应用数学和力学, 第 28 卷 第 5 期
2007 年 5 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 5, May. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 05-0532-07

关于海洋动力学中二维的大尺度原始方程组(Ⅱ) *

黄代文[1,2], 郭柏灵[1]

(1. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088;
2. 中国工程物理研究院 研究生部, 北京 100080)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 考虑地球物理学中大尺度海洋运动的二维原始方程组的初边值问题. 这里海底的深度是正的, 但不一定为常数. 应用 Faedo-Galerkin 方法和各向异性不等式, 得到上述初边值问题的整体弱强解和整体强解的存在、唯一性. 并且通过研究解的渐近行为, 证明了能量随时间是指数衰减的.

关 键 词: 海洋的原始方程组; 整体强解; 正则性; 指数衰减

中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

承接本文的第(Ⅰ)部分, 我们继续研究下面地球物理学中大尺度海洋运动的二维原始方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{\varepsilon}v+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p_s}{\partial x}-\frac{1}{\varepsilon}\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\gamma_1\Delta u, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{\varepsilon}u=\gamma_2\Delta v, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial z}=\gamma_3\Delta T, \tag{3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial S}{\partial z}=\gamma_4\Delta S, \tag{4}$$

带有齐次边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ \frac{\partial v}{\partial z}=0,\ \frac{\partial T}{\partial z}=0,\ \frac{\partial S}{\partial z}=0\qquad(\text{在 } s \text{ 中}), \tag{5}$$

$$(u,v)=0,\ T=0,\ S=0\qquad(\text{在 } b \text{ 中}), \tag{6}$$

$$(u,v)=0,\ \frac{\partial T}{\partial x}=0,\ \frac{\partial S}{\partial x}=0\qquad(\text{在 } l \text{ 中}) \tag{7}$$

和初始条件

* 收稿日期: 2006-03-06; 修订日期: 2007-04-09
基金项目: 国家自然科学基金(重点)资助项目(90511009)
作者简介: 黄代文(1977—), 男, 福建云霄人, 博士(联系人. Tel: +86-10-62014411-2645; E-mail: hdw55@tom.com).

$$(u, v, T, S)_{t=0} = (u_0, v_0, T_0, S_0). \tag{8}$$

我们将记上面初边值问题(1)至边值问题(8)为系统(Ⅰ).

受到文献[1]的启发, 应用 Faedo-Galerkin 方法[2]和各向异性不等式(参见文献[3]), 我们可以得到系统(I)的整体强解的存在、唯一性. 而且, 我们也研究了系统(Ⅰ)的解的渐近行为. 这里海洋深度不恒为常数. 但是我们必须假设海洋深度为正.

在这篇文章中, 我们的主要结果是:

定理 1　如果 $h \in W^{2,\infty}(0,1)$, $U_0 = (u_0, v_0, T_0, S_0) \in H$, 那么系统(Ⅰ)存在唯一整体弱解 U, 使得

$$(u, v, T, S) \in L^\infty(0, \infty; H) \cap L^2(0, \infty; V).$$

更进一步, 如果 $\partial_z u_0, \partial_z v_0, \partial_z T_0, \partial_z S_0 \in L^2(\Omega)$, 则解 U 是唯一的, 且

$$\partial_z u, \partial_z v, \partial_z T, \partial_z S \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H^1(\Omega)),$$

即解 U 为系统(Ⅰ)的唯一的整体弱强解.

定理 2　如果 $h \in W^{2,\infty}(0,1)$, $U_0 = (u_0, v_0, T_0, S_0) \in V$, 那么系统(Ⅰ)存在唯一整体强解 U, 使得 $(u, v, T, S) \in L^\infty(0, \infty; V) \cap L^2(0, \infty; V \cap H^2(\Omega)^4)$.

