

# 资料变分同化中的若干理论问题\*

滕加俊<sup>1,2</sup>, 张 瑰<sup>2</sup>, 黄思训<sup>1,3</sup>

- (1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 解放军理工大学 理学院 数理系, 南京 211101;
3. 解放军理工大学 气象学院, 南京 211101)

(戴世强推荐)

**摘要:** 对变分同化中的若干理论问题进行了研究, 具体讨论了一类简单模式在整体和局部观测资料下的变分同化问题. 对于整体观测资料下的变分同化问题, 利用变分同化方法对预报模式中的初值、参数以及模式进行了修正, 从理论上作出了变分同化方法的误差估计及收敛精度的估计, 证明了变分同化方法的有效性. 对于局部观测资料下的变分同化问题, 由于得到的解往往不恒定, 因而通常的变分同化方法失效. 为了克服问题的不稳定性所带来的困难, 利用变分同化结合正则化方法对预报模式中的初值、参数以及模式进行修正, 同样作出了变分同化方法的误差估计及收敛精度估计, 证明了变分同化与正则化方法结合的必要性和有效性, 并对正则化参数的选择提供了理论判据. 最后, 举了一个实例说明所提出的方法的有效性.

**关键词:** 变分同化; 正则化方法; 收敛精度估计

**中图分类号:** P433      **文献标识码:** A

## 引 言

气象学和物理海洋学模式中的资料变分同化技术的研究和发展是目前国际上的一个热点问题. 资料变分同化方法, 是综合利用模式的动力学信息和各种观测中所包含的信息, 对模式的初边值条件和参数进行最优反演确定. 由于反问题往往是不适定的, 为了克服问题的不稳定性所带来的困难, 黄思训等<sup>[1-3]</sup>把数学物理反问题中的 Tikhonov 正则化思想<sup>[4]</sup>引入资料变分同化方法, 在整体和局部资料的变分同化方法上取得了一系列良好的结果.

在实际问题中, 由于观测误差不可忽略, 同时数值天气预报模式本身不够完善, 不可避免地带有模式偏差, 那么, 观测误差和模式误差究竟对资料变分同化会造成什么样的影响? 关于这方面的理论研究还不是很多. Wergen<sup>[5]</sup>研究了一维浅水模式中的模式误差对于变分同化方法的影响, 发现即使观测资料中存在噪声, 所估计的量也能收敛到可以接受的精度. Chung Lu 和 Gerald L. Browning 在这方面做了一些研究工作(参看文献[6]至文献[8]), 他们通过数学

\* 收稿日期: 2006-12-16; 修订日期: 2007-03-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40675020; 50505005)

作者简介: 滕加俊(1963—), 男, 江苏兴化人, 教授(E-mail: Jjteng@sohu.com);

黄思训(1946—), 男, 上海金山人, 教授, 博士生导师(联系人.Tel: + 86-25-80830634; E-mail: huangsxp@yahoo.com.cn).

分析和数值实验方法,研究了观测误差对于客观分析的影响<sup>[6]</sup>,同时,以常系数线性常微分方程组为例,分析了观测误差和模式误差对于变分同化方法的影响,并从理论上作出了变分同化方法的误差估计<sup>[7]</sup>,但他们对偏微分方程的变分同化仅仅做了数值试验.随后,他们还研究了预报模式中的不连续强迫项对于变分同化方法的影响<sup>[8]</sup>,但是对于参数误差以及边界扰动情形未予分析,也未考虑局部观测资料下的变分同化问题以及不连续模式的变分同化问题.

本文在上述工作的基础上,主要做了以下两部分工作:第1部分讨论了一类简单的偏微分方程在整体观测资料下的变分同化问题,分析了观测误差和模式误差对于变分同化方法的影响.利用变分同化方法对预报模式中的初值、参数以及模式进行修正,从理论上作出了变分同化方法的误差估计及收敛精度估计,结果表明在整体观测资料条件下的变分同化方法是一种非常有效的方法;第2部分讨论了局部观测资料下的变分同化问题,分析了观测误差和模式误差对于变分同化方法的影响.由于局部观测资料条件下的变分同化方法得到的解往往不稳定,因而通常的变分同化方法失效.为了克服问题的不稳定性所带来的困难,本文作者利用变分同化结合正则化方法对预报模式中的初值、参数以及模式进行修正,分析了观测误差和模式误差对于变分同化方法的影响,从理论上作出了变分同化方法的误差估计及收敛精度估计;证明了变分同化结合正则化方法的有效性,并对正则化参数的选择方法提供了理论判据.

## 1 整体观测资料下的变分同化问题

本节以热传导方程的初边值问题为例来阐述我们的思想,其模式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < 1; t > 0), \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

其中系数  $a > 0$  为常数,  $u_0(x)$  为初值. 在  $u_0(x)$  给定的情况下,利用变量分离方法很容易得到此问题的精确解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x), \quad (2)$$

其中

$$c_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

由偏微分方程理论可知,当初值  $u_0(x)$  具有一定的光滑性时,解存在唯一且是稳定的.

