

均布载荷作用下波纹扁壳的非线性振动^{*}

袁 鸿, 刘人怀

(暨南大学 应用力学研究所, 广州 510632)

(本刊编委刘人怀来稿)

摘要: 应用轴对称旋转扁壳的非线性大挠度动力学方程, 研究了波纹扁壳在均布载荷作用下的非线性受迫振动问题. 采用格林函数方法, 将扁壳的非线性偏微分方程组化为非线性积分微分方程组. 再使用展开法求出格林函数, 即将格林函数展开为特征函数的级数形式, 积分微分方程就成为具有退化核的形式, 从而容易得到关于时间的非线性常微分方程组. 针对单模态振形, 得到了谐和激励作用下的幅频响应. 作为算例, 研究了正弦波纹扁壳的非线性受迫振动现象. 该文的解答可供波纹壳的设计参考.

关键词: 波纹壳; 球壳; 格林函数; 积分方程; 非线性振动

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

引 言

波纹壳是一种灵敏弹性元件, 广泛应用在精密仪器仪表中. 要得到波纹壳的完整力学性能, 就需要针对其弯曲、稳定及振动特性进行系统性的研究. 尽管世界各国科学家在波纹壳的非线性弯曲和稳定研究方面做了大量的工作^[1-17], 在振动方面的研究工作却相对很少, 且都是从正交异性板理论出发研究自由振动问题^[18-20]. 造成这种状况的原因可归于波纹壳本身形状复杂, 参数较多, 再加上惯性力项, 使问题变得难度很大. 然而, 研究波纹壳的非线性振动问题不论在理论方面还是在应用方面都具有重要意义. 采用正交异性板理论, 王新志等^[18]选取波纹圆板中心最大振幅为摄动参数, 应用摄动变分法, 求得了波纹圆板的非线性固有频率. 刘人怀和李东使用 Galerkin 方法^[19]和修正迭代法^[20]成功地解决了波纹圆板的非线性自由振动问题, 得到了幅频关系式. 在波纹壳的非线性振动研究上, 尚有 4 个方向的理论工作值得研究人员继续努力, 分别是: 1) 从正交异性板理论出发研究波纹圆板非线性受迫振动问题; 2) 从壳体的非线性大挠度动力学方程出发研究波纹圆板非线性自由及受迫振动; 3) 从壳体的非线性大挠度动力学方程出发研究波纹壳非线性自由及受迫振动; 4) 从正交异性壳理论出发研究波纹壳非线性自由及受迫振动. 最近, 刘人怀和王^[17]的开创性研究工作使得从上述第 4 个方向进行系统研究成为可能.

本文从上述第 3 个方向着手, 应用轴对称旋转扁壳的非线性大挠度动力学方程, 研究了在均布载荷作用下波纹扁壳的非线性受迫振动问题. 采用格林函数方法, 将扁壳的非线性微分

* 收稿日期: 2006-02-14; 修订日期: 2007-03-09

作者简介: 袁鸿(1963—), 男, 湖南人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: + 86-20-85211772; E-mail: yuanhong@snu.edu.cn).

方程组化为非线性积分方程组. 再使用展开法求出格林函数, 即将格林函数展开为特征函数的级数形式, 积分方程就成为具有退化核的形式, 从而容易得到关于时间的非线性常微分方程组. 针对单模态振形, 得到了谐和激励作用下的幅频响应. 作为算例, 研究了正弦波纹扁球壳的非线性受迫振动现象. 本文的解答可供波纹壳的设计参考.