定理 3

1) 如果 $h \in W^{2,\infty}(0,1)$, $U_0 = (u_0, v_0, T_0, S_0) \in H$, $\partial_z u_0, \partial_z v_0, \partial_z T_0, \partial_z S_0 \in L^2(\Omega)$, 那么系统(Ⅰ)的整体弱强解 (u, v, T, S) 满足:

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)},\ \|v\|^2_{L^2(\Omega)},\ \|T\|^2_{L^2(\Omega)},\ \|S\|^2_{L^2(\Omega)},\ \|u_z\|^2_{L^2(\Omega)},$$
$$\|v_z\|^2_{L^2(\Omega)},\ \|T_z\|^2_{L^2(\Omega)},\ \|S_z\|^2_{L^2(\Omega)}$$

关于时间 t 是指数衰减的.

2) 如果 $h \in W^{2,\infty}(0,1)$, $U_0 = (u_0, v_0, T_0, S_0) \in V$, 那么系统(Ⅰ)的整体弱强解 U 满足:

$$\|\nabla u\|^2_{(L^2(\Omega))^2},\ \|\nabla v\|^2_{(L^2(\Omega))^2},\ \|\nabla T\|^2_{(L^2(\Omega))^2},\ \|\nabla S\|^2_{(L^2(\Omega))^2}$$

关于时间 t 是指数衰减的.

注记 1　在这篇文章中, 所有的记号、整体弱解、整体弱强解、整体强解的定义都与文献[4]中的一样.

本文是如下安排的: 在第 1 节, 我们将证明定理 1. 在第 2 节, 我们将给出定理 2 的证明. 第 3 节将用于证明定理 3.

1　定理 1 的证明

由文献[4]中的关于 u、v、T、S 的能量估计, 我们可以证明系统(I)的整体弱解的存在性. 下面, 与 $h = 1$ 的情形一样, 为了证明系统(Ⅰ)的整体弱强解的存在唯一性我们必须找出 u_z 在底部的相容性条件.

一个相容性条件　从 $-h(x)$ 到 0 积分(1)式, 我们得

$$2\int_{-h(x)}^0 u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-h(x)}^0 v + \frac{1}{\varepsilon}h\frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-h(x)}^0\left(\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right) =$$
$$-\gamma_1 u_z|_{z=-h(x)} + \gamma_1\int_{-h(x)}^0 \partial_x^2 u.$$

由
$$\int_{-h(x)}^0 \partial_x^2 u = \int_{-h(x)}^0 \partial_x(-\omega_z)\,dz = -h'^2\partial_z u(x, -h(x)),$$

我们有

$$2\int_{-h(x)}^0 u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-h(x)}^0 v + \frac{1}{\varepsilon}h\frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-h(x)}^0\left(\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right) =$$

$$- \gamma_1 (1 + h'^2) u_z |_{z=-h(x)}. \tag{9}$$

取(1)式在 $z = -h(x)$ 的迹,我们可得

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-h(x)}^{0}\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right) = \gamma_1 u_{xx}|_{z=-h(x)} + \gamma_1 u_{zz}|_{z=-h(x)}. \tag{10}$$

由

$$\partial_x^2(u(x, -h(x))) = (\partial_{xx}u)(x, -h(x)) - h'(\partial_{xz}u)(x, -h(x)) + h'^2(\partial_{zz}u)(x, -h(x)) - h'(\partial_{zx}u)(x, -h(x)) - h''\partial_z u(x, -h(x)) = 0,$$

我们有

$$u_{xx}|_{z=-h(x)} = 2h'(\partial_{xz}u)|_{z=-h(x)} - h'^2(\partial_{zz}u)|_{z=-h(x)} + h''\partial_z u|_{z=-h(x)}. \tag{11}$$

由(9)式至(11)式,消去 $\partial p_s/\partial x$,我们可以得到下面的相容性条件

$$2\int_{-h(x)}^{0} u_z\omega - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-h(x)}^{0} v - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-h(x)}^{0} z\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right) + \gamma_1 h(1 - (h'^2))u_{zz}|_{z=-h(x)} + \gamma_1(1 + h''h + h'^2)u_z|_{z=-h(x)} + 2\gamma_1 h' h u_{zx}|_{z=-h(x)} = 0. \tag{12}$$

