文章编号: 1000-0887(2007)05-0603-11

耦合非线性 Klein-Gordon 方程组的整体解*

甘在会, 张 健

(1. 四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610068)

(李继彬推荐)

摘要: 研究二维空间中一类耦合非线性 Klein-Gordon 方程组的整体解. 首先, 通过构造交叉强制变分问题且建立发展流的交叉不变流形, 得到了该方程组解爆破和整体存在的一个最佳条件. 然后利用尺度变换讨论证明了当初值为多小时, 该方程组的整体解存在.

关 键 词: 耦合非线性 Klein-Gordon 方程组; 整体解; 爆破; 交叉强制变分问题; 最佳条件

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

考虑二维空间中耦合非线性 Klein-Gordon 方程组的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a_1 u = (b_{11}|u|^2 + b_{12}|v|^2)u, & t > 0, x \in R^2, \\ v_{tt} - \Delta v + a_2 v = (b_{21}|u|^2 + b_{22}|v|^2)v, & t > 0, x \in R^2, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x), \ u_t(0, x) = u_1(x), & x \in R^2, \\ v(0, x) = v_0(x), \ v_t(0, x) = v_1(x), & x \in R^2. \end{cases} \tag{2}$$

其中 (u, v) 是关于 $(t, x) \in R^+ \times R^2$ 的实值函数对, $a_j > 0$ 和 $b_{jk} > 0 (j, k = 1, 2)$ 是实参数. 方程组(1) 描述了质量分别为 a_1 和 a_2 的两个场的相互作用. 对于耦合 Klein-Gordon 方程组整体解的研究, 已有了一些工作(见文献[1]至文献[5]和文献[8]至文献[12]). 在文献[1]中, Guo 和 Yuan 研究了二维空间中的 Klein-Gordon-Zakharov 方程, 用所谓的连续方法及精妙的先验估计式, 在没有柯西初值充分小的假设下, 证明了该方程 Cauchy 问题整体光滑解的存在唯一性. Bachelot[2] 和 Georgiev[4] 通过改进 Klainerman[8] 引入的零条件技术, 分别证明了两类在物理上具有重要意义的系统 Dirac-Klein-Gordon 系统和 Maxwell-Dirac 系统整体解的存在性结果(也可参见文献[3]). 关于方程组(1) 的研究, 已有了部分结果(见 Zhang[6]).

本文研究方程组(1) 的整体解. 我们将构造一类交叉强制变分问题, 并研究它的性质, 然后将它应用于 Klein-Gordon 方程组(1). 利用由柯西问题(1)式和(2)式生成的交叉不变流形, 我们得到了 Cauchy 问题(1)式和(2)式解爆破和整体存在的一个最佳条件. 此外, 利用这个最

* 收稿日期: 2006-04-04; 修订日期: 2007-03-09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271084); 四川省青年科技基金资助项目(07JQ0094)
作者简介: 甘在会(1975—), 女, 重庆人, 博士(联系人. Tel: +86-28-84764421; E-mail: ganzaihui2008cn@yahoo.com.cn).

佳条件,我们还得到了柯西问题(1)式和(2)式整体解存在的另一个充分条件．这个充分条件回答了当初值为多小时,柯西问题(1)式和(2)式的整体解存在这个问题.

本文,为了简便,我们用 $\int \cdot \mathrm{d}x$ 表示 $\int_{R^2} \cdot \mathrm{d}x$.

1 预备知识和交叉强制变分问题

根据Segal[7]中的古典半群方法(也可见 Georgiev[3]),可得到柯西问题(1)式和(2)式的局部适定性结论.

命题 1 令 $(u_0, v_0, u_1, v_1) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2) \times L^2(R^2) \times L^2(R^2)$. 则对某一 $T \in (0, \infty)$, 柯西问题(1)式和(2)式在最大时间区间$[0, T)$上存在唯一解$(u(t, x), v(t, x))$使得$(u, v) \in C([0, T); H^1(R^2) \times H^1(R^2))$, 或者 $T = \infty$, 或者 $T < \infty$ 且 $\lim\limits_{t \to T}(\|u\|_{H^1(R^2)} + \|v\|_{H^1(R^2)}) = \infty$. 此外, 对 $\forall t \in [0, T)$, (u, v) 满足能量守恒:

$$E(t) = E(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)) = E(u_0, v_0, u_1, v_1) = E(0), \tag{3}$$

其中

$$E(t) = \frac{1}{2}\int (p|u_t|^2 + |v_t|^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int (p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int (pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\mathrm{d}x, \tag{4}$$

这里 $p = b_{21}/b_{12} > 0$.