1 基本方程和边界条件

图1所示波纹壳, 它实际上是一个轴对称旋转壳, 由一个中心平台及带浅正弦波纹和球面锥度的环形壳组成. 波纹壳受均布载荷 P_0 作用, 其半径为 a , 中心平台的半径为 r_0 , 波纹环形壳部分的波长和波幅分别为 L 和 H_0 , 球面锥度由球面曲率半径 R_0 表示. 由于波纹较浅, 可以作为扁壳处理. 为了求解方便, 引入无量纲量

$$\begin{cases} R = \frac{r}{a}, \quad \tau = \left[\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\gamma a^4} \right]^{1/2} t, \\ \lambda^2 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)a^2}, \quad g = \frac{12(1-\nu^2)aF}{Eh^3}, \\ f = \frac{\beta}{\lambda}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad P = \frac{12(1-\nu^2)P_0a^4}{Eh^4}, \quad w^* = \frac{w}{h}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 r 是径向半径, h 是波纹壳厚度, γ 是质量密度, t 是时间, F 是应力函数, P_0 是均布载荷, E 和 ν 分别表示弹性模量和泊松比, α 是变形前子午线切线方向与水平方向的夹角, β 是旋转壳子午线方向的转角, w 是与 r 垂直方向的位移.

采用无量纲化表达式(1), 考虑横向惯性力的影响, 扁壳的大挠度动力学方程成为^{[1],[2]}

$$\begin{aligned} R \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + \frac{\partial f}{\partial R} - R^{-1}f - g(\alpha^* + f) = \\ - [12(1-\nu^2)]^{1/2} \left[\frac{1}{2}R^2P + \int_0^R \frac{\partial^2 w^*}{\partial \tau^2} R dR \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$R \frac{\partial^2 g}{\partial R^2} + \frac{\partial g}{\partial R} - R^{-1}g + f \left[\alpha^* + \frac{1}{2}f \right] = 0. \quad (3)$$

在外边界 $R = 1$ 处, 讨论最常见的夹紧固定情形, 其边界条件可以表示为

$$f = 0, \quad R = 1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial R} - \nu g = 0, \quad R = 1. \quad (5)$$

在波纹壳的中心 $R = 0$ 处, 由对称性及水平应力合力有限, 可以得到

$$f = 0, \quad R = 0, \quad (6)$$

$$g = 0, \quad R = 0, \quad (7)$$

除了上面列出的边界条件外, 还应补充一个在外边界 $R = 1$ 处垂直方向位移的约束条件

$$w^* = 0, \quad R = 1. \quad (8)$$

2 积分方程及其求解

采用格林函数方法, 可以将基本偏微分方程(2)式、(3)式及其边界条件(4)式至(7)式化为

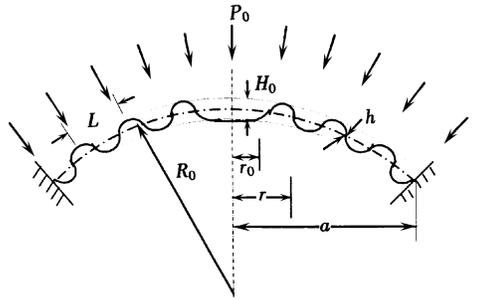


图1 波纹壳的轴向截面

下列积分微分方程组

$$f(\xi, \tau) = \int_0^1 K_1(x, \xi) \left\{ g(\alpha^* + f) - [12(1 - \nu^2)J]^{1/2} \left[\frac{1}{2}x^2 P + \int_0^x \frac{\partial^2 w^*}{\partial \tau^2} R dR \right] \right\} dx, \quad (9)$$

$$g(\xi, \tau) = - \int_0^1 K_2(x, \xi) f \left[\alpha^* + \frac{1}{2}f \right] dx, \quad (10)$$

(9) 式和 (10) 式中, 积分号下的 f 和 g 是 x 和 τ 的函数. $K_1(x, \xi)$ 是算子

$$L = x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - x^{-1}$$

在边界条件 (4) 和边界条件 (6) 下的格林函数, $K_2(x, \xi)$ 是算子 L 在边界条件 (5) 式和 (7) 式下的格林函数.