假设在  $[0, T]$  中,观测资料  $u^{\text{obs}}(x, t)$  已知,且观测资料  $u^{\text{obs}}(x, t)$  与精确值  $u(x, t)$  桩间满足如下的关系

$$u^{\text{obs}}(x, t) = u(x, t) + u'(x, t), \quad (4)$$

其中  $u'(x, t)$  为代表误差的函数. 假定  $u'(x, t) = \mathcal{H}(x, t)$  ( $0 < \varepsilon < 1$  为常数),且

$$\|H(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 \quad (\Omega = [0, 1] \times [0, T]). \quad (5)$$

为了利用变分同化方法对初值进行最优确定,引入目标泛函

$$J[\hat{u}_0(x)] = \int_0^T \int_0^1 |\hat{u}(x, t) - u^{\text{obs}}(x, t)|^2 dx dt = \min! \quad (6)$$

其中  $\hat{u}_0(x)$  为利用变分同化方法最优修正的初值,或称为变分同化初值,  $\hat{u}(x, t)$  为以  $\hat{u}_0(x)$  为初值得到的预报解.

本节在观测资料有误差的前提下,具体讨论如下几个问题:

问题 1. 利用变分同化方法得到的初值、预报解与真实初值、精确解之间的关系;

问题 2. 当模式有误差时, 变分同化初值、预报解与真实初值、精确解之间的关系;

问题 3. 当参数有误差时, 变分同化初值、预报解与真实初值、精确解之间的关系;

问题 4. 当边界有扰动时, 变分同化初值、预报解与真实初值、精确解之间的关系.

### 1.1 观测误差下变分同化解的误差估计问题

假设按照如下的预报模式进行预报

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \hat{u}(x, t)}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < 1; t > 0), \\ \hat{u}(0, t) = 0, \hat{u}(1, t) = 0, \hat{u}(x, 0) = \hat{u}_0(x). \end{cases} \quad (7)$$

其中  $\hat{u}_0(x)$  为变分同化方法最优修正得到的初值(变分同化初值),  $\hat{u}(x, t)$  为对应于初值  $\hat{u}_0(x)$  的预报解. 文中假设预报时间为  $T$ ,  $\Omega = [0, 1] \times [0, T]$ .

首先利用变分同化方法求得最优初值  $\hat{u}_0(x)$  如下:

$$\hat{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n + \frac{2\varepsilon}{I_n} I_{1n} \right] \sin(n\pi x), \quad (8)$$

其中  $I_n = \int_0^T e^{-2a^2 n^2 \pi^2 t} dt$ ,  $I_{1n} = \int_0^T \int_0^1 H(x, t) e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) dx dt$ .

利用变分同化得到的初值  $\hat{u}_0(x)$  计算得到预报解

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n + \frac{2\varepsilon}{I_n} I_{1n} \right] e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x). \quad (9)$$

下面研究变分同化方法的误差问题, 定义初值误差  $E_{IC}(x)$  和预报误差  $E_{FC}(x, t)$  如下:

$$E_{IC}(x) = \hat{u}_0(x) - u_0(x), \quad E_{FC}(x, t) = \hat{u}(x, t) - u(x, t). \quad (10)$$

经计算, 得到

$$E_{IC}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2\varepsilon}{I_n} I_{1n} \right] \sin(n\pi x), \quad E_{FC}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2\varepsilon}{I_n} I_{1n} \right] e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x),$$

通过估计可得

$$\|E_{IC}(x)\|_{L^2[0, 1]} < 2\varepsilon, \quad \|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{a}. \quad (11)$$

因此由(11)式可知: 当观测误差  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $\|E_{IC}(x)\|_{L^2[0, 1]} \rightarrow 0$ ,  $\|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$  所求的变分同化初值  $\hat{u}_0(x)$  收敛于原问题的精确初值, 预报解  $\hat{u}(x, t)$  收敛于原问题的精确解  $u(x, t)$ , 并且两者的收敛精度均为  $O(\varepsilon)$ .

### 1.2 当模式有误差时的变分同化解的误差估计问题

假设观测资料具有观测误差, 同时模式中带有模式误差(偏差), 预报模式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \hat{u}(x, t)}{\partial x^2} = R(x, t, \hat{u}) & (0 < x < 1; t > 0), \\ \hat{u}(0, t) = 0, \hat{u}(1, t) = 0, \hat{u}(x, 0) = \hat{u}_0(x). \end{cases} \quad (12)$$

其中  $R(x, t, \hat{u})$  为模式误差, 为了研究方便, 假设其为线性表示  $R(x, t, \hat{u}) = \delta \hat{u}$ ,  $|\delta| < 1$  为充分小的参数.

通过计算得到变分同化最优初值和预报值为

$$\begin{cases} \hat{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{I_n(T, \delta)}{I_n(T, 2\delta)} c_n + 2\varepsilon \frac{I_{1n}(T, \delta)}{I_n(T, 2\delta)} \right] \sin(n\pi x), \\ \hat{u}(x, t) = e^{\delta t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{I_n(T, \delta)}{I_n(T, 2\delta)} c_n + 2\varepsilon \frac{I_{1n}(T, \delta)}{I_n(T, 2\delta)} \right] e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x), \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$I_n(T, \delta) = \int_0^T e^{\delta t} e^{-2a^2 n^2 \pi^2 t} dt, \quad I_n(T, 2\delta) = \int_0^T e^{2\delta t} e^{-2a^2 n^2 \pi^2 t} dt,$$

$$I_{1n}(T, \delta) = \int_0^T \int_0^1 H(x, t) e^{\delta t} e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) dx dt,$$

由(13)式可得, 变分同化初值误差和预报误差为

$$E_{IC}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{I_n(T, \delta)}{I_n(T, 2\delta)} - 1 \right] c_n \sin(n\pi x) + 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{I_{1n}(T, \delta)}{I_n(T, 2\delta)} \right] \sin(n\pi x),$$

$$E_{FC}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{I_n(T, \delta)}{I_n(T, 2\delta)} e^{\delta t} - 1 \right] c_n e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) +$$

$$2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(T, \delta)}{I_n(T, 2\delta)} e^{\delta t} e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

