

区间有限元方法及其在抗滑稳定性 分析中的应用*

邵国建¹, 苏静波²

(1. 河海大学 工程力学系, 南京 210098;

2. 河海大学 交通学院, 南京 210098)

(郭兴明推荐)

摘要: 通过区间值函数和实值函数的关系探讨了区间相关性导致的区间扩张的问题, 给出了保证区间计算获得足够精度的计算方法; 提出了基于单元的子区间摄动有限元计算方法, 并给出了提高计算效率的一些方法和获得较好计算精度时的子区间数目的近似计算公式. 结合工程实例, 基于单元的子区间有限元方法和抗滑稳定性分析方法给出了稳定性的区间范围, 为更合理地估计和评价结构的抗滑稳定性提供一定的依据.

关键词: 区间相关性; 区间扩张; 计算精度; 区间有限元; 抗滑稳定性

中图分类号: O242. 29; TU441. 35 **文献标识码:** A

引 言

目前抗滑稳定性分析中广泛使用的方法是极限平衡方法和数值分析方法. 极限平衡方法计算简单, 使用方便, 滑面确定后能有效地确定稳定安全系数. 数值模拟的精度取决于输入参数值和所选本构模型的准确性. 实际工程问题中给出计算参数和荷载的精确值是比较困难的, 但对于工程人员来说, 给出一个计算参数的上下界限却是容易的, 且容易为工程人员所接受; 倘若要全面了解区间变量对结构的响应, 那么把不确定参数作为区间数来进行区间分析比较合理.

近年来, 不确定结构的区间分析受到众多学者的关注. 主要应用于以下几个方面: 区间静力响应问题^[1-7], 区间动力特征值问题^[8-11], 区间可靠性问题^[12-13], 区间反演问题^[14-17]. 将区间分析和传统的有限元方法相结合, 可建立起区间有限元方法. 邱志平等^[2]基于线性方程组摄动的思想提出了区间有限元计算的摄动方法, 并且提出了针对区间刚度矩阵和区间荷载向量的子区间摄动方法. 对于位移上下界的大小来说, 这种方法忽略了整体刚度矩阵和整体荷载向量中区间参数之间的相互作用, 导致计算精度的降低. McWilliam^[4]等对区间刚度矩阵在区间参数处进行一阶 Taylor 展开, 提出了考虑区间参数之间相关性的方法, McWilliam 从自由度着手推导出区间位移的上下界, 而陈塑寰、杨晓伟等人^[5-6]从单元角度出发推导出求解位移上下界的计算公式; 这些方法考虑了区间参数之间的相关性, 可以获得较为合理的结果, 然而

* 收稿日期: 2006-09-06; 修订日期: 2007-01-26

作者简介: 邵国建(1962—), 男, 浙江台州人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人, Tel: + 86-25-83787976; E-mail: gjshao@hhu.edu.cn).

当区间参数较大时存在一定的困难.

本文首先通过区间值函数和实值函数的关系,探讨了区间相关性导致的区间扩张的问题,接着给出了保证区间计算获得足够精度的计算方法;然后提出了基于单元的子区间摄动有限元计算方法,并给出了提高计算效率的一些方法和获得较好计算精度时的子区间数目的近似计算公式.最后结合工程实例,基于单元的子区间有限元方法和抗滑稳定性分析方法给出了稳定性的区间范围,为更合理地估计和评价结构的抗滑稳定性提供一定的依据.

1 区间扩张问题及处理方法

1.1 区间扩张问题

对于区间的扩张问题可以通过区间值函数

$$F(\mathbf{X}^1) = F(X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^1) \quad (1)$$

和实值函数

$$f(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (x_i \in X_i^1, i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

的关系进行说明.首先看下面的例子^[18]:

对于区间值函数

$$F^{(1)}(\mathbf{X}^1) = \frac{X_1^1 + X_2^1}{X_1^1 - X_2^1} X_3^1, \quad (3)$$

$$F^{(2)}(\mathbf{X}^1) = \left[1 + \frac{2}{X_1^1/X_2^1 - 1} \right] X_3^1, \quad (4)$$