直接求出齐次二阶常微分算子 L 的两个线性无关解, 再遵循常微分方程教科书中的标准方法, 容易得到格林函数 $K_1(x, \xi)$ 和 $K_2(x, \xi)$, 它们是 x, ξ 的简单二元函数, 但这样得到的结果不便于对 (9) 式和 (10) 式进行数值计算. 下面应用展开法来求格林函数, 得到的 $K_1(x, \xi)$ 和 $K_2(x, \xi)$ 是用级数形式表示的, 代入 (9) 式和 (10) 式中, 获得具有退化核形式的积分方程, 从而很容易化为关于 τ 的非线性常微分方程组求解. $K_1(x, \xi)$ 和 $K_2(x, \xi)$ 可以应用展开法来求出^[22-23]

$$K_1(x, \xi) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i \xi) J_1(\lambda_i x)}{\lambda_i^2 \int_0^1 x J_1^2(\lambda_i x) dx}, \quad (11)$$

$$K_2(x, \xi) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\omega_i \xi) J_1(\omega_i x)}{\omega_i^2 \int_0^1 x J_1^2(\omega_i x) dx}, \quad (12)$$

上式中, J_1 是第一类贝塞尔函数, 表示旋转壳的特征函数或屈曲模态, λ_i 和 ω_i 是特征值, 由

$$J_1(\lambda_i) = 0 \quad (13)$$

和

$$\omega_i J_0(\omega_i) - (1 + \nu) J_1(\omega_i) = 0 \quad (14)$$

分别决定. 实际计算中, 总是取有限项进行求解. 为此, 考虑近似格林函数

$$K_1(x, \xi) = - \sum_{i=1}^N \frac{J_1(\lambda_i \xi) J_1(\lambda_i x)}{\lambda_i^2 \int_0^1 x J_1^2(\lambda_i x) dx}, \quad (15)$$

$$K_2(x, \xi) = - \sum_{i=1}^M \frac{J_1(\omega_i \xi) J_1(\omega_i x)}{\omega_i^2 \int_0^1 x J_1^2(\omega_i x) dx}. \quad (16)$$

将上面两式代入 (9) 式和 (10) 式中, 得到具有退化核的积分微分方程, 经过整理, 化为 $f_i(\tau)$ 和 $g_k(\tau)$ 关于 τ 的 $N + M$ 个常微分方程组

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M f_i(\tau) g_k(\tau) C_{ik} + \sum_{k=1}^M g_k(\tau) C_{jk} - [12(1 - \nu^2)J]^{1/2} \frac{1}{2} P C_j^2 + f_j(\tau) \lambda_j^2 C_{1j}^0 = \sum_{i=1}^N D_{ij} \frac{df_i(\tau)}{d\tau^2}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_i(\tau) f_j(\tau) C_{ij} + \sum_{j=1}^N f_j(\tau) C_{jk} - \omega_k^2 g_k(\tau) C_{2k}^0 = 0, \quad (18)$$

式中, $j = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, M$. $f_j(\tau)$ 是 $f(\xi, \tau)$ 的展开系数的前 N 个, $g_k(\tau)$ 是 $g(\xi, \tau)$ 的展开系数的前 M 个. 即

$$f(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^N f_j(\tau) J_1(\lambda_j \xi), \quad (19)$$

$$g(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^M g_k(\tau) J_1(\omega_k \xi), \quad (20)$$

其它系数为

$$C_{1j}^0 = \int_0^1 x J_1^2(\lambda_j x) dx, \quad (21)$$

$$C_{2k}^0 = \int_0^1 x J_1^2(\omega_k x) dx, \quad (22)$$

$$C_{ijk} = \int_0^1 J_1(\lambda_j x) J_1(\lambda_k x) J_1(\omega_k x) dx, \quad (23)$$

$$C_{jk} = \int_0^1 \alpha^* J_1(\lambda_j x) J_1(\omega_k x) dx, \quad (24)$$

$$C_j^2 = \int_0^1 x^2 J_1(\lambda_j x) dx = -\frac{1}{\lambda_j} J_0(\lambda_j) + \frac{2}{\lambda_j^2} J_1(\lambda_j), \quad (25)$$

$$D_{\bar{j}} = \frac{1}{\lambda_j^2} \int_0^1 x [\lambda_j J_0(\lambda_j) - J_1(\lambda_j x)] J_1(\lambda_j x) dx, \quad (26)$$