由此公式可以看出: 初值误差是由于观测误差  $\varepsilon$  和模式误差  $\delta$  共同决定的, 通过对上式的右端进行分析可知

$$\|E_{IC}(x)\|_{L^2(\Omega)} < M_1 \|u_0(x)\|_{L^2(\Omega)} |\delta| + 2e^T \varepsilon, \quad (14)$$

$$\|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} < \frac{M_2}{\sqrt{2a\pi}} \|u_0(x)\|_{L^2(\Omega)} |\delta| + \frac{\sqrt{2}e^{(T+t)}}{a\pi} \varepsilon, \quad (15)$$

其中

$$M_1 = \max \left[ \frac{1}{2a^2 \pi^2}, \frac{e^{-(2a^2 \pi^2 - 2)T}}{1 - e^{-(2a^2 \pi^2 - 2)T}} \right], \quad M_2 = \max \left[ \frac{1}{2a^2 \pi^2}, \frac{e^{-(2a^2 \pi^2 - 2)T} T + T}{1 - e^{-(2a^2 \pi^2 - 2)T}} \right].$$

由(14)式和(15)式可知, 当  $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$  时,  $\|E_{IC}(x)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ ,  $\|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ , 所求的变分同化初值  $\hat{u}_0(x)$  收敛于原问题的真实初值  $u_0(x)$ , 预报解  $\hat{u}(x, t)$  收敛于原问题的精确解  $u(x, t)$ , 如果  $\delta$  与  $\varepsilon$  的量级一致, 则收敛精度为  $O(\varepsilon)$ .

### 1.3 当参数有误差时的变分同化解的误差估计问题

假设观测资料具有观测误差, 同时模式中的参数带有误差(偏差), 预报模式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}(x, t)}{\partial t} - \hat{a}^2 \frac{\partial^2 \hat{u}(x, t)}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < 1; t > 0), \\ \hat{u}(0, t) = 0, \hat{u}(1, t) = 0, \hat{u}(x, 0) = \hat{u}_0(x), \end{cases} \quad (16)$$

其中  $\hat{a}^2$  为预报模式中带有误差的参数, 假设

$$|\hat{a}^2 - a^2| = \eta \quad (0 < \eta \leq a_0 < 1 \text{ 为参数误差, 且 } a^2 - a_0 > 0), \quad (17)$$

同样  $\hat{u}_0(x)$  为变分同化方法得到的最优初值,  $\hat{u}(x, t)$  为预报解.

通过计算得到变分同化初值和预报值分别为

$$\hat{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{a}^2}{a^2 + \hat{a}^2} \frac{1 - e^{-(a^2 + \hat{a}^2)n^2 \pi^2 T}}{1 - e^{-2a^2 n^2 \pi^2 T}} c_n \sin(n\pi x) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{a}^2 n^2 \pi^2}{1 - e^{-2a^2 n^2 \pi^2 T}} \left[ 2\varepsilon \int_0^T \int_0^1 H(x, t) e^{-\hat{a}^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) dx dt \right] \sin(n\pi x),$$

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\int_0^T e^{-2\hat{a}^2 n^2 \pi^2 t} dt} c_n \left[ \int_0^T e^{-(a^2 + \hat{a}^2)n^2 \pi^2 t} dt + \right.$$

$$\left. 2\varepsilon \int_0^T \int_0^1 H(x, t) e^{-\hat{a}^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) dx dt \right] e^{-\hat{a}^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x),$$

因此误差为

$$E_{IC}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2\hat{a}^2}{a^2 + \hat{a}^2} \frac{1 - e^{-(a^2 + \hat{a}^2)n^2 \pi^2 T}}{1 - e^{-2a^2 n^2 \pi^2 T}} - 1 \right] c_n \sin(n\pi x) +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{a}^2 n^2 \pi^2}{1 - e^{-2\hat{a}^2 n^2 \pi^2 T}} \left( 2\varepsilon \int_0^T \int_0^1 H(x, t) e^{-\hat{a}^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) dx dt \right) \sin(n\pi x), \\
E_{FC}(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2\hat{a}^2 n^2 \pi^2}{1 - e^{-2\hat{a}^2 n^2 \pi^2 T}} \left( \int_0^T e^{-(a^2 + \hat{a}^2)n^2 \pi^2 t} dt \right) e^{-\hat{a}^2 n^2 \pi^2 t} - e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \right] c_n \sin(n\pi x) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{a}^2 n^2 \pi^2}{1 - e^{-2\hat{a}^2 n^2 \pi^2 T}} \left( 2\varepsilon \int_0^T \int_0^1 H(x, t) e^{-\hat{a}^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) dx dt \right) e^{-\hat{a}^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x).
\end{aligned}$$

通过估计得到

$$\|E_{IC}(x)\|_{L^2[0, 1]} < \frac{1}{2a^2} \|u_0(x)\|_{L^2[0, 1]} \eta + 2\varepsilon, \quad (18)$$

$$\|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{4a^2 \pi} \|u_0(x)\|_{L^2[0, 1]} \eta + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - a_0 \pi}} \varepsilon. \quad (19)$$

由(18)式、(19)式可以得到和前面两节类似的结论: 当误差  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$  时,  $\|E_{IC}(x)\|_{L^2[0, 1]} \rightarrow 0$ ,  $\|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ , 即所求的变分同化初值  $\hat{u}_0(x)$  收敛于原问题的真实初值  $u_0(x)$ , 预报值  $\hat{u}(x, t)$  收敛于原问题的精确解  $u(x, t)$ , 并且收敛精度为  $O(\varepsilon) + O(\eta)$ , 如果  $\eta$  与  $\varepsilon$  的量级一致, 则收敛精度为  $O(\varepsilon)$ .