给定 $X_1^1 = [1, 2]$, $X_2^1 = [5, 10]$, $X_3^1 = [2, 3]$. 实值函数

$$F(\mathbf{X}) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} x_3, \quad (x_1 \in X_1^1, x_2 \in X_2^1, x_3 \in X_3^1). \quad (5)$$

由式(5)得实值函数的值域为 $[-7, -22/9]$,由式(3)和式(4)通过区间运算获得区间值函数的值域分别为 $[-12, -4/3]$ 和 $[-7, -22/9]$.由此可见,具有相关性的区间参数进行区间计算会导致区间扩张;区间参数出现的次数越少,区间计算的相关性就越小,当每一个区间参数仅仅出现1次时,可以得出较为精确的解.因此,有下面的式子成立

$$\left\{ f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in X_i^1, i = 1, 2, \dots, n \right\} \subseteq F(X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^1). \quad (6)$$

1.2 区间扩张的处理方法

对于区间值函数 $F(\mathbf{X}^1)$ 和实值函数 $f(x)$, $x \in X^1$, $X^1 = [a, b]$, 将区间数 X^1 分成 N 个子区间 X_i^1 ,

$$X_i^1 = \left[a + \frac{(i-1)(b-a)}{N}, a + \frac{i(b-a)}{N} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

随着 N 值的增大直到无穷.这时对于任意 $x \in X^1$, 均可以有 X_i^1 与之相对应,使 $x \rightarrow X_i^1$. 这样,最终 $\{f(x), x \in X^1\} \rightarrow F(\mathbf{X}^1)$, 就不会导致区间的扩张了.

对于区间值函数 $F(\mathbf{X}^1) = F(X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^1)$, 对其参数进行一阶 Taylor 展开^[6]得

$$F(\mathbf{X}^1) = F(X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i} \Big|_{X^c} \Delta X_i e_i, \quad (7)$$

其中 $e_i = [-1, 1]$. 这样,就可以将区间值函数 $F(\mathbf{X}^1)$ 化成每一个参数仅仅出现1次的情况,通过式(4)的计算可以得知会得到区间计算的较为精确的解.当 ΔX_i 比较小时,式(7)的误差是很小的.

事实上,将上述两种方法联合应用可降低区间扩张的问题.对于函数 $f(x) = x(x-1)$,

($x \in [0, 1/2]$; $f(x)$ 真实值域是 $[-0.25, 0]$; 直接应用区间算法得出 $f(x)$ 区间为 $[-0.5, 0]$; 子区间数目为 8 时, 应用区间算法得 $f(x)$ 区间为 $[-0.281, 0]$, 子区间数目为 256 时, 应用区间算法得 $f(x)$ 区间为 $[-0.251, 0]$; 摄动方法获得的 $f(x)$ 区间为 $[-0.313, -0.063]$; 子区间摄动 (子区间数目为 8) 获得的 $f(x)$ 区间为 $[-0.251, -0.001]$).

由此可见, 子区间方法与摄动方法均可以减弱区间的扩张, 并且子区间与摄动方法相结合可以较少的子区间数目得出较为精确的区间计算结果.

2 基于单元的子区间摄动有限元方法

在多数结构分析中有限元的公式表述为 $KU = R$, 但对于具有不确定性区间参数的结构系统来说, 它的不确定参数可能包括弹性模量、密度、外荷载、几何尺寸等, 这时有有限元公式表述为

$$K(a^I) U^I = R(a^I). \tag{8}$$

基于上述降低区间扩张的方法及文献[6] 基于单元的区间有限元计算公式, 为了获得较为精确的结构区间响应结果, 下面将给出基于单元的子区间摄动有限元方法计算公式. 设不确定区间参数向量为

$$\begin{cases} a^I = (a_1^I, a_2^I, \dots, a_m^I), \\ a_r^I = [\underline{a}_r, \overline{a}_r] = [a_r^c - \Delta a_r, a_r^c + \Delta a_r] \quad (r = 1, 2, \dots, m). \end{cases} \tag{9}$$