关于 u_z、v_z、T_z、S_z 的能量估计 方程组(1)式至(4)式关于 z 求导,我们得到下面方程组

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + uu_{xz} + \left(\int_z^0 \frac{\partial u}{\partial x}\right)u_{zz} - \frac{1}{\varepsilon}v_z + \frac{1}{\varepsilon}\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right) = \gamma_1\Delta u_z, \tag{13}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + u_z v_x + uv_{xz} - u_x v_z + \left(\int_z^0 \frac{\partial u}{\partial x}\right)v_{zz} + \frac{1}{\varepsilon}u_z = \gamma_2\Delta v_z, \tag{14}$$

$$\frac{\partial T_z}{\partial t} + u_z T_x + uT_{xz} - u_x T_z + \left(\int_z^0 \frac{\partial u}{\partial x}\right)T_{zz} = \gamma_3\Delta T_z, \tag{15}$$

$$\frac{\partial S_z}{\partial t} + u_z S_x + uS_{xz} - u_x S_z + \left(\int_z^0 \frac{\partial u}{\partial x}\right)S_{zz} = \gamma_4\Delta S_z, \tag{16}$$

在(13)式中选 u_z 做为实验函数,我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega v_z u_z + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)u_z + \gamma_1\int_\Omega|\nabla u_z|^2 = \gamma_1\int_b \frac{\partial u_z}{\partial n}\cdot u_z. \tag{17}$$

由(12)式,我们得到

$$-\gamma_1 u_{zz}|_{z=-h(x)} = \frac{1}{h}(-\gamma_1 h'^2 h u_{zz}|_{z=-h(x)} + 2\gamma_1 h' h u_{zx}|_{z=-h(x)}) + \frac{1}{h}\alpha(x),$$

其中

$$\alpha(x) = 2\int_{-h(x)}^{0} u_z\omega - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-h(x)}^{0} v + \gamma_1(1 + h''h + h'^2)u_z|_{z=-h(x)} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-h(x)}^{0} z\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} + \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right).$$

所以

$$\gamma_1\int_b \frac{\partial u_z}{\partial n}\cdot u_z = \gamma_1\int_b \frac{-h'u_{zx} - u_{zz}}{\sqrt{1 + h'^2}}\cdot u_z = \gamma_1\int_b \frac{-h'u_{zx} - h'^2 u_{zz} + 2h'u_{zx}}{\sqrt{1 + h'^2}}\cdot u_z + \int_b \frac{\alpha(x)}{h\sqrt{1 + h'^2}}u_z = \gamma_1\int_0^1 h'(u_{zx} - h'u_{zz})\cdot u_z\,\mathrm{d}x + \int_b \frac{\alpha(x)}{h\sqrt{1 + h'^2}}u_z =$$

$$-\frac{1}{2}\gamma_1\int_b \frac{h'' u_z^2}{\sqrt{1+h'^2}}+\int_b \frac{\alpha(x)}{h\sqrt{1+h'^2}}u_z. \tag{18}$$

利用(17)式和(18)式,我们得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_z\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega v_z u_z+\gamma_1\int_\Omega|\nabla u_z|^2=$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)u_z-\frac{1}{2}\gamma_1\int_b\frac{h' u_z^2}{\sqrt{1+h'^2}}+\int_b\frac{\alpha(x)}{h\sqrt{1+h'^2}}u_z. \tag{19}$$