命题 2 令 $(u_0, v_0, u_1, v_1) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2) \times L^2(R^2) \times L^2(R^2)$ 且 (u, v) 是柯西问题(1)式和(2)式在$[0, T)$上的一个解．设

$$F(t) := \int (p|u|^2 + |v|^2)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

于是可得

$$F'(t) = \int (2puu_t + 2vv_t)\mathrm{d}x, \tag{6}$$

$$F''(t) = 2\int (p|u_t|^2 + |v_t|^2)\mathrm{d}x - 2\int (p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + pa_1|u|^2 + a_2|v|^2 - pb_{11}|u|^4 - b_{22}|v|^4 - 2b_{21}|u|^2|v|^2)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

当 $(\phi, \psi) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2)$ 时, 定义如下的泛函及流形:

$$J(\phi, \psi) := \frac{1}{2}\int (p|\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2 + pa_1|\phi|^2 + a_2|\psi|^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int (pb_{11}|\phi|^4 + b_{22}|\psi|^4 + 2b_{21}|\phi|^2|\psi|^2)\mathrm{d}x, \tag{8}$$

$$K(\phi, \psi) := \int (pa_1|\phi|^2 + a_2|\psi|^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int (pb_{11}|\phi|^4 + b_{22}|\psi|^4 + 2b_{21}|\phi|^2|\psi|^2)\mathrm{d}x, \tag{9}$$

$$I(\phi, \psi) := \int (p|\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int (pb_{11}|\phi|^4 + b_{22}|\psi|^4 + 2b_{21}|\phi|^2|\psi|^2)\mathrm{d}x, \tag{10}$$

$$N := \left\{(\phi, \psi) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2) \setminus \left\{(0, 0)\right\}, K(\phi, \psi) = 0\right\}, \tag{11}$$

$$M := \left\{(\phi, \psi) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2), I(\phi, \psi) = 0, K(\phi, \psi) < 0\right\}. \tag{12}$$

此外,定义一个强制变分问题

$$d_N := \inf_{(\phi,\psi)\in N} J(\phi,\psi). \tag{13}$$

于是下面的3 个引理成立.

引理 1 $d_N > 0$.

证明 令 $(\phi,\psi)\in N$. 由 $(\phi,\psi)\neq(0,0)$ 及 $K(\phi,\psi)=0$ 可得

$$J(\phi,\psi)=\frac{1}{2}p\int|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x. \tag{14}$$

于是 $(\phi,\psi)\neq(0,0)$ 及(14) 式蕴涵着对任意的 $(\phi,\psi)\in N$, $J(\phi,\psi)>0$. 故由(13) 式知 $d_N\geqslant 0$. 下面用反证法证明 $d_N\neq 0$. 假设 $d_N=0$, 由(13) 式知存在一个序列 $(\phi_n,\psi_n)\subset N$ 使得 $K(\phi_n,\psi_n)=0$, 且当 $n\to\infty$ 时, $J(\phi_n,\psi_n)\to 0$. 因此, 由(14) 式知, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\frac{1}{2}p\int|\nabla\phi_n|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int|\nabla\psi_n|^2\mathrm{d}x\to 0. \tag{15}$$

根据 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\int|\varphi|^4\mathrm{d}x\leqslant C\left(\int|\varphi|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x\right) \tag{16}$$

及 $K(\phi_n,\psi_n)=0$ 可得

$$\begin{aligned}
&pa_1\int|\phi_n|^2\mathrm{d}x+a_2\int|\psi_n|^2\mathrm{d}x=\\
&\quad\frac{1}{2}pb_{11}\int|\phi_n|^4\mathrm{d}x+\frac{1}{2}b_{22}\int|\psi_n|^4\mathrm{d}x+b_{21}\int|\phi_n|^2|\psi_n|^2\mathrm{d}x\leqslant\\
&\quad\frac{1}{2}pb_{11}\int|\phi_n|^4\mathrm{d}x+\frac{1}{2}b_{22}\int|\psi_n|^4\mathrm{d}x+\frac{1}{2}b_{21}\int|\phi_n|^4\mathrm{d}x+\frac{1}{2}b_{21}\int|\psi_n|^4\mathrm{d}x\leqslant\\
&\quad\left(\frac{1}{2}pb_{11}+\frac{1}{2}b_{21}\right)C\left(\int|\phi_n|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int|\nabla\phi_n|^2\mathrm{d}x\right)+\\
&\quad\left(\frac{1}{2}b_{22}+\frac{1}{2}b_{21}\right)C\left(\int|\psi_n|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int|\nabla\psi_n|^2\mathrm{d}x\right)\leqslant\\
&\quad h\left[\left(\int|\phi_n|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int|\nabla\phi_n|^2\mathrm{d}x\right)+\left(\int|\psi_n|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int|\nabla\psi_n|^2\mathrm{d}x\right)\right].
\end{aligned} \tag{17}$$

本文, C 表示任意的正常数, $h=\max\left\{\left(pb_{11}/2+b_{21}/2\right)C,\left(b_{22}/2+b_{21}/2\right)C\right\}$. 对于(17) 式中的 h, 由(15) 式知, 当 n 充分大时,

$$\begin{aligned}
&pa_1\int|\phi_n|^2\mathrm{d}x+a_2\int|\psi_n|^2\mathrm{d}x>\\
&\quad h\left[\left(\int|\phi_n|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int|\nabla\phi_n|^2\mathrm{d}x\right)+\left(\int|\psi_n|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int|\nabla\psi_n|^2\mathrm{d}x\right)\right],
\end{aligned}$$

此与(17) 式矛盾. 故 $d_N\neq 0$. 由于我们已证明 $d_N\geqslant 0$, 故 $d_N>0$.

引理 2 存在 $(\phi,\psi)\in H^1(R^2)\times H^1(R^2)\setminus\{(0,0)\}$ 使得 $K(\phi,\psi)=0$ 且 $I(\phi,\psi)=0$.