对 $a_r^I (r = 1, 2, \dots, m)$ 所分子区间数目为 $L_r (r = 1, 2, \dots, m)$, 则

$$a_{r_p}^I = [\underline{a}_r + 2(p-1)\Delta a_r/L_r, \overline{a}_r + 2p\Delta a_r/L_r] \quad (r = 1, 2, \dots, m; p = 1, 2, \dots, L_r), \tag{10}$$

$$a_s^I = (a_{1j}^I, a_{2k}^I, \dots, a_{mq}^I), \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, L_1 \\ k = 1, 2, \dots, L_2 \\ \vdots \\ q = 1, 2, \dots, L_m \end{cases}, \quad s = 1, 2, \dots, (L_1 L_2 \dots L_m). \tag{11}$$

对于每一个 a_s^I , 单元劲度矩阵、单元荷载向量分别为 $K_{is}(a_s^I)$ 、 $R_{is}(a_s^I)$, 它们对不确定区间参数进行一阶 Taylor 展开得

$$K_{is}(a_s^I) = K_{is}(a_s^c) + \sum_{r=1}^m \frac{\partial K_{is}}{\partial a_r} \Big|_{a_s^c} \frac{\Delta a_r}{L_r} e_{ir}, \tag{12}$$

$$R_{is}(a_s^I) = R_{is}(a_s^c) + \sum_{r=1}^m \frac{\partial R_{is}}{\partial a_r} \Big|_{a_s^c} \frac{\Delta a_r}{L_r} e_{ir}, \tag{13}$$

其中 $e_{ir} = [-1, 1]$. 由常规有限元方法可知, 系统的整体劲度矩阵和整体荷载向量可表示为下列形式

$$K_s(a_s^I) = K_s(a_s^c) + \Delta K_s^I, \tag{14}$$

$$R_s(a_s^I) = R_s(a_s^c) + \Delta R_s^I, \tag{15}$$

其中

$$\Delta K_s^I = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \frac{\partial K_{is}}{\partial a_r} \Big|_{a_s^c} \frac{\Delta a_r}{L_r} e_{ir}, \tag{16}$$

$$\Delta R_s^I = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \frac{\partial R_{is}}{\partial a_r} \Big|_{a_s^c} \frac{\Delta a_r}{L_r} e_{ir}. \tag{17}$$

将 ΔK_s^I 和 ΔR_s^I 看作 $K_s(a_s^I)$ 和 $R_s(a_s^I)$ 在 $R_s(a_s^c)$ 和 $R_s(a_s^c)$ 处的摄动量, 那么由摄动公式

$U_1 = -K^{-1}(\Delta KU^c - \Delta R)^{[15]}$ 和区间扩张理论可得到静力位移的一阶不确定量为

$$\Delta U_{1s} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \left| \left[-K_s^{-1}(a_s^c) \left(\frac{\partial K_{is}}{\partial a_r} \Big|_{a_s^c} U_s^c - \frac{\partial R_{is}}{\partial a_r} \Big|_{a_s^c} \right) \frac{\Delta a_r}{L_r} \right] \right|, \quad (18)$$

其中 K_{is} 和 R_{is} 分别是 K_{is} 和 R_{is} 扩充后的矩阵和向量, $U_s^c = K_s^{-1}(a_s^c) \cdot R_s(a_s^c)$. 最后, 我们可以得到区间参数结构静力位移的上、下界为

$$\underline{U} = \min_s (U_s^c - \Delta U_{1s}), \quad (19)$$

$$U = \max_s (U_s^c + \Delta U_{1s}). \quad (20)$$

式(18)需要求 $K_s(a_s^c)$ 的逆矩阵, 对于不确定参数较少或结构有限元计算自由度较少时, 可以满足计算速度要求. 但当不确定参数较多或结构有限元计算自由度较多时, 计算效率比较低, 这里给出两种处理方法: 仅仅求解一次 $K(a^c)$ 逆矩阵来代替 $K_s(a_s^c)$ 的逆矩阵; 当区间偏差较大时, 可以先将区间分成几个范围稍大的子区间, 然后再对这些小子区间进行细分并用方法一进行处理, 这样就减少了求逆的次数. 另外, 针对逆矩阵求解较慢的情况, 可以采用 Matlab 里面的功能块求解逆矩阵.