与(19)式的推导类似,我们可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_z\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega u_z v_z+\int_\Omega u_z v_x v_z-\int_\Omega u_x v_z^2+\gamma_2\int_\Omega|\nabla v_z|^2=$$
$$\frac{1}{2}\gamma_2\int_b\frac{h'' v_z^2}{\sqrt{1+h'^2}}, \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|T_z\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega u_z T_x T_z-\int_\Omega u_x T_z^2+\gamma_3\int_\Omega|\nabla T_z|^2=\frac{1}{2}\gamma_3\int_b\frac{h'' T_z^2}{\sqrt{1+h'^2}} \tag{21}$$

和

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|S_z\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega u_z S_x S_z-\int_\Omega u_x S_z^2+\gamma_4\int_\Omega|\nabla S_z|^2=\frac{1}{2}\gamma_4\int_b\frac{h'' S_z^2}{\sqrt{1+h'^2}}. \tag{22}$$

由于 $h\in W^{2,\infty}(0,1)$, 与 $h=1$ 的情况类似,由(19)式至(22)式我们可以得到关于 u_z、v_z、T_z、S_z 的先验估计.然后我们可以证明系统(Ⅰ)的整体弱强解的存在唯一性,即我们证明了定理1.

2　定理2的证明

本节证明定理2.由定理1,系统(Ⅰ)存在唯一的整体弱强解 U. 因而要获得定理2,要证明满足一些正则性条件. 另一方面,由于 h 不恒为常数的证明与恒为恒为常数的情形类似,我们不妨假定 $h=1$.

关于 u、v、T、S 的正则性　在(1)式中选 u_t 作为实验函数,我们有

$$\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\gamma_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla u|^2-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega v u_t+\int_\Omega u u_x u_t+\int_\Omega \omega u_z u_t+$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega u_t\left(\int_0^z\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)=0. \tag{23}$$

令

$$J_1=\left|\int_\Omega u u_x u_t\right|,\quad J_2=\left|\int_\Omega \omega u_z u_t\right|,\quad J_3=\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega v u_t\right|,$$
$$J_4=\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega u_z\left(\int_0^z\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)\right|.$$

由　$$J_1=\left|\int_\Omega u u_x u_t\right|\leqslant\varepsilon\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+c\|u u_x\|^2_{L^2(\Omega)}$$

又　$$c\|u u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant c\|u\|^2_{L^\infty_x L^2_z}\|u_x\|^2_{L^2_x L^\infty_z}\leqslant c\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u_{zx}\|_{L^2(\Omega)}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)},$$

我们可得

$$J_1\leqslant\varepsilon\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+c\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u_{zx}\|_{L^2(\Omega)}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{24}$$

利用　$$J_2=\left|\int_\Omega \omega u_z u_t\right|\leqslant\varepsilon\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+c\|\omega u_z\|^2_{L^2(\Omega)}$$

和　$$c\|\omega u_z\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant c\|\omega\|^2_{L^2_x L^\infty_z}\|u_z\|^2_{L^\infty_x L^2_z}\leqslant c\|u_z\|_{L^2(\Omega)}\|u_{zx}\|_{L^2(\Omega)}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)},$$

我们有

$$J_2 \leqslant \varepsilon \| u_t \|^2_{L^2(\Omega)} + c \| u_z \|_{L^2(\Omega)} \| u_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{25}$$

$$J_3 = \left| \frac{1}{\varepsilon'} \int_\Omega v u_t \right| \leqslant \varepsilon \| u_t \|^2_{L^2(\Omega)} + c \| v \|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{26}$$

$$J_4 = \left| \frac{1}{\varepsilon'} \int_\Omega u_t \left(\int_0^z \left(\mu_1 \frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2 \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right) \right| \leqslant c \| u_t \|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \frac{\partial T}{\partial x} \right\|_{L_x^2 L_z^\infty} + \left\| \frac{\partial S}{\partial x} \right\|_{L_x^2 L_z^\infty} \right) \leqslant$$
$$\varepsilon \| u_t \|^2_{L^2(\Omega)} + c(\| T_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| T_x \|_{L^2(\Omega)} + \| S_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| S_x \|_{L^2(\Omega)}). \tag{27}$$

