文章编号: 1000-0887(2007) 05-0614-05

Navier-Stokes 方程的奇异性对大气运动方程组的影响*

施惟慧[1], 王曰朋[2]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;
2. 南京信息工程大学 数学系, 南京 210044)

(周哲玮推荐)

摘要: 综述了大气运动基本方程组在光滑函数类中的稳定性和 Navier-Stokes 方程的不稳定性的若干结论. 在此基础上, 以大气运动方程组的 Boussinesq 近似为例, 阐述了 Navier-Stokes 方程的不稳定性导致的大气运动基本方程组的某些简化模式的不稳定性, 从而得到在简化基本方程过程中应该遵守的一个原则, 以保证简化方程的稳定性.

关 键 词: 大气运动基本方程组; Navier-Stokes 方程; Boussinesq 近似; 稳定性; 奇异方程

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

流体力学中的Navier-Stokes 方程是研究不可压、粘性流体运动规律的基本方程, 它的导出基于 3 个守恒定律 ——动量守恒、质量守恒、能量守恒. 作为一种特殊流体的大气, 除了由于它所在空间的特殊性外(重力场以及由于地球旋转所产生的影响等), 导出大气运动的基本方程组也基于几个守恒定律: 动量、质量及能量守恒、水物质守恒、其它气体和气溶胶物质守恒定律. 因此, 大气运动基本方程组应该包括 $8+m$ 个方程(m 代表气溶胶种类数). 它区别于一般流体运动方程的特别之处还在于方程组中包含了表现形式复杂的汇、源附加项. 在许多情形特别是在实际预报工作中, 常会略去分子粘性的影响, 而将大气当作仅仅具有湍流粘性的不可压流体, 这时基本方程组中的3 个速度方程及连续方程的主体部分与Navier-Stokes 方程在表达形式上几乎完全一样. 那么 Navier-Stokes 方程的 $C^k(k\geqslant 2)$ 奇异性(即不稳定性)是否会对大气运动方程的稳定性也产生不好的影响呢? 显然, 这种关于方程稳定性的疑问是必须弄清楚的, 否则在处理一系列实际预报问题而采取的常用方法——用数值计算去求数值解将失去依据.

本文在《大气运动基本方程组的稳定性分析》和对 Navier-Stokes 方程已有结论的基础上[1-2], 以大气动力学基本方程组的 Boussinesq 近似为例, 讨论了涉及大气运动基本方程组在

* 收稿日期: 2005-01-20; 修订日期: 2006-12-12
基金项目: 国家自然科学基金“十五”重大研究计划资助项目(90411006)
作者简介: 施惟慧(1936—), 女, 北京人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. E-mail: eduwyp@163.com);
王曰朋(1970—), 男, 山东惠民人, 博士(E-mail: eduwyp@163.com).

简化过程中有关稳定性的一些问题.

1　关于大气运动基本方程组的 C^k 稳定性研究的一些结论

设局地直角坐标中的大气基本方程组[3-4]中的所有参数函数(包括汇、源以及耗散)都是 C^∞ 的,湍流粘性力使用半经验理论公式[4-5],并假设各种粘性系数均严格大于 0,且假设它们为 $(x, y, z, t) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 和未知函数的已知并充分光滑的函数.

则已有结论如下:

® 局地直角坐标系中的大气运动基本方程组是 C^∞ 稳定方程;

® 超曲面 $\Sigma_4:\{t = g_4(x, y, z)\} \subset R^4$ 上的初值问题与超曲面 $\Sigma_3:\{z = g_3(x, y, t)\} \subset R^4$ 上的初值问题都可能构成适定问题,并给出了使问题适定的充要条件;

® 超平面 $\pi_4:\{z = 0\} \subset R^4$ 和超平面 $\pi_3:\{t = 0\} \subset R^4$ 上的初值问题不适定.

总之,局地直角坐标系中的大气运动基本方程组是一个好方程[2],[6],虽然两类典型的初值问题不适定,但是,从要求解决的实际问题角度来看,还是有办法克服这种困难的.