#### 1.4 当边界有误差时的变分同化解的误差估计问题

假设观测资料具有观测误差, 同时模式中带有边界误差, 预报模式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \hat{u}(x, t)}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < 1; t > 0), \\ \hat{u}(0, t) = \zeta f(t), \hat{u}(1, t) = 0, \hat{u}(x, 0) = \hat{u}_0(x), \end{cases} \quad (20)$$

其中  $f(t)$  为预报模式的边界误差,  $0 < \zeta < 1$  为常数,  $\hat{u}_0(x)$  为变分同化方法得到的最优初值,  $\hat{u}(x, t)$  为预报解.

经计算得到变分同化初值和预报值

$$\begin{aligned}
\hat{u}_0(x) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n + \frac{1}{I_n} \left( -I_{2n} - \frac{2\zeta}{n\pi} I_{3n} + 2\mathcal{E}_{1n} \right) \right] \sin(n\pi x) + \zeta(1-x)f(0), \\
\hat{u}(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n + \frac{1}{I_n} \left( -I_{2n} - \frac{2\zeta}{n\pi} I_{3n} + 2\mathcal{E}_{1n} \right) \right] e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t f_n(\tau) e^{-a^2 n^2 \pi^2 (t-\tau)} d\tau \right] \sin(n\pi x) + \zeta(1-x)f(t),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_{2n} = & \int_0^T \int_0^1 f_n(\tau) e^{-a^2 n^2 \pi^2 (t-\tau)} d\tau e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} dt, \quad I_{3n} = \int_0^T f(t) e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} dt, \\
f_n(\tau) = & -2 \int_0^1 \zeta(1-\xi) f'(\tau) \sin(n\pi \xi) d\xi.
\end{aligned}$$

经计算, 可得

$$E_{IC}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{I_n} \left( -I_{2n} - \frac{2\zeta}{n\pi} I_{3n} + 2\mathcal{E}_{1n} \right) \sin(n\pi x) + \zeta(1-x)f(0), \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
E_{FC}(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{I_n} \left( -I_{2n} - \frac{2\zeta}{n\pi} I_{3n} + 2\mathcal{E}_{1n} \right) e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-a^2 n^2 \pi^2 (t-\tau)} d\tau \sin(n\pi x) + \zeta(1-x)f(t). \quad (22)
\end{aligned}$$

经过估计得到如下结论: 只要函数  $f(t)$  满足

$$\frac{1}{n^2} \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)| \leq A, A > 0 \text{ 为有界正数} \quad (23)$$

即边界误差函数不出现特别大的高频振荡情形, 则有

$$\|E_{IC}(x)\|_{L^2[0,1]} < 2\varepsilon + M_3 \zeta, \quad \|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\sqrt{2}}{a\pi} \varepsilon + M_4 \zeta. \quad (24)$$

其中

$$M_3 = \sqrt{3} \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| + \frac{2A}{\sqrt{3}a^2\pi^2},$$

$$M_4 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}a\pi} \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| + \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{3}a^3\pi^3} + \frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{3}a^2\pi^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|.$$

由(24)可知, 当观测误差  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 边界误差  $\zeta \rightarrow 0$  时,  $\|E_{IC}(x)\|_{L^2[0,1]} \rightarrow 0$ ,  $\|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ , 所求的变分同化最优初值  $\hat{u}_0(x)$  收敛于原问题的真实初值  $u_0(x)$ , 预报值  $\hat{u}(x, t)$  收敛于原问题的精确解  $u(x, t)$ , 并且收敛精度为  $O(\varepsilon) + O(\zeta)$ , 如果  $\zeta$  与  $\varepsilon$  的量级一致, 则收敛精度为  $O(\varepsilon)$ .

如果边界误差函数  $f(t)$  出现特别大的高频振荡, 例如  $f(t) = \sin n^3 \pi t$ , 此时  $E_{IC}(x)$  发散, 即变分同化最优初值  $\hat{u}_0(x)$  不收敛于原问题的真实初值  $u_0(x)$ , 在这种情形下, 通常的变分同化不能达到较好的效果. 于是必须采用正则化方法, 抑制边界高频振荡的影响.

通过以上分析可知, 在整体观测资料条件下的变分同化方法是一种非常有效的方法. 并且当观测资料中出现高频误差(即高频噪声)时, 变分同化方法能有效地抑制住高频噪声的影响(除了边界扰动高频之外). 然而在实际问题中, 由于观测手段等因素的限制, 往往很难获得整体观测资料, 而只能得到局部观测资料. 下面研究局部观测资料下的变分同化问题.