由(23)式至(27)式,我们得到

$$c \| u_t \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega | \nabla u |^2 \leqslant c \| u \|_{L^2(\Omega)} \| u_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)} + c \| v \|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$c \| u_z \|_{L^2(\Omega)} \| u_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$c(\| T_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| T_x \|_{L^2(\Omega)} + \| S_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| S_x \|_{L^2(\Omega)}). \tag{28}$$

与(28)式的推导类似,我们可以得到

$$c \| v_t \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega | \nabla v |^2 \leqslant c \| u \|_{L^2(\Omega)} \| v_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| v_x \|^2_{L^2(\Omega)} + c \| u \|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$c(\| u \|_{L^2(\Omega)} \| v_{zx} \|_{L^2(\Omega)} + \| v_z \|_{L^2(\Omega)} \| v_{zx} \|_{L^2(\Omega)}) \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{29}$$

$$c \| T_t \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega | \nabla T |^2 \leqslant c \| u \|_{L^2(\Omega)} \| T_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| T_x \|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$c(\| u \|_{L^2(\Omega)} \| T_{zx} \|_{L^2(\Omega)} + \| T_z \|_{L^2(\Omega)} \| T_{zx} \|_{L^2(\Omega)}) \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)} \tag{30}$$

和

$$c \| S_t \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega | \nabla S |^2 \leqslant c \| u \|_{L^2(\Omega)} \| S_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| S_x \|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$c(\| u \|_{L^2(\Omega)} \| S_{zx} \|_{L^2(\Omega)} + \| S_z \|_{L^2(\Omega)} \| S_{zx} \|_{L^2(\Omega)}) \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{31}$$

由(28)式至(31)式,我们有

$$c(\| u_t \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v_t \|^2_{L^2(\Omega)} + \| T_t \|^2_{L^2(\Omega)} + \| S_t \|^2_{L^2(\Omega)}) +$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int_\Omega | \nabla u |^2 + \int_\Omega | \nabla v |^2 + \int_\Omega | \nabla T |^2 + \int_\Omega | \nabla S |^2 \right) \leqslant$$
$$c \| u \|^2_{L^2(\Omega)} + c \| v \|^2_{L^2(\Omega)} + c(\| u \|_{L^2(\Omega)} \| u_{zx} \|_{L^2(\Omega)} +$$
$$\| u_z \|_{L^2(\Omega)} \| u_{zx} \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)} \| v_{zx} \|_{L^2(\Omega)} + \| v_z \|_{L^2(\Omega)} \| v_{zx} \|_{L^2(\Omega)} +$$
$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \| T_{zx} \|_{L^2(\Omega)} + \| T_z \|_{L^2(\Omega)} \| T_{zx} \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)} \| S_{zx} \|_{L^2(\Omega)} +$$
$$\| S_z \|_{L^2(\Omega)} \| S_{zx} \|_{L^2(\Omega)}) \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)} + c \| u \|_{L^2(\Omega)} \| v_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| v_x \|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$c \| u \|_{L^2(\Omega)} \| T_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| T_x \|^2_{L^2(\Omega)} + c(\| T_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| T_x \|_{L^2(\Omega)} +$$
$$\| S_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| S_x \|_{L^2(\Omega)}).$$

因此 $$c \int_\Omega U_t^2 + c \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega | \nabla U |^2 \leqslant \eta_1(t) \int_\Omega | \nabla U |^2 + \eta_2(t), \tag{32}$$

其中

$$\eta_1(t) = \| U \|_{L^2(\Omega)} \| U_{zx} \|_{L^2(\Omega)} + \| U_z \|_{L^2(\Omega)} \| U_{zx} \|_{L^2(\Omega)},$$
$$\eta_2(t) = c \| u \|^2_{L^2(\Omega)} + c \| v \|^2_{L^2(\Omega)} + c(\| T_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| T_x \|_{L^2(\Omega)} +$$
$$\| S_{zx} \|_{L^2(\Omega)} \| S_x \|_{L^2(\Omega)}).$$