只要加上适当的初始条件, 从(17)式和(18)式就可以求得 $f_j(\tau)$ 和 $g_k(\tau)$, 从而由(19)式和(20)式得到 $f(\xi, \tau)$ 和 $g(\xi, \tau)$. 作为 $f(\xi, \tau)$ 和 $g(\xi, \tau)$ 的函数, 不难求出动力荷载下壳中的内力和位移, 然而, 本文研究的重点将放在计算波纹扁壳的非线性受迫振动的频率. 考虑单模态振动, 并设:

$$f_j(\tau) = - [12(1 - \nu^2) J^{1/2} / (C_1^1 f(\tau))], \quad f_j(\tau) = 0 \quad (j = 2, 3, \dots), \quad (27)$$

其中系数 C_1^1 是下面的积分

$$C_1^1 = \int_0^1 J_1(\lambda x) dx = -\frac{1}{\lambda} [J_0(\lambda) - 1], \quad (28)$$

记波纹扁壳的无量纲中心挠度为 w_0^* , 根据 $\beta = \partial w / \partial r$ 及(8)式、(19)式和(27)式, 得到

$$w_0^* = f(\tau), \quad (29)$$

这表示 $f(\tau)$ 实际上就是无量纲中心挠度, 因此 $f(\tau)$ 的振幅等于 w_0^* 的振幅. 将(27)式代入(17)式和(18)式中, 得到 $f(\tau)$ 关于 τ 的常微分方程

$$\frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + \omega_0^2 f(\tau) + \alpha_1 f^2(\tau) + \alpha_2 f^3(\tau) = \alpha_3 P(\tau), \quad (30)$$

上式中各系数是

$$\omega_0^2 = - \left[C_{11}^0 \lambda_1^2 + \sum_{k=1}^M \frac{C_{1k} C_{1k}}{\omega_k^2 C_{2k}^0} \right] \bigg|_{D_{11}}, \quad (31)$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} [12(1 - \nu^2) J^{1/2} \sum_{k=1}^M \frac{C_{11k} C_{1k}}{\omega_k^2 C_{2k}^0}] \bigg|_{(D_{11} C_1^1)}, \quad (32)$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} [12(1 - \nu^2) J \sum_{k=1}^M \frac{C_{11k} C_{11k}}{\omega_k^2 C_{2k}^0}] \bigg|_{(D_{11} C_1^1 C_1^1)}, \quad (33)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} \frac{C_1^2 C_1^1}{D_{11}}. \quad (34)$$

下面讨论受迫振动, 设波纹扁壳受谐和均布激励作用

$$P(\tau) = P \cos \omega \tau, \quad (35)$$

$$f(\tau) = f(0) \cos \omega \tau, \quad (36)$$

上式中 $f(0)$ 是 $f(\tau)$ 的振幅, 即 w_0^* 的振幅. 将(36)式代入(30)式中, 然后等式两边同乘以 $\cos \omega \tau$, 再将 $\omega \tau$ 从 0 到 2π 积分, 得到

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \alpha_2 f^2(0) - \alpha_3 \frac{P}{f(0)}. \quad (37)$$

根据(37)式可作出受迫振动时的幅频响应曲线.