与确定性有限元应力的求解公式类比可得

$$\sigma^1 = D^1 B^1 (u^1)^e = S^1 (u^1)^e. \quad (21)$$

由于本节是基于单元的子区间摄动方法, 故上式可变为如下形式:

$$\sigma_s^1 = D_s^1 B^1 (u^1)_s^e = S_s^1 (u^1)_s^e, \quad (22)$$

式中: $D_s^1 = D(a_s^1)$ 为单元弹性区间矩阵, $(u^1)_s^e$ 为单元结点位移区间列阵, $S_s^1 = D(a_s^1) B^1$ 为应力转换区间矩阵, B^1 为应变转换矩阵. 最后可以求得结构的应力区间为:

$$\underline{\sigma} = \min_s (\sigma_s^1), \quad (23)$$

$$\sigma = \max_s (\sigma_s^1). \quad (24)$$

需要说明的是, 由于 $(u^1)_s^e$ 的求解过程中有 $D(a_s^1)$ 与 B^1 的参与, 即 $(u^1)_s^e$ 与 $D(a_s^1)$ 和 B^1 有一定的相关性, 这样会导致应力区间的扩张, 最终使得应力区间的精度低于位移区间的精度.

3 子区间划分数目的计算方法

针对弹性情况, 假定不考虑荷载参数区间, 由公式(18)可知, 对于单区间参数结构来说, 要使结构响应区间达到足够的计算精度, 有下列近似公式成立:

$$\Delta U_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^1 \left| \left[-K^{-1}(a^c) \left(\frac{\partial K_i}{\partial a_r} \Big|_{a^c} U_0 \right) \right] \right| (\Delta a_r) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left| \left[-K^{-1}(a^c) \left(\frac{\partial K_i}{\partial a} \Big|_{a^c} U_0 \right) \right] \right| \right\} \cdot (\Delta a) \rightarrow n \cdot \left| \left[-K^{-1}(a^c) \left(\frac{\partial K_i}{\partial a} \Big|_{a^c} U_0 \right) \right] \right| (\Delta a) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

任取其中一个单元, 可以求 $\left| \left[-K^{-1}(a^c) \left(\frac{\partial K_i}{\partial a} \Big|_{a^c} U_0 \right) \right] \right|$ 值, 令

$$C \in \max \left| \left[-K^{-1}(a^c) \left(\frac{\partial K_i}{\partial a} \Big|_{a^c} U_0 \right) \right] \right| \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (25)$$

要使 $\Delta u_j (\in \Delta U_1)$ (j 为与 C 对应的向量位置) 足够小, 必使子区间数目 L 满足

$$\Delta u_j = nC \Delta a / L, \quad (26)$$

$$L = nC \Delta a / (\Delta u_j), \quad (27)$$

其中: Δa 为结构参数区间偏差, n 为具有不确定参数的单元数目. 一般来说, 基于单元的区间有限元方法首先需计算出结构整体刚度矩阵、位移响应均值以及整体刚度矩阵的逆矩阵, 这样计算式(25) 并不复杂; 对于 Δu_j 来说, 由于 u_j^c 已经求出, 由计算允许偏差 ε 通过 $\Delta u_j = \varepsilon |u_j^c|$ 即可求得.

式(27) 给出了计算单参数情况结构参数区间分割子区间的数目, 对于多参数来说, 某一参数分割子区间的数目将变为

$$L_r = nmC \Delta a_r / (\Delta u_j) \quad (r = 1, 2, \dots, m), \tag{28}$$

其中: Δa_r 为结构第 r 参数区间偏差, L_r 为结构第 r 个参数区间分割的子区间数目, m 为不确定结构参数的个数.

4 稳定安全系数区间的计算

4.1 点抗滑安全系数

在确定性计算中, 点抗滑安全系数可由

$$K = \tau_f / \tau \tag{29}$$

来确定, 其中: $\tau_f = c + \sigma \tan \varphi$, c 、 φ 为材料的粘聚力和内摩擦角, σ 、 τ 分别为滑动面上的正应力和剪应力.

应用区间有限元方法计算出滑动面上单元的正应力区间 σ^I 和剪应力区间 τ^I , 于是

$$K^I = (c - \sigma^I \tan \varphi) / \tau^I, \tag{30}$$

其中: 若 $\sigma > 0$, 取 $\underline{\sigma} = \sigma = 0$; 若 $\sigma < 0$, 取 $\sigma = 0$; K^I 即为点抗滑安全系数区间.

