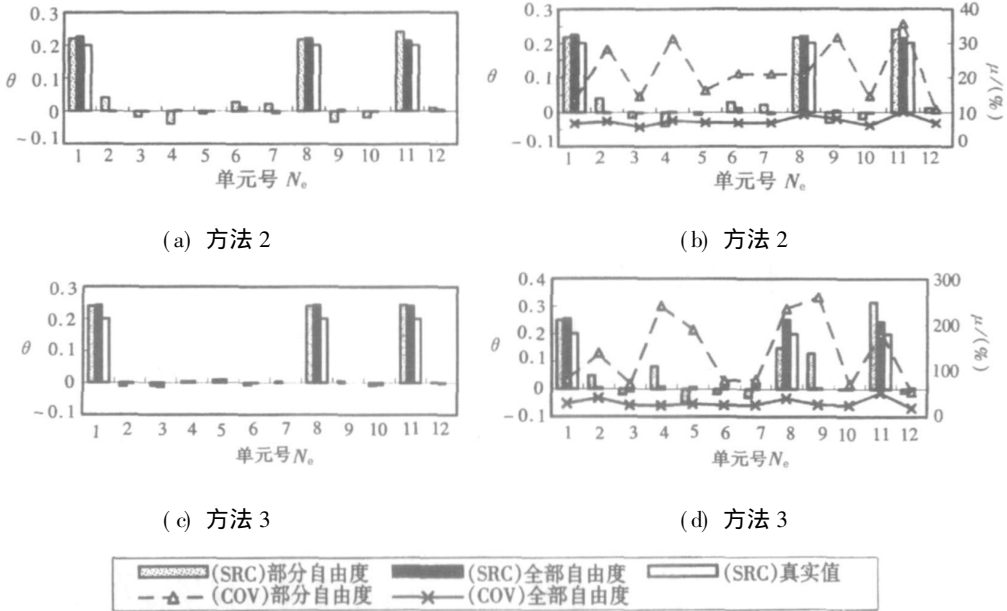


图 4 部分和完整测量自由度振型情况下, 本文方法对方法 2 与方法 3 噪声分析结果的比较

其次, 在噪声情况下, 振型测量自由度的完整与否对识别结果的影响, 可以从变异系数向量  $\mu$  上很明显地反映出来, 即完整测量自由度振型情况下的  $\mu$  值较非完整情况下的要小很多. 这说明完整自由度振型下的识别结果受测量噪声的影响要比非完整自由度下的小很多, 也就是说增加测量自由度数目能增加识别结果的噪声鲁棒性能. 然而, 大型结构有限元模型的自由度数往往成百上千, 但实际测量过程中, 仅能获得具有少数自由度的振型数据. 另外, 数值仿真结果表明, 当采用振型扩阶技术来使实测振型与 FEM 的计算振型匹配时, 通常会使 FEM 的建模误差与测量噪声的影响扩展到整个扩阶后的振型, 会使损伤识别结果变差. 而从另一方面来看, 对方法 2 和方法 3 来说, 由于仅采用部分测量自由度振型时的识别方程在多数情况下都是超定的, 因而仅利用非完整振型来进行损伤识别是可行的, 并不需要进行额外的振型扩阶.

## 4 结 论

本文提出了一种新的基于统计的噪声分析方法, 用来分析测量噪声对基于敏感性的结构损伤识别方法的影响. 在测量噪声服从零均值正态分布的假设条件下, 所提出的噪声分析方法能同时分析频率和振型测量噪声对识别结果的影响. 针对 3 种基于敏感性的损伤识别方法 (基于频率敏感性的损伤识别方法 (方法 1), 同时基于频率与振型敏感性的的损伤识别方法 (方法 2), 基于模态柔度敏感性的损伤识别方法 (方法 3)), 通过对一个单层门式框架结构损伤识别的数值仿真研究, 采用 Monte Carlo 数值模拟方法对本文提出的噪声分析方法进行了验证, 结果表明所提出的方法是正确而又有效的. 同时, 采用文中提出的噪声分析方法对 3 种损伤识别方法进行了分析比较. 分析结果表明, 仅仅利用频率测量信息并不能正确地识别出较复杂结构的损伤, 但频率测量信息在损伤识别中又是很重要的参数, 因为频率提供了有关结构损伤的全局信息. 因此, 仅利用测量频率的方法 1 并不适合于实际大型复杂结构的损伤识别, 损



伤识别方法中应该还需利用振型测量信息。由于方法 3 比方法 2 受噪声影响的程度大得多,因而也并不适合于实际结构的损伤识别。因此,方法 2 相对于其他两种方法而言较适合于实际结构损伤识别。

### [参 考 文 献]

- [1] Cawley P, Adams R D. The location of defects in structures from measurements of natural frequencies[J]. *Journal of Strain Analysis*, 1979, **14**(2): 49-57.
- [2] Stubbs N, Kim J T. Damage localization in structures without baseline modal parameters[J]. *AIAA J*, 1996, **34**(8): 1649-1654.
- [3] 鞠彦忠, 张增军, 陈景彦, 等. 基于柔度法的结构损伤识别[J]. *东北电力学院学报*, 2004, **24**(1): 47-50.
- [4] Zhao J, Dewolf J T. Sensitivity study for vibrational parameters used in damage detection[J]. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1999, **125**(4): 410-416.
- [5] Papadopoulos L, Garcia E. Structural damage identification: a probabilistic approach[J]. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1998, **36**(11): 2137-2145.
- [6] Xia Y, Hao H. Statistical damage identification of structures with frequency changes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **263**(4): 853-870.
- [7] Fox R L, Kapoor M P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors[J]. *AIAA J*, 1968, **6**(12): 2426-2429.
- [8] Hao H, Xia Y. Vibration-based damage detection of structures by genetic algorithm[J]. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 2002, **16**(3): 222-229.

## Noise Analysis for Sensitivity Based Structural Damage Detection

YIN Tao<sup>1,3</sup>, ZHU Hong-ping<sup>1,2</sup>, YU Ling<sup>1,3</sup>

(1. School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P. R. China;

2. Hubei Key Laboratory of Control Structures, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P. R. China;

3. Department of Mechanics and Civil Engineering, Jinan University, Guangzhou 510632, P. R. China)

**Abstract:** As vibration-based structural damage detection methods are easily affected by the environmental noise, a newly statistic-based noise analysis method was proposed together with Monte Carlo technique to investigate the influence of experimental noise of modal data on sensitivity-based damage detection methods. Different from the commonly used random perturbation technique, the proposed technique is deduced directly by Moore-Penrose generalized inverse of the sensitivity matrix, which does not only make the analysis process more efficient but also can analyze the influence of noise on both frequencies and mode shapes for three commonly used sensitivity-based damage detection methods in a similar way. A one-story portal frame is adopted to evaluate the efficiency of the proposed noise analysis technique.

**Key words:** damage detection; statistic-based noise analysis; Monte Carlo technique; perturbation technique