证明 定义泛函 $Q(\phi,\psi)$ 为

$$\begin{aligned}
Q(\phi,\psi):=&\int(pa_1|\phi|^2+a_2|\psi|^2)\mathrm{d}x+\int(p|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2)\mathrm{d}x-\\
&\int(pb_{11}|\phi|^4+b_{22}|\psi|^4+2b_{21}|\phi|^2|\psi|^2)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

根据 Zhang[6] 知, 存在 $(\phi,\psi)\in H^1(R^2)\times H^1(R^2)\setminus\{(0,0)\}$ 使得 $Q(\phi,\psi)=0$ 且 (ϕ,ψ) 为如下椭圆方程组的解:

$$\begin{cases}-\Delta\phi+a_1\phi=(b_{11}|\phi|^2+b_{12}|\psi|^2)\phi,\\ -\Delta\psi+a_2\psi=(b_{21}|\phi|^2+b_{22}|\psi|^2)\psi.\end{cases} \tag{18}$$

此外,用 $px\cdot\nabla\phi$ 及 $x\cdot\nabla\psi$ 分别乘(18)式中第1式及第2式,然后关于 x 积分得

$$\int(pa_1|\phi|^2+a_2|\psi|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int(pb_{11}|\phi|^4+b_{22}|\psi|^4+2b_{21}|\phi|^2|\psi|^2)\mathrm{d}x=0,$$

即 $K(\phi,\psi)=0$. 故由 $Q(\phi,\psi)=0$ 可得 $I(\phi,\psi)=0$.

引理3 M 是一非空集.

证明 由引理2知,存在 $(\phi,\psi)\in H^1(R^2)\times H^1(R^2)\setminus\{(0,0)\}$ 使得 $K(\phi,\psi)=0$ 且 $I(\phi,\psi)=0$. 故对 $\forall\lambda>1$, 令 $\phi_\lambda(x)=\lambda\phi(\lambda x)$, $\psi_\lambda(x)=\lambda\psi(\lambda x)$. 于是 $(\phi_\lambda,\psi_\lambda)\in H^1(R^2)\times H^1(R^2)\setminus\{(0,0)\}$ 并由(9)式和(10)式可得

$$K(\phi_\lambda,\psi_\lambda)=\int(pa_1|\phi|^2+a_2|\psi|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\lambda^2\int(pb_{11}|\phi|^4+b_{22}|\psi|^4+2b_{21}|\phi|^2|\psi|^2)\mathrm{d}x<0,$$

$$I(\phi_\lambda,\psi_\lambda)=\lambda^2\int(p|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\lambda^2\int(pb_{11}|\phi|^4+b_{22}|\psi|^4+2b_{21}|\phi|^2|\psi|^2)\mathrm{d}x=0.$$

于是 $(\phi_\lambda,\psi_\lambda)\in M$. 由此知 M 是一非空集.

然后我们定义一个交叉强制变分问题

$$d_M:=\inf_{(\phi,\psi)\in M}J(\phi,\psi).\tag{19}$$

于是可得

引理4 $d_M>0$.

证明 令 $(\phi,\psi)\in M$. 由 $K(\phi,\psi)<0$ 可得 $(\phi,\psi)\neq(0,0)$. 由 $I(\phi,\psi)=0$ 知

$$J(\phi,\psi)=\frac{1}{2}pa_1\int|\phi|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}a_2\int|\psi|^2\mathrm{d}x.\tag{20}$$

(20)式和 $(\phi,\psi)\neq(0,0)$ 蕴涵着对任意 $(\phi,\psi)\in M$ 都有 $J(\phi,\psi)>0$. 故由(19)式知 $d_M\geqslant0$. 下面,我们将用反证法证明 $d_M\neq0$. 如果 $d_M=0$, 由(19)式知,存在序列 $(\phi_n,\psi_n)\subset M$ 使得 $I(\phi_n,\psi_n)=0$, $K(\phi_n,\psi_n)<0$ 及当 $n\to\infty$ 时, $J(\phi_n,\psi_n)\to0$. 故由(20)式知,当 $n\to\infty$ 时,

$$\frac{1}{2}pa_1\int|\phi_n|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}a_2\int|\psi_n|^2\mathrm{d}x\to0.\tag{21}$$

由Gagliardo-Nirenberg不等式, $K(\phi_n,\psi_n)<0$ 及 $I(\phi_n,\psi_n)=0$ 知

$$\begin{aligned}&\int(p|\nabla\phi_n|^2+|\nabla\psi_n|^2)\mathrm{d}x+\int(pa_1|\phi_n|^2+a_2|\psi_n|^2)\mathrm{d}x<\\&\quad\int(pb_{11}|\phi_n|^4+b_{22}|\psi_n|^4+2b_{21}|\phi_n|^2|\psi_n|^2)\mathrm{d}x\leqslant\\&\quad(pb_{11}+b_{21})C\left(\int|\phi_n|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int|\nabla\phi_n|^2\mathrm{d}x\right)+\\&\quad(b_{22}+b_{21})C\left(\int|\psi_n|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int|\nabla\psi_n|^2\mathrm{d}x\right).\end{aligned}\tag{22}$$

由(21)式和(22)式知,当 $n\to\infty$ 时, $\int(p|\nabla\phi_n|^2+|\nabla\psi_n|^2)\mathrm{d}x<0$. 此与 $\int(p|\nabla\phi_n|^2+|\nabla\psi_n|^2)\mathrm{d}x\geqslant0$ 矛盾. 故 $d_M\neq0$. 因此 $d_M>0$.