4.2 整体抗滑安全系数

在确定性计算中, 整体抗滑安全系数计算公式为

$$K = \sum_e \tau_f \setminus \sum_e \tau. \tag{31}$$

应用区间有限元方法计算出滑动面上单元的正应力区间 σ^I 和剪应力区间 τ^I , 于是整体抗滑安全系数区间计算公式为

$$K^I = \sum_e (c - \sigma^I \tan \varphi) \setminus \sum_e \tau^I. \tag{32}$$

5 算例分析

算例 1 如图 1 所示的桁架结构, 不确定参数为杆横截面面积和外荷载. 桁架材料的弹性模量 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $L = 1 \text{ m}$, 杆 1、2、3、4 的横截面面积 $A = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, 杆 5、6 的横截面面积 $A^I = [1.0 \times 10^{-3}, 1.1 \times 10^{-3}] \text{ m}^2$, 外荷载 $P^I = [20, 21] \text{ kN}$.

设 $\varepsilon = 0.05$, 则计算获得 $L_k \approx 1.0$, 由此可知参数区间不进行分割即可. 表 1 为桁架结构位移区间计算结果对比表.

表 1 桁架结构位移区间计算结果对比表

	名义均值 u_{0i}	区间摄动方法 ^[2]		Monte-Carlo 方法		基于单元区间有限元法	
		$\min(u_i)$	$\max(u_i)$	$\min(u_i)$	$\max(u_i)$	$\min(u_i)$	$\max(u_i)$
u_1	0.858 5	0.69	1.03	0.817 6	0.902 4	0.816 1	0.908 0
u_2	0.326 7	0.26	0.40	0.313 6	0.340 1	0.313 5	0.339 9
u_2	0.895 8	0.73	1.07	0.853 8	0.940 8	0.852 3	0.939 3
u_4	-0.311 1	-0.38	-0.24	-0.324 0	-0.298 4	-0.323 9	-0.298 2

由表 1 可以看出, 本文考虑了刚度矩阵中参数之间的相互关系并且给出了降低区间扩张

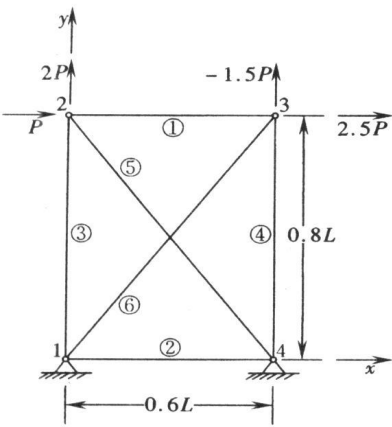


图 1 桁架结构图

的子区间数目, 明显地改善了区间计算的结果, 计算所得结果比较接近实际区间. 本例中两种计算方法所用时间基本相同, 基于单元的子区间摄动有限元方法公式形成比较复杂, 用时稍多; 但需要指出的是, 随着计算情况的复杂、子区间数目和含区间参数单元数目的增加, 计算的工作量会随之增加.

算例 2 上部结构和地基系统如图 2 所示, 其中上部结构参数为 $E = 2.4 \times 10^4 \text{ MPa}$, $\mu = 0.1667$ 、自重 $\gamma = 24.0 \text{ kN/m}^3$, 水平分布力 F 为 300 kN/m ; 地基参数为 $E = 2.0 \times 10^4 \text{ MPa}$, $\mu = 0.25$. 将软弱夹层的弹性模量考虑为区间变量, 软弱夹层参数为 $E = [1.0, 1.5] \times 10^3 \text{ MPa}$, $\mu = 0.25$ 、 $\gamma = 21.5 \text{ kN/m}^3$ 、 $c = 0.1 \text{ MPa}$ 、 $\varphi = 32^\circ$, 软弱夹层厚度为 0.02 m .