## 2 局部观测资料下的变分同化问题

### 2.1 通常的变分同化方法失效的例子

我们仍旧以模式(1)为例来说明问题, 假设  $t = t_0$  处的观测资料已知, 记为  $g^{\text{obs}}(x)$ , 它与  $t = t_0$  处的精确值

$$g(x) = u(x, t) |_{t=t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2 n^2 \pi^2 t_0} \sin(n\pi x) \quad (25)$$

之间满足

$$g^{\text{obs}}(x) = g(x) + \mathcal{H}(x), \quad (26)$$

这里  $\varepsilon > 0$  为观测误差的量级,  $\mathcal{H}(x)$  为观测误差函数. 假设  $H(x) \in L^2[0, 1]$ , 且

$$\|H(x)\|_{L^2[0,1]} = \|g^{\text{obs}}(x) - g(x)\|_{L^2[0,1]} \leq 1. \quad (27)$$

下面利用通常的变分同化方法对初值进行反演确定, 预报模式同(7)式, 目标泛函如下:

$$J[\hat{u}_0(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 |\hat{u}(x, t) |_{t=t_0} - g^{\text{obs}}(x)|^2 dx = \min! \quad (28)$$

其中  $\hat{u}_0(x)$  为通常的变分同化方法得到的初值,  $\hat{u}(x, t)$  为对应初值  $\hat{u}_0(x)$  的预报解.

利用变分同化方法求得最优初值为

$$\hat{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{g}_n e^{a^2 n^2 \pi^2 t_0} \sin(n\pi x), \quad (29)$$

其中  $\hat{g}_n = 2 \int_0^1 g^{\text{obs}}(x) \sin(n\pi x) dx$ .

在(29)式中由于产生了因子  $e^{a^2 n^2 \pi^2 t_0}$ , 正是这个因子的出现, 在一般情况下级数(29)不收

敛, 从而问题变得不适定.

由此可见对于局部观测资料反演初值问题得到的解往往不适定, 因而通常变分同化方法失效<sup>[9]</sup>.

## 2.2 变分同化方法结合正则化方法的实施

由于问题的不适定性, 此时用(28)式形式的目标泛函不能很好地反演模式的初值. 为了克服问题的不适定性所带来的困难, 利用数学物理中求解反问题的正则化方法<sup>[9]</sup>, 对所讨论的问题加以适当的限制(约束), 即在目标泛函中引入稳定泛函及正则化参数, 建立新的目标泛函

$$J^* [\hat{u}_0(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 |\hat{u}(x, t)|_{t=t_0} - g^{\text{obs}}(x)|^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)^2 dx dt = \min! \quad (30)$$

这里  $\frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)^2 dx dt$  称为稳定性泛函,  $\gamma > 0$  称为正则化参数. 我们的问题是寻找最优初值使得目标泛函  $J^*$  达到极小值. 有关变分同化结合正则化方法的文献可参阅文献[1]至文献[3].

利用变分同化结合正则化方法, 通过计算得到反演的最优初值如下:

$$\hat{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n} e^{-a^2 n^2 \pi^2 t_0} \hat{g}_n \sin(n\pi x), \quad (31)$$

其中  $A_n = e^{-2a^2 n^2 \pi^2 t_0} + (\gamma/2a^2)(1 - e^{-2a^2 n^2 \pi^2 T})$ .

下面将(31)式与(29)式进行比较:

1) 当  $\gamma = 0$  时,  $A_n = e^{-2a^2 n^2 \pi^2 t_0}$ , 此时  $e^{-a^2 n^2 \pi^2 t_0}/A_n = e^{a^2 n^2 \pi^2 t_0}$ , (31)式与(29)式两式结果完全相同.

2) 当  $\gamma \neq 0$  时, 如果  $n \rightarrow \infty, A_n \rightarrow \gamma/(2a^2)$ , 因而  $e^{-a^2 n^2 \pi^2 t_0}/A_n \rightarrow 0$ , 选择合适的  $\gamma$  可以保证(31)式中  $\hat{u}_0(x)$  的稳定性. 因此, 正则化参数  $\gamma$  的出现, 克服了反问题的不适定性.

下面对初值误差进行分析, 初值误差为

$$E_{IC}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \frac{h_n}{A_n} e^{-a^2 n^2 \pi^2 t_0} \sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{A_n} e^{-a^2 n^2 \pi^2 t_0} - 1 \right] c_n \sin(n\pi x), \quad (32)$$

其中  $h_n = 2 \int_0^1 H(x) \sin(n\pi x) dx$ .

由此式可以看出: 初值误差由两部分组成, 第1部分是由于观测误差  $\varepsilon$  引起, 第2部分反映出变分同化方法结合正则化思想得到的最优初值  $\hat{u}_0(x)$  与原问题的精确初值  $u_0(x)$  之间的“拟合”程度. 利用 Bessel 公式和 Young 不等式可以得到其误差估计为

$$\|E_{IC}(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{a}{\sqrt{2(1 - e^{-2a^2 \pi^2 T})}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} + \frac{\|u_0(x)\|_{L^2(\Omega)} e^{-\gamma \nu}}{(2a^2)^\nu}, \quad (33)$$

其中  $\nu = 1/(2a^2 \pi^2 t_0) > 0$ .

类似地, 预报值为

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n} e^{-a^2 n^2 \pi^2 t_0} \hat{g}_n e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x), \quad (34)$$

经计算, 得

$$\|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - e^{-2a^2 \pi^2 T}}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} + \frac{e \|u_0(x)\|_{L^2(\Omega)} e^{-\gamma \nu}}{\sqrt{2a\pi} (2a^2)^\nu}, \quad (35)$$

由以上讨论可知, 当  $\gamma \rightarrow 0$ , 同时  $\varepsilon/\gamma \rightarrow 0$  (当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时),

$$\|E_{IC}(x)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0,$$

即结合正则化方法的变分同化最优初值  $\hat{u}_0(x)$  收敛于原问题的真实初值  $u_0(x)$ , 预报值  $\hat{u}(x, t)$  收敛于原问题的精确解  $u(x, t)$ , 并且收敛精度均为  $O(\varepsilon/\sqrt{\gamma}) + O(\gamma^0)$ . 而收敛的必要条件

$$\gamma \rightarrow 0, \text{ 同时 } \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \rightarrow 0 \text{ (当 } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ 时)}, \quad (36)$$

就是正则化参数  $\gamma$  的选择原则, 它与反问题中的 Tikhonov 正则化方法中常用的 Morozov 偏差准则是一致的.