3 算 例

图 1 是带中心平台的正弦波纹扁球壳, 各有关数据为:

$$E = 10^4 \text{ kg/mm}^2, \nu = 0.3, h = 0.22 \text{ mm}, a = 25 \text{ mm}, L = 6.6 \text{ mm}, H_0 = 0.75 \text{ mm},$$

中心平台的半径 $r_0 = 3.55 \text{ mm}$, 讨论球面曲率半径分别为 $R_0 = \infty, R_0 = 250 \text{ mm}$ 和 $R_0 = 100 \text{ mm}$ 的 3 种情形, 边界夹紧固定, 均布载荷下其非线性受迫振动频率.

基于上面给定的几何参数, 图 1 所示波纹膜片的轴向截面可以由膜片切线方向与 r 方向的夹角 α 用下式描述出来.

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leq R \leq 0.142 \text{ 时,} \\ -25R/R_0 - 0.357 \sin(23.8R + 6.045), & \text{当 } 0.142 \leq R \leq 1 \text{ 时.} \end{cases} \quad (38)$$

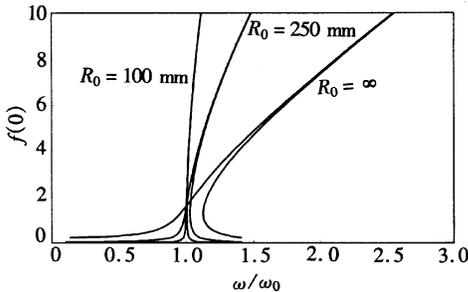


图 2 幅频响应曲线 ($P = 100$)

图 2 表示谐和均布载荷 $P = 100$ 作用下的幅频响应曲线, 横坐标是非线性激励频率与线性自由振动频率比率, 纵坐标是波纹扁壳无量纲中心挠度的振幅. 从图上看到, 幅频关系由两支响应曲线组成, 都具有明显的非线性特性, 且在一支响应曲线上存在明显的跳跃点, 在这一点处响应曲线的斜率变为无穷大. 当频率从比较小的值增加时, 挠度的振幅迅速增加, 当频率增加到某个大于线性自由振动频率的值时, 将发生跳跃现象, 挠度的

振幅突然减小, 这以后挠度的振幅随着频率的增加而减小, 对于较大的球面曲率半径, 发生跳跃时其相应的频率值也较大. 而当频率从比较大的值减小时, 挠度的振幅迅速增加, 当频率减小到某个大于线性自由振动频率的值时, 将发生跳跃现象, 挠度的振幅突然增大, 这以后挠度的振幅随着频率的减小而减小.

4 结 论

本文应用轴对称旋转扁壳的非线性大挠度动力学方程, 研究了在均布载荷作用下波纹扁壳的非线性受迫振动问题. 采用格林函数方法, 将扁壳的非线性微分方程组化为非线性积分方程组. 针对单模态振形, 得到了谐和激励作用下的幅频响应. 作为算例, 研究了正弦波纹扁球壳的非线性受迫振动现象. 可以断定, 在均布载荷作用下, 激励频率与无量纲挠度振幅之间的幅频响应曲线, 具有明显的非线性跳跃现象.

[参 考 文 献]