现在我们定义

$$d:=\min\{d_N,d_M\}.\tag{23}$$

由引理1及引理4可得

引理5 $d > 0$.

下面我们进一步定义

$$S := \left\{ (\phi, \psi) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2), J(\phi, \psi) < d, K(\phi, \psi) < 0, I(\phi, \psi) < 0 \right\}.$$

于是如下的结论成立.

引理6 S 是一非空集.

证明 由引理2知, 存在 $(\phi, \psi) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2) \setminus \left\{ (0, 0) \right\}$ 使得 $K(\phi, \psi) = 0$ 和 $I(\phi, \psi) = 0$. 因 $d > 0$, 故由(8)式、(9)式和(10)式知, 存在 $\lambda > 1$ 使得

$$K(\lambda\phi, \lambda\psi) = \lambda^2 \int (pa_1 |\phi|^2 + a_2 |\psi|^2) \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\lambda^4 \int (pb_{11} |\phi|^4 + b_{22} |\psi|^4 + 2b_{21} |\phi|^2 |\psi|^2) \mathrm{d}x < 0,$$

$$I(\lambda\phi, \lambda\psi) = \lambda^2 \int (p |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2) \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\lambda^4 \int (pb_{11} |\phi|^4 + b_{22} |\psi|^4 + 2b_{21} |\phi|^2 |\psi|^2) \mathrm{d}x < 0,$$

$$J(\lambda\phi, \lambda\psi) = \frac{1}{2}\lambda^2 \int (p |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2) \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\lambda^2 \int (pa_1 |\phi|^2 + a_2 |\psi|^2) \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\lambda^4 \int (pb_{11} |\phi|^4 + b_{22} |\psi|^4 + 2b_{21} |\phi|^2 |\psi|^2) \mathrm{d}x < d.$$

于是 $(\lambda\phi, \lambda\psi) \in S$. 故 S 是一非空集.

引理7 令 $E(0) < d$. 则 S 是柯西问题(1)式和(2)式的一个不变流形.

证明 令 $\left(u_0(x), v_0(x) \right) \in S$. 由命题1知, 存在一个唯一的 $\left(u(t, x), v(t, x) \right) \in C\left([0, T); H^1(R^2) \times H^1(R^2) \right)$, 且 $T \leqslant \infty$ 使得 $\left(u(t, x), v(t, x) \right)$ 是柯西问题(1)式和(2)式的一个解. 由(3)式、(4)式及(8)式可得

$$J(u, v) < E(t) = E(0) < d.$$

我们首先证明对任意 $t \in [0, T), K\left(u(t, x), v(t, x) \right) < 0$. 否则, 由连续性可知, 存在一个 $t_0 \in (0, T)$ 使得 $K\left(u(t_0, x), v(t_0, x) \right) = 0$. 注意到 $E(t_0) = E(0)$ 及 $K(u_0(x), v_0(x)) < 0$ 可得 $\left(u(t_0, x), v(t_0, x) \right) \neq (0, 0)$. 根据(13)式和(23)式知, $J\left(u(t_0, x), v(t_0, x) \right) \geqslant d_N \geqslant d$. 此与 $J(u, v) < d$ 矛盾. 因此, 对任意 $t \in [0, T), K\left(u(t, x), v(t, x) \right) < 0$.

现在我们证明对任意 $t \in [0, T), I\left(u(t, x), v(t, x) \right) < 0$. 否则, 由连续性可知, 存在一个 $t_1 \in (0, T)$ 使得 $I\left(u(t_1, x), v(t_1, x) \right) = 0$. 因我们已经证明 $K\left(u(t, x), v(t, x) \right) < 0$, 故有 $\left(u(t_1, x), v(t_1, x) \right) \in M$. 根据(19)式及(23)式可得 $J\left(u(t_1, x), v(t_1, x) \right) \geqslant d_M \geqslant d$. 此与 $J(u, v) < d$ 矛盾. 故对任意 $t \in [0, T), I\left(u(t, x), v(t, x) \right) < 0$.

由上面的讨论可知, 对任意的 $t \in [0, T), \left(u(t, x), v(t, x) \right) \in S$. 于是, 引理7得证.

作类似于引理7的讨论可得

引理8 令 $E(0) < d$. 定义

$$S_1 := \left\{ (\phi, \psi) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2), J(\phi, \psi) < d, K(\phi, \psi) > 0 \right\},$$

$$S_2 := \left\{ (\phi, \psi) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2), J(\phi, \psi) < d, K(\phi, \psi) < 0, I(\phi, \psi) > 0 \right\}.$$

则 S_1 和 S_2 都是柯西问题(1)式和(2)式的不变流形.

自然地, 我们称 S 和 S_2 为柯西问题(1)式和(2)式的交叉不变流形.