运用本文基于单元的子区间摄动有限元方法, 计算分析上部结构与地基接触面的受力情况和抗滑安全系数; 在确定性有限元计算时, 取软弱夹层的弹性模量为区间变量的两个端点值, 其它参数相同. 坐标系以水平向为 x 方向, 垂向为 y 方向; 单元网格图见图 3, 共 60 个单元、80 个结点, 其中软弱夹层 4 个单元; 地基两侧和底面均采用链杆约束.

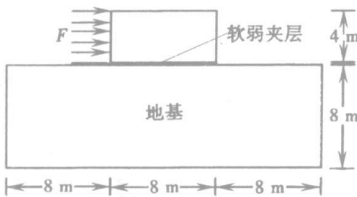


图 2 上部结构和地基系统

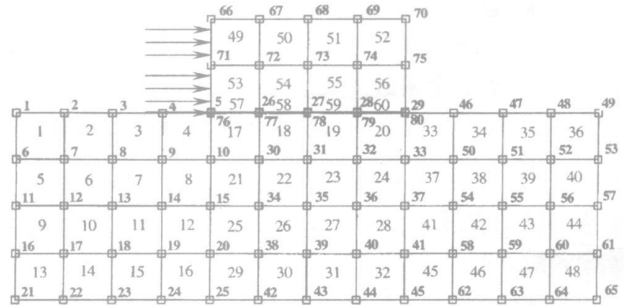


图 3 计算网格图

设 $\varepsilon = 0.05$, 则计算获得 $L_k \approx 64$, 把参数区间分割为 64 个子区间. 表 2、表 3 给出了区间有限元与确定性有限元计算所得应力 σ_y 、 τ_{xy} 对比, 表 4 给出了软弱夹层点抗滑安全系数的对比.

表 2 软弱夹层单元应力 σ_y 对比 (MPa)

单元号	区间有限元计算	确定性有限元计算	
	$E = [1.0, 1.5] \times 10^3$	$E = 1.0 \times 10^3$	$E = 1.5 \times 10^3$
57	$[6.913, 8.892] \times 10^{-2}$	7.920×10^{-2}	8.030×10^{-2}
58	$[-11.056, -9.164] \times 10^{-2}$	-9.759×10^{-2}	-10.210×10^{-2}
59	$[-8.457, -6.784] \times 10^{-2}$	-7.912×10^{-2}	-7.500×10^{-2}
60	$[-29.895, -26.706] \times 10^{-2}$	-28.648×10^{-2}	-28.720×10^{-2}

表 2 和表 3 所示的应力区间比确定性有限元方法计算的上下界稍宽, 这主要是由于最终获得的应力区间是通过位移区间与弹性区间矩阵、应变转换矩阵相乘计算得来的, 而位移区间与弹性区间矩阵有一定的相关性. 由表 4 可以看出, 由区间计算获得的抗滑稳定安全系数区间包含确定性计算获得的安全系数值, 为较合理地评价结构的安全系数提供了一定的依据.

从该算例可以看出, 对于仅仅部分单元具有不确定区间参数的问题, 基于单元的子区间摄动方法的计算量不大, 并可以获得较高的计算精度.

表 3 软弱夹层单元应力 τ_{xy} 对比 (MPa)

单元号	区间有限元计算	确定性有限元计算	
	$E = [1.0, 1.5] \times 10^3$	$E = 1.0 \times 10^3$	$E = 1.5 \times 10^3$
57	$[22.612, 26.424] \times 10^{-2}$	23.934×10^{-2}	24.786×10^{-2}
58	$[7.871, 9.739] \times 10^{-2}$	9.172×10^{-2}	8.356×10^{-2}
59	$[8.132, 10.049] \times 10^{-2}$	9.259×10^{-2}	8.778×10^{-2}
60	$[16.103, 20.217] \times 10^{-2}$	17.785×10^{-2}	18.230×10^{-2}

表 4 软弱夹层单元抗滑安全系数对比

单元号	区间有限元计算	确定性有限元计算	
	$E = [1.0, 1.5] \times 10^3$ MPa	$E = 1.0 \times 10^3$ MPa	$E = 1.5 \times 10^3$ MPa
57	[0.378, 0.442]	0.418	0.403
58	[1.615, 2.148]	1.755	1.960
59	[1.417, 1.879]	1.614	1.673
60	[1.320, 1.781]	1.569	1.533
整体抗滑稳定性	[1.003, 1.295]	1.146	1.147

6 结 论

从区间有限元计算精度的角度出发, 利用区间扩张的摄动和子区间处理技术, 本文提出了基于单元的子区间摄动有限元方法. 从数值模拟结果可以看出, 该方法在计算具有不确定性区间参数的结构的区间位移、区间应力方面是有效的; 对于自由度较少或者含不确定参数的单元较少时, 计算速度是非常快的, 并且能得到较高的计算精度, 但是当自由度较多时, 如何进一步提高其计算效率仍需进一步的研究.