2　关于 Navier-Stokes 方程 $C^k(k \geqslant 2)$ 不稳定性的一些结论

描述粘性、不可压流体运动规律的 Navier-Stokes 方程[7]如下:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(x, y, z, t),$$

$$\mathrm{div} \cdot \boldsymbol{u} = 0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \kappa\Delta T + Q\right),$$

$(x, y, z, t) \in R^4 = V$, 未知函数 $(u, v, w, P) \in (R_+)^4 = Z$(或 $Z = R^3 \times R_+ \times R_+^*$) 密度 $\rho > 0$ 是常数(体现不可压假设),粘性系数 $\nu > 0$($\kappa > 0$)假设为常数(或 x, y, z, t 的函数),Q 是源或汇,可假设为自变量、未知函数及其一阶微分的充分光滑的函数. 在不计热力学方程时,将其记为 $D_{N\text{-}S}$.

主要结论如下:

® $D_{N\text{-}S}$是 $C^k(k \geqslant 2)$ 不稳定方程;按照不稳定方程的定义[1-2],[6],这个结论意味着在 $k(k \geqslant 2)$ 阶连续可微函数类中,Navier-Stokes 方程所有的定解问题都是不适定的. 此结论是通过证明 D 的横截层是空集 $S^t_{3,k-1}(D_{N\text{-}S}) = \varnothing(k \geqslant 2)$ 而得到的.

® Navier-Stokes 方程的初、边值问题允许存在解析解. 但是作为不适定问题的解,它们只是一些没有实际用处的形式解(不适定问题的解称为方程的形式解).

® 广义 Navier-Stokes 方程是 $C^k(k \geqslant 2)$ 不稳定方程;"广义"包含了以下几种情况:

1) Navier-Stokes 方程中的 $\boldsymbol{F}$ 可以是时、空坐标以及未知函数的充分光滑的任意函数的情况:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z, t, \boldsymbol{u}, P, T).$$

2) 由原来的 Navier-Stokes 方程"耦合"了一部分"非退化"方程构成的新方程组,比如对常见的 Navier-Stokes 方程 $D_{N\text{-}S}$,同时需要考虑温度 T 的变化时,再"耦合"热力学方程 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = \kappa\Delta T + Q$,既所谓完备的 Navier-Stokes 方程.

3) 由若干组形如 Navier-Stokes 方程的方程组成.

这些结论和有关定理的证明请参看文献[1]和文献[2].

3 大气运动基本方程组简化过程中的一些问题

本节主要讨论大气运动基本方程组的 Boussinesq 近似所涉及的一些问题．在研究大气运动的中尺度问题时，常使用两种模式：浅对流方程组和深对流方程组．其中的浅对流方程组就是大气运动基本方程组经尺度分析，略去一些次要项所得，这种近似被称为 Boussinesq 近似．当略去分子粘性力并不计气溶胶介质的干空气并考虑湍流粘性与耗散时，它在局地直角坐标系中的一般形式为[5],[8-9]：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_1} + fu_2 + k_{\mathrm{L}}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + k_{\mathrm{H}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2},\\
&\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_2} - fu_1 + k_{\mathrm{L}}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + k_{\mathrm{H}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2},\\
&\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_3} + g\frac{\theta'}{\theta_0} + k_{\mathrm{L}}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) + k_{\mathrm{H}}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2},\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right) + \frac{N^2}{g}u_3 = \hat{k}_{\mathrm{L}}\left(\frac{\partial^2\theta'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta'}{\partial x_2^2}\right) + \hat{k}_{\mathrm{H}}\frac{\partial^2\theta'}{\partial x_3^2},
\end{aligned}
$$

其中 $(x_1, x_2, x_3, t) \in R^4 = V$, 未知函数 $(u_1, u_2, u_3, p', \theta') \in (R_+)^3 \times (R_+^*)^2 = Z$, p'、θ' 代表压力和位温的扰动量, θ_0、ρ_0 被假设为垂直坐标 $z = x_3$ 的已知函数, $N^2 = g(\partial/\partial x_3)(\ln\theta_0)$．方程中的参数函数和所有的湍流粘性系数和耗散系数可以假设为时空坐标、未知函数的充分光滑的函数或常数，将此方程记为 D．