根据 S、S_1 和 S_2 的定义, 注意到(13)式, (19)式及(23)式, 可得到如下结论:

引理 9

$$\left\{(\varphi, \psi) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2) \setminus \left\{(0,0)\right\}, J(\varphi, \psi) < d\right\} = S \cup S_1 \cup S_2.$$

2 解爆破和整体存在的最佳条件

定理 1 设 (u_0, v_0) 和 (u_1, v_1) 满足 $E(0) < d$. 如果 $(u_0, v_0) \in S$, 则柯西问题(1)式和(2)式的解 $\left(u(t,x), v(t,x)\right)$ 在有限时间内爆破.

为了证明定理 1, 我们首先给出一个引理.

引理 10 令 $(u_0, v_0, u_1, v_1) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2) \times L^2(R^2) \times L^2(R^2)$ 且 $(u(t,x), v(t,x))$ 是柯西问题(1)式和(2)式在 $[0, T)$ 上的一个解. 设

$$F(t) = \int (p|u|^2 + |v|^2)\,\mathrm{d}x. \tag{24}$$

则当 $\left(u(t,x), v(t,x)\right) \in S$ 时, 存在一个 t_1 使得 $F'(t)|_{t=t_1} > 0$.

证明 我们将用反证法证明这个引理. 假设对所有的 t 都成立

$$F'(t) \leqslant 0. \tag{25}$$

由(7)式和(24)式知,

$$\begin{aligned}F''(t) = {} & 2\int (p|u_t|^2 + |v_t|^2)\,\mathrm{d}x - 2\int (pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\,\mathrm{d}x - \\ & 2\int (p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x + \\ & 2\int (pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\,\mathrm{d}x = \\ & 2\int (p|u_t|^2 + |v_t|^2)\,\mathrm{d}x - 2K(u,v) - 2I(u,v).\end{aligned} \tag{26}$$

于是, $\left(u(t,x), v(t,x)\right) \in S$ 蕴涵着 $F''(t) > 0$ 且 $F(t)$ 是一个关于 t 的凸函数. 因此, 由(25)式知, 当 $t \to \infty$ 时, $F(t)$ 必趋于一个有限的非负极限 A. 根据引理 7, 我们可断言 $A > 0$. 故当 $t \to \infty$ 时,

$$F(t) \to A > 0,\quad F'(t) \to 0,\quad F''(t) \to 0.$$

故由(26)式知

$$\lim_{t\to\infty} \int (p|u_t|^2 + |v_t|^2)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{27}$$

及

$$\lim_{t\to\infty} K(u,v) = 0,\quad \lim_{t\to\infty} I(u,v) = 0. \tag{28}$$

现对于固定的 $t > 0$, 令 $u_\lambda(x) = u(x/\lambda)$, $v_\lambda(x) = v(x/\lambda)$. 于是由(9)式和(10)式可得

$$\begin{aligned}K(u_\lambda, v_\lambda) = {} & \lambda^2 \int (pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\,\mathrm{d}x - \\ & \frac{1}{2}\lambda^2 \int (pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}I(u_\lambda, v_\lambda) = {} & \int (p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x - \\ & \frac{1}{2}\lambda^2 \int (pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{30}$$

因 $I(u,v) < 0$, 故由(30)式知, 存在一个 $\lambda^* \in (0,1)$ 使得 $I(u_{\lambda^*}, v_{\lambda^*}) = 0$, 且当 $\lambda \in (\lambda^*, 1)$

时, $I(u_\lambda, v_\lambda) < 0$. 同时, 因为 $K(u,v) < 0$, 所以, 对任意 $\lambda \in (0,1)$, $K(u_\lambda, v_\lambda) < 0$. 于是可得 $I(u_{\lambda^*}, v_{\lambda^*}) = 0$ 且 $K(u_{\lambda^*}, v_{\lambda^*}) < 0$, 即 $(u_{\lambda^*}, v_{\lambda^*}) \in M$. 由(19)式及(23)式可得

$$J(u_{\lambda^*}, v_{\lambda^*}) \geqslant d_M \geqslant d. \tag{31}$$

另一方面, 由 $K(u_{\lambda^*}, v_{\lambda^*}) < 0$ 可得

$$\begin{aligned}
&J(u,v) - J(u_{\lambda^*}, v_{\lambda^*}) = \\
&\quad \frac{1}{2}\int(p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x - \\
&\quad \frac{1}{4}\int(pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\mathrm{d}x - \\
&\quad \Big[\frac{1}{2}\int(p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\lambda^{*2}\int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x - \\
&\quad \frac{1}{4}\lambda^{*2}\int(pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\mathrm{d}x\Big] = \\
&\quad \frac{1}{2}\int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\lambda^{*2}\int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x - \\
&\quad \frac{1}{4}\int(pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\mathrm{d}x + \\
&\quad \frac{1}{4}\lambda^{*2}\int(pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\mathrm{d}x = \\
&\quad \frac{1}{2}\int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x - \\
&\quad \frac{1}{4}\int(pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}K(u_{\lambda^*}, v_{\lambda^*}) \geqslant \\
&\quad \frac{1}{2}\int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x - \\
&\quad \frac{1}{4}\int(pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}K(u,v).
\end{aligned} \tag{32}$$

注意到(31)式可得

$$\frac{1}{2}K(u,v) \leqslant J(u,v) < E(0) < d. \tag{33}$$

故由(19)式、(23)式、(28)式、(31)式及(32)式可得

$$J(u,v) \geqslant J(u_{\lambda^*}, v_{\lambda^*}) \geqslant d, \tag{34}$$

此与(33)式矛盾. 因此, 假设(25)式不成立. 于是, 引理 10 的结论成立.