特别地, 如果  $\nu = 1/2$  (即选择  $t_0 = 1/(a^2\pi^2)$ ), 并且  $\varepsilon$  与  $\gamma$  的量级一致, 则所得的初值误差与预报误差的收敛精度均为  $O(\sqrt{\varepsilon})$ .

### 2.3 考虑模式误差等情形的变分同化方法的误差估计

我们还可以类似于前一节考虑其它情形, 若观测资料具有观测误差, 同时模式中带有模式误差(偏差); 或者模式中的参变量带有参数误差; 或者边界条件中带有边界误差情形. 假设预报模式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}(x, t)}{\partial t} - \hat{a}^2 \frac{\partial^2 \hat{u}(x, t)}{\partial x^2} = R(x, t, \hat{u}) & (0 < x < 1; t > 0), \\ \hat{u}(0, t) = \zeta f(t), \hat{u}(1, t) = 0, \hat{u}(x, 0) = \hat{u}_0(x). \end{cases} \quad (37)$$

其中  $R(x, t, \hat{u})$  为模式误差, 为了研究方便, 假设其为线性表示  $R(x, t, \hat{u}) = \delta u$ ,  $|\delta| < 1$  为充分小的参数;  $\hat{a}^2$  为预报模式中带有误差的参数, 满足(17)式,  $0 < \eta < a_0 < 1$  为参数误差,  $0 < \zeta < 1$  为边界误差.

利用(30)式的目标泛函对初值进行最优反演, 经计算得到结合正则化方法的变分同化初值为

$$\begin{aligned} \hat{u}_0(x) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{1n}} \left[ c_n e^{\delta t_0} e^{-(a^2 + \hat{a}^2)n^2\pi^2 t_0} - e^{2\delta t_0} e^{-\hat{a}^2 n^2\pi^2 t_0} I_{3n} - \right. \\ & \left. \frac{2\zeta}{n\pi} f(t_0) e^{-\delta t_0} e^{-\hat{a}^2 n^2\pi^2 t_0} + \varepsilon e^{\delta t_0} e^{-\hat{a}^2 n^2\pi^2 t_0} h_n - \gamma n^2 \pi^2 I_{4n} \right] \sin(n\pi x) + \\ & \zeta(1-x)f(0), \end{aligned}$$

进一步得到预报值

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, t) = & e^{\delta t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{1n}} \left[ c_n e^{\delta t_0} e^{-(a^2 + \hat{a}^2)n^2\pi^2 t_0} - e^{2\delta t_0} e^{-\hat{a}^2 n^2\pi^2 t_0} I_{3n} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2\zeta}{n\pi} f(t_0) e^{-\delta t_0} e^{-\hat{a}^2 n^2\pi^2 t_0} - \gamma n^2 \pi^2 I_{4n} + \varepsilon e^{\delta t_0} e^{-\hat{a}^2 n^2\pi^2 t_0} h_n \right] e^{-\hat{a}^2 n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x) + \right. \\ & \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t f_n(\tau) e^{-\hat{a}^2 n^2\pi^2 (t-\tau)} d\tau \right] \sin(n\pi x) + \zeta(1-x)f(t) \right\}, \end{aligned}$$

其中

$$A_{1n} = e^{(2\delta - 2a^2 n^2\pi^2)t_0} + \frac{\gamma n^2 \pi^2}{2\hat{a}^2 n^2\pi^2 - 2\delta} (1 - e^{(2\delta - 2a^2 n^2\pi^2)t_0}).$$

$$I_{3n} = \int_0^{t_0} f_n(\tau) e^{-\hat{a}^2 n^2\pi^2 (t_0 - \tau)} d\tau,$$

$$I_{4n} = \int_0^t \int_0^t e^{-2\delta \tau} f_n(\tau) e^{-\hat{a}^2 n^2\pi^2 (t-\tau)} d\tau e^{-\hat{a}^2 n^2\pi^2 t} dt.$$

类似于前面的计算得到误差估计: 只要函数  $f(t)$  满足(23)式, 则

$$\|E_{IC}(x)\|_{L^2} < M_5 \left( \frac{\delta}{\sqrt{\gamma}} + \frac{\eta}{\sqrt{\gamma}} \right) + M_6 \frac{\zeta}{\sqrt{\gamma}} + M_7 \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} + \frac{e}{(2a^2)^\nu} \|u_0(x)\|_{L^2} \gamma^\nu +$$



$$\left[ \frac{\sqrt{2}Ae^{2T}}{\sqrt{3}(a^2 - a_0)\pi^2} + \frac{|f(0)|}{\sqrt{3}} \right] \zeta, \quad (38)$$

$$\|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} < T e^T M_5 \left( \frac{\delta}{\sqrt{Y}} + \frac{\eta}{\sqrt{Y}} \right) + \frac{e^T}{\sqrt{2(a^2 - a_0)\pi}} \left[ M_6 \frac{\zeta}{\sqrt{Y}} + M_7 \frac{\varepsilon}{\sqrt{Y}} \right] + \frac{e^T e^T}{(2a^2)^v} \|u_0(x)\|_{L^2 Y^v} + \frac{T e^T \|u_0(x)\|_{L^2}}{(a^2 - a_0)\pi^2} \delta + \frac{T e^T \|u_0(x)\|_{L^2}}{a^2 - a_0} \eta + M_8 \zeta, \quad (39)$$