利用定理 1,我们知道

$$\eta_1(t), \eta_2(t) \in L^1(0, +\infty). \tag{33}$$

联合(32)式和(33)式,由 Gronwall 不等式,我们可得

$$U \in L^\infty(0, \infty; H^1(\Omega)^4), \quad U_t \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)^4). \tag{34}$$

下面,我们证明 $U \in L^2(0,\infty;H^2(\Omega)^4)$. 在证明(28) 式的过程中,我们知道: uu_x, $\omega u_z \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$. 由(34) 式,我们有 $u_t \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$. 又

$$2\int_{-1}^{0} u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon'}\int_{-1}^{0} v + \frac{1}{\varepsilon'}\frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon'}\int_{-1}^{0}\left(\int_{z}^{0}\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right) = -\gamma_1 u_z|_{z=-1},$$

我们可以证明 $(1/\varepsilon')(\partial p_s/\partial x) \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$. 因此,由(1) 式,我们有 $\Delta u \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$. 由椭圆的正则性(参见文献[5]),我们得到 $u \in L^2(0,\infty;H^2(\Omega))$.
类似地,我们有 v、T、$S \in L^2(0,\infty;H^2(\Omega))$.

3 定理 3 的证明

因为证明 h 不恒为常数时的定理3 与 h 为常数时的一样,我们假定 $h=1$.

步骤 1 $\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|T\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|S\|^2_{L^2(\Omega)}$ $\|u_z\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|v_z\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|T_z\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|S_z\|^2_{L^2(\Omega)}$ 关于时间 t 是指数衰减的.

由文献[4]中的(30)式和(31)式,利用 Poincar 不等式,我们知道: $\|T\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|S\|^2_{L^2(\Omega)}$ 关于时间 t 是指数衰减的. 因此由文献[4] 中的(28) 式和(29) 式,我们有 $\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$ 关于时间 t 是指数衰减的.

由(34)式和文献[4]中(53)式,再用 Poincar 不等式,我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|U_z\|^2_{L^2(\Omega)} + c\|U_z\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c\exp(-ct)\xi_1(t)\|U_z\|^{2/3}_{L^2(\Omega)} + \xi_2(t)\|U_z\|^2_{L^2(\Omega)} + c\|U_z\|^2_{L^2(\Omega)} + c\exp(-ct), \tag{35}$$

这里

$$\xi_1(t) = \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \in L^1(0,\infty),$$
$$\xi_2(t) = c(\|U_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}) \in L^\infty(0,\infty).$$

由 $$\|u_z\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^2(\Omega)}\|u_{zz}\|_{L^2(\Omega)},$$
我们有

$$(\|u_z\|^2_{L^2(\Omega)})^{2/3} \leqslant \|u\|^{2/3}_{L^2(\Omega)}\|u_{zz}\|^{2/3}_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u\|^{1/3}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{1/3}_{L^2(\Omega)}\|u_{zz}\|^{2/3}_{L^2(\Omega)} \leqslant c\|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} + c\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u_{zz}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c\exp(-ct)h_1(t),$$

这里 $h_1(t) \in L^1(0,\infty)$. 类似地,我们可以推得

$$(\|U_z\|^2_{L^2(\Omega)})^{2/3} \leqslant c\exp(-ct)h_2(t), \tag{36}$$

其中 $h_2(t) \in L^1(0,\infty)$. 联合(35)式和(36)式,我们可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|U_z\|^2_{L^2(\Omega)} + c\|U_z\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c\exp(-ct)h_3(t)\|U_z\|^{2/3}_{L^2(\Omega)}, \tag{37}$$

其中 $h_3(t) \in L^1(0,\infty)$. 由 Gronwall 不等式,我们知道:

$\|u_z\|^2_{L^2(\Omega)}$, $v_z\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|T_z\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|S_z\|^2_{L^2(\Omega)}$ 关于时间 t 是指数衰减的.