- [1] 袁 鸿, 刘 人 怀. 波纹壳的摄动解法 [M]. 北京: 科学出版社, 1999. 186-206.
- [2] 陈山林. 浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度弹性特征[J]. 应用数学和力学, 1980, 1(2): 261-272.
- [3] Hamada M, Seguchi Y, Ito S, et al. Numerical method for nonlinear axisymmetric bending of arbitrary shells of revolution and large deflection analyses of corrugated diaphragm and bellows [J]. Bulletin of JSME, 1968, 11(43): 24-33.
- [4] 宋卫平, 叶开沅. 中心集中载荷作用下波纹圆板的变形应力和稳定性研究[J]. 中国科学 A 辑, 1989, 32(1): 40-47.
- [5] 袁 鸿, 刘 人 怀. 波纹壳的非线性弯曲 [M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [6] 刘人怀. 波纹圆板的特征关系式[J]. 力学学报, 1978, (1): 47-52.
- [7] 刘人怀. 波纹环形板的非线性弯曲[J]. 中国科学 A 辑, 1984, 27(3): 247-253.
- [8] LIU Ren-huai. Large deflection of corrugated circular plate with a plane central region under the action of concentrated loads at the center [J]. Int J Non-Linear Mech, 1984, 19(5): 409-419.
- [9] LIU Ren-huai. Large deflection of corrugated circular plate with plane boundary region [J]. Solid Mech Archives, 1984, 9(4): 383-387.
- [10] LIU Ren-huai, YUAN Hong. Nonlinear bending of corrugated annular plate with large boundary corrugation [J]. Applied Mech Eng, 1997, 2(3): 353-367.
- [11] 袁鸿. 波纹壳的摄动解法 [J]. 应用力学学报, 1999, 16(1): 144-148.
- [12] 袁鸿, 刘人怀. 复合载荷作用下带边缘大波纹膜片的非线性弯曲 [J]. 应用数学和力学, 2003, 24(4): 367-372.
- [13] 袁鸿, 刘人怀. 均布载荷作用下带边缘大波纹膜片的非线性弯曲 [J]. 力学学报, 2003, 35(1): 14-20.
- [14] 袁鸿, 张湘伟. 集中载荷作用下具有光滑中心波纹膜片的非线性分析 [J]. 力学季刊, 2003, 24(1): 124-128.
- [15] 袁鸿, 张湘伟. 波纹壳的格林函数方法 [J]. 应用数学和力学, 2005, 26(7): 763-769.
- [16] 袁鸿, 张湘伟, 刘人怀. 波纹膜片的非线性稳定 [J]. 工程力学, 2005, 26(6): 202-206.
- [17] LIU Ren-huai, WANG Fan. Nonlinear stability of corrugated shallow spherical shell [J]. Int J of Applied Mechanics and Engineering, 2005, 10(2): 295-309.
- [18] 王新志, 王林祥, 胡小方. 波纹圆薄板的非线性振动 [J]. 应用数学和力学, 1987, 8(3): 237-245.
- [19] LIU Ren-huai, LI Dong. On the non-linear bending and vibration of corrugated circular plates [J]. Int J Non-Linear Mechanics, 1989, 24(3): 165-176.
- [20] 李东, 刘人怀. 修正迭代法在波纹圆板非线性振动问题中的应用 [J]. 应用数学和力学, 1990, 11(1): 13-21.
- [21] Libai A, Simmonds J G. The Nonlinear Theory of Elastic Shells of One Spatial Dimension [M]. Boston: Academic Press, 1988. 206-212.
- [22] Baker C T H. The Numerical Treatment of Integral Equations [M]. Oxford: Clarendon Press, 1977.
- [23] Stakgold I. Green's Function and Boundary Value Problems [M]. England: Jon Willey & Sons, 1979.

Nonlinear Vibration of Corrugated Shallow Shells Under Uniform Load

YUAN Hong, LIU Ren-huai

(Institute of Applied Mechanics, Jinan University, Guangzhou 510632, P. R. China)

Abstract: Based on the large deflection dynamic equations of axisymmetric shallow shells of revolution, the nonlinear forced vibration of a corrugated shallow shell under uniform load had been investigated. The nonlinear partial differential equations of shallow shell were reduced to the nonlinear integral-differential equations by using the method of Green's function. To solve the integral-differential equations, expansion method was used to obtain Green's function. Then the integral-differential equations were reduced to the form with degenerate core by expanding Green's function as series of characteristic function. Therefore, the integral-differential equations became nonlinear ordinary differential equations with regard to time. The amplitude-frequency response under harmonic force was obtained by considering single mode vibration. As a numerical example, forced vibration phenomena of shallow spherical shells with sinusoidal corrugation were studied. The obtained solutions are available for reference to design of corrugated shells.

Key words: corrugated shell; spherical shell; Green's function; integral equation; nonlinear vibration