现在, 我们开始证明定理 1.

定理 1 的证明　根据引理 7, 由 $(u_0(x), v_0(x)) \in S$ 知, 当 $t \in [0, T)$ 时, $(u(t,x), v(t,x)) \in S$. 注意到(3)式、(4)式及(26)式, 可得

$$\begin{aligned}
F''(t) = {} & 6\int(p|u_t|^2 + |v_t|^2)\mathrm{d}x + 2\int(p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\mathrm{d}x + \\
& 2\int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x - 8E(0).
\end{aligned} \tag{35}$$

因 $(u(t,x), v(t,x)) \in S$, 故由引理 10 知, 存在一个时间 t_1 使得 $F'(t)|_{t=t_1} > 0$. 于是, 对所有的 $t > t_1$(在存在区间之内), $F(t)$ 是一增函数. 因此, $2\int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x - 8E(0)$ 将最终变为正且随后将保持为正. 根据(35)式及 $J(u,v) < d\ ((u,v) \in S)$, 对足够大的 t 可得

$$F''(t) \geqslant 6\int (p|u_t|^2 + |v_t|^2)\,\mathrm{d}x. \tag{36}$$

注意到(6)式和(36)式,利用Hölder不等式可得

$$F(t)F''(t) \geqslant (3/2)[F'(t)]^2. \tag{37}$$

因 $[F^{-1/2}(t)]'' = -(1/2)F^{-5/2}(t)[F(t)F''(t) - (3/2)[F'(t)]^2]$, 由(37)式可得 $[F^{-1/2}(t)]'' \leqslant 0$. 因此,对于充分大的 t, $F^{-1/2}(t)$ 是凹的,且存在一个有限时间 T^* 使得 $\lim\limits_{t\to T^*} F^{-1/2}(t) = 0$. 于是可得 $T < \infty$ 且

$$\lim_{t\to T}\left(\|u\|_{H^1(R^2)} + \|v\|_{H^1(R^2)} \right) = \infty.$$

由上面的讨论可知,定理1得证.

定理2 设 (u_0, v_0) 和 (u_1, v_1) 满足 $E(0) < d$. 如果 $(u_0, v_0) \in S_1 \cup S_2$, 则柯西问题(1)式和(2)式的解 $(u(t,x), v(t,x))$ 在 $t \in (0, \infty)$ 上整体存在.

证明 我们将通过两步来证明这个定理.

步骤1 令 $(u_0, v_0) \in S_1$. 对于 $t \in [0, T)$, 由引理8知 $(u(t,x), v(t,x)) \in S_1$. 即对于固定的 $t \in [0, T)$, $J(u,v) < d$, $K(u,v) > 0$. 由 $J(u,v) < d$ 及 $K(u,v) > 0$ 可得 $(u,v) \neq (0,0)$ 且

$$\frac{1}{2}\int (p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x < d. \tag{38}$$

现令 $u_\alpha(x) = \alpha u(x)$, $v_\alpha(x) = \alpha v(x)$. $K(u,v) > 0$ 蕴涵着存在一个 $\alpha^* > 1$ 使得

$$K(u_{\alpha^*}, v_{\alpha^*}) = \alpha^{*2}\int (pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\,\mathrm{d}x - \\ \frac{1}{2}\alpha^{*4}\int (pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{39}$$

及

$$J(u_{\alpha^*}, v_{\alpha^*}) = \frac{1}{2}\alpha^{*2}\int (p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x. \tag{40}$$

根据(39)式及(40)式知, $(u_{\alpha^*}, v_{\alpha^*}) \in N$ 且

$$J(u_{\alpha^*}, v_{\alpha^*}) \geqslant d_N \geqslant d > J(u,v). \tag{41}$$

于是 $J(u,v) - J(u_{\alpha^*}, v_{\alpha^*}) < 0$, 即

$$\frac{1}{2}\int (p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int (pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\,\mathrm{d}x - \\ \frac{1}{4}\int (pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\,\mathrm{d}x - \\ \frac{1}{2}\alpha^{*2}\int (p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x < 0. \tag{42}$$

又由(39)式知

$$-\frac{1}{4}\int (pb_{11}|u|^4 + b_{22}|v|^4 + 2b_{21}|u|^2|v|^2)\,\mathrm{d}x = \\ -\frac{1}{2\alpha^{*2}}\int (pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\,\mathrm{d}x. \tag{43}$$

根据(42)式和(43)式可得

$$\frac{1}{2}\int (p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int (pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\,\mathrm{d}x - \\ \frac{1}{2\alpha^{*2}}\int (pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\,\mathrm{d}x -$$

$$\frac{1}{2}\alpha^{*2}\int(p|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\mathrm{d}x<0,$$

即

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\alpha^{*2}}\right)\int(pa_1|u|^2+a_2|v|^2)\mathrm{d}x<$$
$$\frac{1}{2}(\alpha^{*2}-1)\int(p|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\mathrm{d}x. \tag{44}$$

故(38)式、(44)式及 $\alpha^*>1$ 蕴涵着

$$\int(pa_1|u|^2+a_2|v|^2)\mathrm{d}x+\int(p|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\mathrm{d}x<C.$$

因此,由命题1知,(u,v) 在 $t\in[0,\infty)$ 上整体存在.