将这个方程与 Navier-Stokes 方程做比较可看到，在外表上除了此方程组中的水平与垂直粘性系数(即 k_{L} 与 k_{H}, $\hat{k}_{\mathrm{L}}$ 与 $\hat{k}_{\mathrm{H}}$) 不同外，连续方程的表现形式则与不可压流体的连续方程完全一样．也正是连续方程的这种“表现一致性”，才使得浅对流方程组的 $C^k(k \geqslant 2)$ 稳定性遭到了破坏．这个结论可直接由关于广义 Navier-Stokes 方程的 C^k 不稳定性定理推得，但为了直观起见，这里仍给予一个简单证明．

定理　浅对流方程组 D 是 $C^k(k \geqslant 2)$ 不稳定方程．

证明简述　根据稳定方程的判别定理[1-2],[6]，需要证明 D 的横截层是空集：$S^t_{3,k-1}(\mathrm{D}) = \varnothing(k \geqslant 2)$．为此，根据横截层的性质[1-2],[6]，只须证明下述代数方程组不存在“稳定的”唯一解即可：

$$
\begin{aligned}
&[k_{\mathrm{L}}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k_{\mathrm{H}}\lambda_3^2]X_1 = Y_1,\\
&[k_{\mathrm{L}}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k_{\mathrm{H}}\lambda_3^2]X_2 = Y_2,\\
&[k_{\mathrm{L}}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k_{\mathrm{H}}\lambda_3^2]X_3 = Y_3,\\
&(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)X_4 = \widetilde{Y}_4,\\
&\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = Y_4,\\
&[\hat{k}_{\mathrm{L}}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \hat{k}_{\mathrm{H}}\lambda_3^2]X_5 = Y_5,
\end{aligned}
$$

未知数是 $X_i(i = 1 \sim 5)$．

显然，无论 $\lambda_j(j = 1, 2, 3)$ 取什么值，这个代数方程组永远不会存在“稳定的”唯一解．因此 D 的横截层是空集：

$$S^t_{3,k-1}(\mathrm{D}) = \varnothing \quad (k \geqslant 2).$$

按照不稳定方程的定义, 浅对流方程组 D 是 $C^k(k \geqslant 2)$ 不稳定方程. 定理证毕.

对上述定理中所说"稳定的"唯一解的含义略加解释: 这个代数方程组来自对纤维空间 $\rho: E_{3,k-1}(\mathrm{D}) \to W_{3,k-1}(V, Z)$ 的分层[1-2],[6]. 如果未知数 X_i 的存在并唯一的条件以不等式形式出现, 则表示分层的结果中, 局部平凡的子纤维空间 $\rho^t: E^t_{3,k-1}(\mathrm{D}) \to S^t_{3,k-1}(\mathrm{D})$ 的基底空间 $S^t_{3,k-1}(\mathrm{D})$ 不是空集, 即 D 的横截层非空 $S^t_{3,k-1}(\mathrm{D}) \neq \varnothing$, 同时 $S^t_{3,k-1}(\mathrm{D})$ 是 $W_{3,k-1}(\mathrm{D}) \subset W_{3,k-1}(V, Z)$ 的稠密开集. 根据分层理论的一个基本定理[1-2],[6], 所论的偏微分方程是稳定方程. 而浅对流方程组的横截层是空集, 于是此方程是不稳定方程.

4 说 明

1) 对于浅对流方程组 D, 纤维空间

$$\rho: E_{3,k-1}(\mathrm{D}) \to W_{3,k-1}(V, Z)$$

的分层为

$$W_{3,k-1}(V, Z) = W_{3,k-1}(\mathrm{D}) \cup T_{3,k-1}(\mathrm{D}) = S^0_{3,k-1}(\mathrm{D}) \cup S^5_{3,k-1}(\mathrm{D}) \cup T_{3,k-1}(\mathrm{D}),$$

横截层是空集 $S^t_{3,k-1}(\mathrm{D}) = \varnothing$.