其中

$$M_5 = \frac{a}{\sqrt{2(a^2 - a_0)} \sqrt{(1 - e^{-2a^2\pi^2 T})}} \|u_0(x)\|_{L^2[0, l]},$$

$$M_6 = \frac{A e^{2t_0}}{\sqrt{12(a^2 - a_0)\pi^2}} + \frac{a e^{2t_0} |f(t_0)|}{\sqrt{6(1 - e^{-2(a^2 - a_0)\pi^2 T})}}, \quad M_7 = \frac{a e^{t_0}}{\sqrt{2(1 - e^{-2(a^2 - a_0)\pi^2 T})}},$$

$$M_8 = \frac{A e^{2T} e^T}{\sqrt{3} \sqrt{(a^2 - a_0)^3 \pi^3}} + \frac{A e^T \sqrt{T}}{\sqrt{3}(a^2 - a_0)\pi^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^T \sqrt{T} \max_{0 \leq \tau \leq T} |f(\tau)|.$$

由(38)式和(39)式可知:当  $Y \rightarrow 0$ , 同时  $\varepsilon^2/Y, \delta^2/Y, \eta^2/Y, \zeta^2/Y \rightarrow 0$ , ( $\varepsilon, \delta, \eta, \zeta \rightarrow 0$ ) 时,  $\|E_{IC}(x)\|_{L^2[0, l]} \rightarrow 0$ ,  $\|E_{FC}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ , 结合正则化方法的变分同化初值  $\hat{u}_0(x)$  收敛于原问题的精确初值, 预报解  $\hat{u}(x, t)$  收敛于原问题的精确解  $u(x, t)$ , 收敛精度为

$$O\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{Y}}\right) + O\left(\frac{\delta}{\sqrt{Y}}\right) + O\left(\frac{\eta}{\sqrt{Y}}\right) + O\left(\frac{\zeta}{\sqrt{Y}}\right) + O(Y^v).$$

特别地, 如果  $v = 1/2$  (即选择  $t_0 = 1/(a^2\pi^2)$ ), 并且各种误差  $\varepsilon, \delta, \eta, \zeta$  与  $Y$  的量级一致, 则所得的初值误差与预报误差的收敛精度均为  $O(\sqrt{\varepsilon})$ , 收敛的必要条件与 Tikhonov 正则化方法中的 Morozov 偏差准则是一致的.

通过以上分析可知, 在局部观测资料条件下, 在选择适当的正则化参数下, 变分同化结合正则化方法是有效的, 并且当观测资料中出现高频误差时, 结合正则化的变分同化方法同样能有效地抑制住高频噪声的影响 (除了边界扰动高频之外).

### 3 一维海温模式的垂直涡旋扩散参数的反演

为了举例说明, 我们用一个一维热传导模型来描述海温在时间域  $l$  上的垂直分布<sup>[10]</sup>, 其控制方程如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \frac{\partial T}{\partial z} \right] + f(t, z), \\ T|_{t=0} = U(z), \quad K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \varphi(t), \quad K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \end{cases} \quad (40)$$

其中  $T = T(t, z)$  是海温,  $K = K(t, z)$  是垂直涡旋扩散系数,  $f(t, z) = -[(\nu_0)/(\rho_0 c_p)] e^{-\nu z}$ ,  $\rho_0$  是海水密度,  $c_p$  是海水比容,  $\nu$  是光的传播系数,  $H$  是海洋上层的深度,  $I_0$  是海洋表面太阳辐射的传播介质,  $\varphi(t) = Q(t)/(\rho_0 c_p) - I_0/(\rho_0 c_p)|_{z=0}$ ,  $Q(t)$  是海表净热通量.

假设  $\nu, c_p, \rho_0, I_0$  和  $Q(t)$  已知, 而  $U(z)$  和  $K(t, z)$  是未知的, 需要用资料同化方法来决定. 如果在整个区域上给出  $T^{\text{obs}}$ , 初始条件  $U(z)$  和模式参数  $K(t, z)$  的估计由正则化变分资料同化方法确定. 如果  $T^{\text{obs}}(t, 0)$  已知, 即仅有海表面的观测值已知, 代价函数定义如下<sup>[10]</sup>:

$$J[U, K] = \frac{1}{2} \int_0^T (T(t, 0) - T^{\text{obs}}(t, 0))^2 dt + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_0^H K(t, z) \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 dt dz. \quad (41)$$

通过一系列的变分计算, 给定如下的伴随方程以及伴随边界条件:

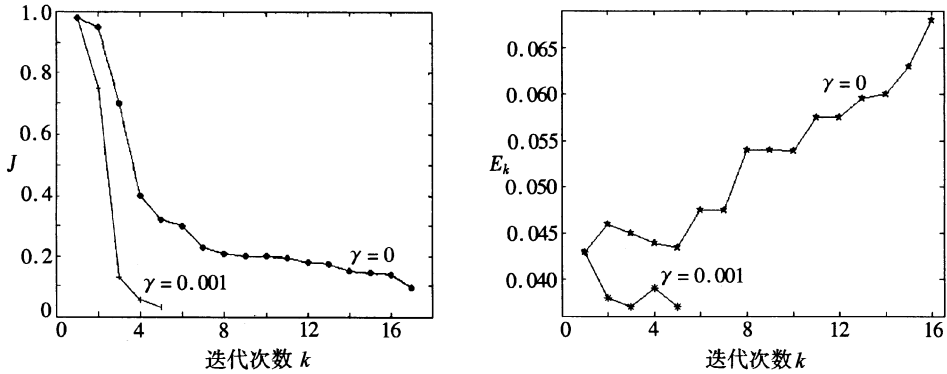
$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \frac{\partial P}{\partial z} \right] - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \frac{\partial P}{\partial z} \right], \\ P|_{t=\tau} = 0, K \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = - (T(t, 0) - T^{\text{obs}}(t)) + \gamma^2 K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0}, K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0. \end{cases} \quad (42)$$

$U, K$  的代价函数(41) 的梯度为

$$\dot{J}_U = P(0, z), \quad \dot{J}_K = -\frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{2} \gamma^2 \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2.$$

我们进行如下的数值试验.