步骤2 令 $(u_0,v_0)\in S_2$. 对于 $t\in[0,T)$,由引理8知 $(u(t,x),v(t,x))\in S_2$. 即 $J(u,v)<d,K(u,v)<0$ 且 $I(u,v)>0$. 根据 $I(u,v)>0$ 及 $J(u,v)<d$ 可推知

$$\frac{1}{2}\int(pa_1|u|^2+a_2|v|^2)\mathrm{d}x<d. \tag{45}$$

令 $u_\beta(x)=\beta^{1/2}u(\beta x),v_\beta(x)=\beta^{1/2}v(\beta x)$. 则

$$I(u_\beta,v_\beta)=\beta\int(p|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\mathrm{d}x-$$
$$\frac{1}{2}\int(pb_{11}|u|^4+b_{22}|v|^4+2b_{21}|u|^2|v|^2)\mathrm{d}x. \tag{46}$$

于是 $I(u,v)>0$ 蕴涵着存在 $0<\beta^*<1$ 使得 $I(u_{\beta^*},v_{\beta^*})=0$. 故由(8)式和(10)式知

$$J(u_{\beta^*},v_{\beta^*})=\frac{1}{2}\int(pa_1|u_{\beta^*}|^2+a_2|v_{\beta^*}|^2)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2}\beta^{*-1}\int(pa_1|u|^2+a_2|v|^2)\mathrm{d}x. \tag{47}$$

根据(45)式及(47)式知

$$J(u_{\beta^*},v_{\beta^*})<\beta^{*-1}d. \tag{48}$$

现在我们考虑 $K(u_{\beta^*},v_{\beta^*})$. 由于 $K(u,v)<0$,故 $K(u_{\beta^*},v_{\beta^*})$ 有两种情形. 一种为 i) $K(u_{\beta^*},v_{\beta^*})<0$,另一种为 ii) $K(u_{\beta^*},v_{\beta^*})\geqslant 0$.

首先我们考虑 i) $K(u_{\beta^*},v_{\beta^*})<0$ 的情形. 在这种情形下,注意到 $I(u_{\beta^*},v_{\beta^*})=0$ 可知 $(u_{\beta^*},v_{\beta^*})\in M$. 于是(19)式和(23)式蕴涵者

$$J(u_{\beta^*},v_{\beta^*})\geqslant d_M\geqslant d>J(u,v). \tag{49}$$

故

$$J(u,v)-J(u_{\beta^*},v_{\beta^*})<0. \tag{50}$$

根据 $I(u_{\beta^*},v_{\beta^*})=0$ 及(50)式可得

$$\frac{1}{2}(1-\beta^*)\int(p|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\mathrm{d}x+$$
$$\frac{1}{2}(1-\beta^{*-1})\int(pa_1|u|^2+a_2|v|^2)\mathrm{d}x<0. \tag{51}$$

故(45)式及 $0<\beta^*<1$ 蕴涵着

$$\int(p|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\mathrm{d}x<C. \tag{52}$$

其次,我们考虑 ii) $K(u_{\beta^*},v_{\beta^*})\geqslant 0$ 的情形. 在这种情形下,由(48)式可知

$$J(u_{\beta^*},v_{\beta^*})-\frac{1}{4}K(u_{\beta^*},v_{\beta^*})<\beta^{*-1}d. \tag{53}$$

根据(53)式及 $I(u_{\beta^*}, v_{\beta^*}) = 0$ 可得

$$\frac{1}{2}\beta^{*-1}\int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\beta^{*-1}\int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\beta^*\int(p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\mathrm{d}x < \beta^{*-1}d. \tag{54}$$

于是

$$\beta^{*-1}\int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x + \beta^*\int(p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\mathrm{d}x < 4\beta^{*-1}d. \tag{55}$$

因此,由(45)式、(52)式及(55)式总可以得到

$$\int(p|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\mathrm{d}x + \int(pa_1|u|^2 + a_2|v|^2)\mathrm{d}x < C.$$

故由命题1知, (u, v) 在 $t \in [0, \infty)$ 上整体存在.

由步骤1和步骤2的讨论知,定理2成立.

根据引理9,定理1和定理2,我们可以得到方程组(1)解爆破的一个充分必要条件,即

定理3 设柯西初值 (u_0, v_0, u_1, v_1) 满足 $E(0) < d$, 则柯西问题(1)式和(2)式的解 $(u(t, x), v(t, x))$ 在有限时间内爆破当且仅当 $(u_0, v_0) \in S$.