子纤维空间

$$\rho^0: E^0_{3,k-1}(\mathrm{D}) \to S^0_{3,k-1}(\mathrm{D})$$

和 $$\rho^5: E^5_{3,k-1}(\mathrm{D}) \to S^5_{3,k-1}(\mathrm{D})$$

都是局部平凡的纤维空间(上标 0 和 5 代表纤维的维数). 以上是对浅对流方程组 D 拓扑性质的完整分析. 利用它的拓扑性质, 可构造不适定问题的形式解, 在有必要时可从反面处理一些"有麻烦的"问题, 比如说明定解问题的不适定性等.

由定理可看到, 大气运动基本方程组的 Boussinesq 近似—浅对流方程组与 Navier-Stokes 方程有着相同的拓扑性质: 横截层是空集, 也就是说, 从它们的拓扑学特征角度讲, 这两个方程组没有区别.

2) 如果不计湍流粘性摩擦, 这时的浅对流方程组就与描写无粘、不可压流体运动的 Euler 方程一样, 是个好方程[1-2],[6]: 其横截层非空. 在方程中出现的参数都是其变量的无穷可微函数的假设下, 它们都是 C^∞ 稳定方程. 对解析的适定问题, 根据横截层的条件就可算出其稳定的解析解(局部解).

3) 对于大气运动基本方程的滞弹性近似, 如果考虑湍流粘性的作用, 则它与浅对流方程组一样, 是 $C^k(k \geqslant 2)$ 不稳定方程; 如果不计湍流粘性影响, 它也与 Euler 方程一样是个好方程[2].

4) 通过对本文涉及的大气运动基本方程组的两类简化形式的拓扑性质分析以及它们和 Navier-Stokes 的比较, 可以肯定的是, 在简化方程时应该避免湍流粘性力与不可压假设的同时出现, 以保证简化方程的稳定性, 从而使简化的初衷得以实现.

5) 如果将水汽方程、气溶胶方程都考虑在内, 定理的结论不变.

[参 考 文 献]

[1] SHIH Wei-hui. Solutions Analytiques de Quelques Equations aux Derives Partielles en Mecanique des Fluids [M]. Paris, France: Hermann, 1992, 93-114.

[2] 施惟慧, 陈达段, 何幼桦. 分层理论与非线性偏微分方程基础[M]. 上海: 上海大学出版社, 2001, 10-152, 134-186.
[3] 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础(第一卷)[M]. 北京: 科学出版社, 1979, 1-22.
[4] 刘式适, 刘式达. 大气动力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1999, 1-33.
[5] 吕美仲, 侯志明, 周毅. 动力气象学[M]. 北京: 气象出版社, 2004, 169-173.
[6] SHIH Wei-shu. Stratifications et Equations aux Derivees Partie-lles, Singularities of Maps and Applications to Differential Equations [M]. Paris, France: Hermann, Collections TRAVAUX EN COURS, 1997, **54**: 95-124.
[7] Landau L, Lifchitz E. Mecanique des Fluides [M]. Moscou: Editions Mir Moscou, 1971, 31-122.
[8] 张玉玲. 中尺度大气动力学引论[M]. 北京: 气象出版社, 1999, 10-16.
[9] 余志豪, 杨大升, 贺海晏, 等. 地球物理流体力学[M]. 北京: 气象出版社, 1996, 37-128.

Impact of Singularity of Navier-Sokes Equation Upon the Atmospheric Motion Equations

SHI Wei-hui, WANG Yue-peng
(1. Department of Mathematics, Shanghai University,
Shanghai 200444, P.R. China;
2. Department of Mathematics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, P.R. China)

Abstract: Some conclusions about the smooth function classes stability for the basic system of equations of atmospheric motion and instability for Navier-Stokes equation are summarized. On the basis of this, by taking the basic system of equations of atmospheric motion via Boussinesq approximation as an example to explain in detail that the instability about some simplified models of the basic system of equations for atmospheric motion is caused by the instability of Navier-Stokes equation, thereby, a principle to guarantee the stability of simplified equation is drawn in simplifying the basic system of equations.

Key words: the basic system of equations of atmospheric motion; Navier-Stokes equation; Boussinesq approximation; stability; singular equation