采用  $U(z) = \sin(z)$ ,  $K = 1$ . 在涡旋扩散系数  $K = 1 + 0.05(z - H)$  中引入扰动. 数值试验 1 中用  $\gamma = 0$ , 试验 2 中用  $\gamma = 0.001$ . 图 1 为数值实验的结果. 从该图可知, 当  $\gamma = 0$  时, 即方程中不含正则化项,  $E_k$  随着迭代次数的增加; 当  $\gamma \neq 0$  时,  $J$  随着迭代次数的增加而快速减少, 并且精度提高.



(a) 包含和不包含正则化项的  $J$  的迭代过程 (b) 包含和不包含正则化项的误差  $E_k$  的变化

图 1

## 4 结束语

本文研究一类简单模式在整体和局部观测资料下的变分同化方法的误差估计问题. 在观测资料有误差的条件下, 具体讨论利用变分同化方法得到的初值与真实初值之间的误差, 预报解与精确解之间的误差和观测误差以及各种模式误差之间的关系.

讨论结果表明: 一般情况下, 整体观测资料变分同化所得最优初值、预报解是连续依赖于系统误差, 亦即变分同化解收到良好的结果, 对于边界扰动情形, 如果扰动不出现高频成分, 解同样收到良好的结果.

在局部观测资料下, 由于通常的变分同化不适定, 为了克服问题的不适定性所带来的困难, 利用变分同化结合正则化方法对预报模式中的初值、参数以及模式进行修正. 结果表明, 在适当的正则化参数下, 结合正则化方法的变分同化方法是必要而且有效的, 并且当观测资料中出现高频误差时, 结合正则化的变分同化方法同样能有效地抑制住高频噪声的影响(除了边界扰动高频之外).

另外, 作者还考虑了一类不连续“on-off”模式的变分同化方法的误差估计问题, 我们将另文处理.

## [参 考 文 献]

- [1] 黄思训, 韩威, 伍荣生. 结合反问题技巧对一维海温模式变分资料同化的理论分析及数值试验[J]. 中国科学 D 辑, 2003, 32(9): 903-911.
- [2] HUANG Si-xun, XIANG Jie, DU Hua-dong, et al. Inverse problems in atmospheric sciences and their application[J]. Journal of Physics: Conference Series 2005, 12: 45-57.
- [3] 黄思训, 滕加俊, 兰伟仁, 等. 利用正则化方法对三维风场的变分调整[J]. 力学学报, 2005, 37(4): 399-407.
- [4] Tikhonov A N, Arsenin V Y. Solutions of Ill-Posed Problems [M]. Washington: Winston and Sons, 1977.
- [5] Wergen W. The effect of model errors in variational assimilation[J]. Tellus, 1992, 44A: 297-313.
- [6] LU Chua-gu, Gerald L Browning. The impact of observational errors on objective analyses[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1998, 55(10): 1791-1807.
- [7] LU Chua-gu, Gerald L Browning. The impact of observational and model errors on the four-dimensional variational data assimilation[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1998, 55(6): 995-1011.
- [8] LU Chua-gu, Gerald L Browning. Discontinuous forcing generating rough initial conditions in 4DVAR data assimilation[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 2000, 57(10): 1646-1656.
- [9] 黄思训, 伍荣生. 大气科学中的数学物理问题[M]. 北京: 气象出版社, 2001.
- [10] HUANG Si-xun, CAO Xiao-qun, DU Hua-dong, et al. Retrieval of atmospheric and oceanic parameters and the relevant numerical calculation[J]. Advances in Atmospheric Sciences, 2006, 23(1): 106-117.

## Some Theoretical Problems on Variational Data Assimilation

TENG Jia-jun<sup>1,2</sup>, ZHANG Gui<sup>2</sup>, HUANG Si-xun<sup>1,3</sup>

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China ;

2. Department of Mathematics and Physics, Institute of Science, PLAUST, Nanjing 211101, P. R. China ;

3. Institute of Meteorology, PLAUST, Nanjing 211101, P. R. China)

**Abstract:** Theoretical aspects of variational data assimilation (VDA) for a simple model with both global and local observational data are discussed. For the VDA problems with global observational data, the initial conditions and parameters for the model are revisited and the model itself is modified. The estimates of both error and convergence rate are theoretically made and the validity of the method is proved. For VDA problem with local observation data, the conventional VDA method are out of use due to the ill-posedness of the problem. In order to overcome the difficulties caused by the ill-posedness, the initial conditions and parameters of the model are modified by using the improved VDA method, and the estimates of both error and convergence rate are also made. Finally, the validity of the improved VDA method is proved through theoretical analysis and illustrated with an example. And a theoretical criterion of the regularization parameters is proposed.

**Key words:** variational data assimilation (VDA); regularization method; estimates of convergence rate