步骤 2 $\int_\Omega|\nabla U(t)|^2$ 关于时间 t 是指数衰减的.

由文献[4]中的(28)式~(31)式,我们有

$$\int_\Omega|\nabla U|^2 \leqslant c\int_\Omega|U|^2 + c\int_\Omega|U_t|^2. \tag{38}$$

由(32)式和(38)式,我们得到

$$\int_\Omega|\nabla U|^2 + c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla U|^2 \leqslant c\eta_1(t)\int_\Omega|\nabla U|^2 + c\int_\Omega|U|^2 + c\eta_2(t), \tag{39}$$

这里

$$\eta_1(t) = \|U\|_{L^2(\Omega)}\|U_{zx}\|_{L^2(\Omega)} + \|U_z\|_{L^2(\Omega)}\|U_{zx}\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\eta_2(t) = c\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + c(\|T_{zx}\|_{L^2(\Omega)}\|T_x\|_{L^2(\Omega)} + \|S_{zx}\|_{L^2(\Omega)}\|S_x\|_{L^2(\Omega)}),$$

且 $c\int_\Omega |U|^2 + c\eta_2(t) \in L^1(0,\infty)$. 由于 $\int_\Omega |U|^2$, $\int_\Omega |U_z|^2$ 关于时间 t 是指数衰减的, 再由(39)式, 我们有

$$(1 - c\exp(-ct)\|U_{zx}\|_{L^2(\Omega)})\int_\Omega |\nabla U|^2 + c\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla U|^2 \leqslant c\int_\Omega |U|^2 + c\eta_2(t). \tag{40}$$

对于充分大的 $t \geqslant t_0$, $1 - c\exp(-ct)\|U_{zx}\|_{L^2(\Omega)} > 0$. 所以, 由 Gronwall 不等式, 我们得到

$$\int_\Omega |\nabla U|^2 \leqslant c_0\exp(-ct)\int_\Omega |\nabla U_0|^2 \quad (t \geqslant t_0),$$

这里 $c_0 > 0$.

[参 考 文 献]

[1] Bresch D, Kazhikhov A, Lemoine J. On the two-dimensional hydrostatic Navier-Stokes equations[J]. SIAM J Math Anal, 2004, **36**(3): 796-814.

[2] Lions J L. Quelques M thodes de r solutions Des Probl mes aux Limites Nonlin aires[M]. Paris: Dunod, 1969.

[3] Guill n-Gonzûlez F, Masmoudi N, Rodr guez-Bellido M A. Anisotropic estimates and strong solutions for the primitive equations[J]. Diff Int Equ, 2001, **14**(11): 1381-1408.

[4] 黄代文, 郭柏灵. 关于海洋动力学中二维的大尺度原始方程组(Ⅰ)[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(5): 521-531.

[5] Ziane M. Regularity results for the stationary primitive equations of the atmosphere and the ocean[J]. Nonlinear Anal, TMA, 1997, **28**: 289-313.

On the Two-Dimensional Large-Scale Primitive Equations in Oceanic Dynamics (Ⅱ)

HUANG Dai-wen[1,2], GUO Bo-ling[1]

(1. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, P.R. China;

2. Graduate School, China Academy of Engineering Physics, Beijing 10088, P.R. China)

Abstract: The initial boundary value problem for the two-dimensional primitive equations of large-scale oceanic motion in geophysics is considered sequetially. Here the depth of the ocean is positive but not always a constant. By Faedo-Galerkin method and anisotropic inequalities, the existence, uniqueness of the global weakly strong solution and global strong solution for the probem were obtained. Moreover, by study the asymptotic behavior of solutions for the ablve problem, that the energy is exponential decay in time was proved.

Key words: primitive equations of the ocean; global strongsolution; regularity; exponential decay