根据定理2,我们还可以得到方程组(1)解整体存在的另一个充分条件,即

推论1 设柯西初值 $(u_0, v_0, u_1, v_1) \in H^1(R^2) \times H^1(R^2) \times L^2(R^2) \times L^2(R^2)$ 且满足

$$\frac{1}{2}a\|u_0\|^2_{H^1(R^2)} + \frac{1}{2}b\|v_0\|^2_{H^1(R^2)} + \frac{1}{2}p\|u_1\|^2_{L^2(R^2)} + \frac{1}{2}\|v_1\|^2_{L^2(R^2)} < d, \tag{56}$$

其中 $a = \max\{p, pa_1\}$, $b = \max\{1, a_2\}$, 则柯西问题(1)式和(2)式的解 $(u(t,x), v(t,x))$ 在 $t \in [0, \infty)$ 上整体存在.

证明 根据(56)式可得

$$J(u_0, v_0) < E(0) < d.$$

于是,我们可以断言 $K(u_0, v_0) > 0$. 否则, 存在 $0 < \lambda \leqslant 1$ 使得

$$K(\lambda u_0, \lambda v_0) = \lambda^2\int(pa_1|u_0|^2 + a_2|v_0|^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\lambda^4\int(pb_{11}|u_0|^4 + b_{22}|v_0|^4 + 2b_{21}|u_0|^2|v_0|^2)\mathrm{d}x = 0.$$

故

$$J(\lambda u_0, \lambda v_0) \geqslant d_N \geqslant d. \tag{57}$$

另一方面,由(56)式知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}a\|\lambda u_0\|^2_{H^1(R^2)} + \frac{1}{2}b\|\lambda v_0\|^2_{H^1(R^2)} + \frac{1}{2}p\|u_1\|^2_{L^2(R^2)} + \frac{1}{2}\|v_1\|^2_{L^2(R^2)} = \\ &\lambda^2\left(\frac{1}{2}a\|u_0\|^2_{H^1(R^2)} + \frac{1}{2}b\|v_0\|^2_{H^1(R^2)}\right) + \frac{1}{2}p\|u_1\|^2_{L^2(R^2)} + \frac{1}{2}\|v_1\|^2_{L^2(R^2)} < \\ &\frac{1}{2}a\|u_0\|^2_{H^1(R^2)} + \frac{1}{2}b\|v_0\|^2_{H^1(R^2)} + \frac{1}{2}p\|u_1\|^2_{L^2(R^2)} + \frac{1}{2}\|v_1\|^2_{L^2(R^2)} < d.\end{aligned}$$

于是可推知 $J(\lambda u_0, \lambda v_0) < d$. 此与(57)式矛盾. 故 $K(u_0, v_0) > 0$, 即 $(u_0, v_0) \in S_1$. 根据定理2可知,推论1的结论成立.

3 结 论

我们首先通过构造交叉强制变分问题, 并建立发展流的交叉不变流形,得到了耦合非线性 Klein-Gordon 方程组(1)解爆破和整体存在的一个最佳条件;其次, 利用尺度变换讨论证明了

当初值为多小时,方程组(1)的整体解存在.

[参 考 文 献]

[1] Guo B L, Yuan G W. Global smooth solution for the Klein-Gordon-Zakharov equations[J]. J Math Phys, 1995, **36**(8): 4119-4124.

[2] Bachelot A. Probl me de Cauchy globale pour des syst mes de Dirac-klein-Gordon[J]. Ann Inst H Poincar , Physique Th orique, 1988, **48**(4): 387-422.

[3] Georgiev V. Global solution of the system of wave and Klein-Gordon equations[J]. Math Z, 1990, **203**(4): 683-698.

[4] Georgiev V. Small amplitude solutions of the Maxwell-Dirac equations[J]. Indiana Univ Math J, 1991, **40**(3): 845-883.

[5] Georgiev V. Decay estimates for the Klein-Gordon equations[J]. Comm Part Diff Eqns, 1992, **17**: 1111-1139.

[6] Zhang J. On the standing wave in coupled nonlinear Klein-Gordon equations[J]. Math Meth Appl Sci, 2003, **26**(1): 11-25.

[7] Segal I. Nonlinear semigroups[J]. Annals of Mathematics, 1963, **78**(2): 339-364.

[8] Klainerman S. The null condition and global existence to nonlinear wave equations[J]. Lect Appl Math, 1986, **23**: 293-326.

[9] Klainerman S. Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1985, **38**(3): 321-332.

[10] Ozawa T, Tsutaya K, Tsutsumi Y. Normal formal form and global solutions for the Klein-Gordon-Zakharov equations[J]. Annales de I' Institut Henri Poincar , 1995, **12**(4): 459-503.

[11] Shatah J. Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1985, **38**(5): 685-696.

[12] Sideris T. Decay estimates for the three-dimensional inhomogeneous Klein-Gordon equation and applications[J]. Comm Part Diff Eqns, 1989, **14**(10): 1421-1455.

Global Solution for a Coupled Nonlinear Klein-Gordon System

GAN Zai-hui, ZHANG Jian

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, P.R.China)

Abstract: The global solution for a coupled nonlinear Klein-Gordon system in two space dimensions is studied. First, a sharp threshold of blowup and global existence for the system is obtained by constructing a type of cross-constrained variational problem and establishing so-called cross-invariant manifolds of the evolution flow. Then the result of how small the initial data are for which the solution of the system exists globally is proved by using the scaling argument.

Key words: couple nonlinear Klein-Gordon system; Global solution; blow up; cross-constrained variational problem; sharp threshold