本文提出了基于区间分析方法来分析结构的抗滑稳定性问题, 可以获得结构抗滑稳定安全系数的区间范围, 为更合理地估计和评价结构的稳定性提供一定的依据. 文中仅仅将弹性模量作为区间参数, 实际分析中还可以将 Poisson 比、粘聚力、内摩擦角等作为区间参数.

[参 考 文 献]

- [1] Rao S S, Berke L. Analysis of uncertain structural systems using interval analysis[J]. AIAA J, 1997, 35(4): 725-735.
- [2] QIU Zhi-ping, Elishakoff I. Anti-optimization of structures with large uncertain but non-random parameters via interval analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 152(3/4): 361-372.
- [3] 邱志平, 顾元宪. 有界不确定参数结构位移范围的区间摄动法[J]. 应用力学学报, 1999, 16(1): 1-10.
- [4] McWilliam S. Anti-optimization of uncertain structures using interval analysis[J]. Computers and Structures, 2001, 79(4): 421-430.
- [5] CHEN Si-huan, LIAN Hua-dong, YANG Xiao-wei. Interval static displacement analysis for structures with interval parameters[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(2): 393-407.
- [6] 杨晓伟, 陈塑寰, 滕绍勇. 基于单元的静力区间有限元法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(2): 179-183.

- [7] QIU Zhi-ping. Comparison of static response of structures using convex models and interval analysis method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, **56**(12): 1735-1753.
- [8] 邱志平, 陈塑寰, 刘中生. 区间参数结构振动问题的矩阵摄动法[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(6): 519-527.
- [9] 邱志平, 顾元宪, 王寿梅. 有界参数结构特征值的上下界定理[J]. 力学学报, 1999, **31**(4): 466-474.
- [10] QIU Zhi-ping, WANG Xia-jun. Comparison of dynamic response of structures with uncertain-but-bounded parameters using non-probabilistic interval analysis method and probabilistic approach[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, **40**(20): 5423-5439.
- [11] 吴杰, 陈塑寰. 区间参数振动系统的动力优化[J]. 力学学报, 2003, **35**(3): 373-376.
- [12] Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability[J]. Structure Safety, 1994, **14**(4): 227-245.
- [13] 郭书祥. 非随机不确定结构的可靠性方法和优化设计研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2002.
- [14] Nakagiri S, Suzuki K. Finite element interval analysis of external loads identified by displacement input with uncertainty[J]. Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, **168**(1): 63-72.
- [15] 王登刚, 刘迎曦, 李守巨, 等. 巷道围岩初始应力场和弹性模量的区间反演方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, **21**(3): 305-308.
- [16] 王登刚, 刘迎曦, 李守巨. 混凝土坝振动参数区间逆分析[J]. 大连理工大学学报, 2002, **42**(5): 522-526.
- [17] 刘世君, 徐卫亚, 王红春, 等. 岩石力学参数的区间参数摄动反分析方法[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(6): 760-763.
- [18] 全凌云, 杨钊. 区间数和泛灰数在区间分析中的比较[J]. 河北工业大学学报, 2001, **30**(4): 93-96.

Interval Finite Element Method and Its Application on Anti-Slide Stability Analysis

SHAO Guo-jian¹, SU Jing-bo²

(1. Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China;
2. College of Traffic, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China)

Abstract: The problem of interval correlation results in interval extension is discussed by the relationship of interval-valued functions and real-valued functions. The methods of reducing interval extension are given. Based on the ideas of the paper, the formulas of sub-interval perturbed finite element method based on the elements were given. The sub-interval amount is discussed and the approximate computation formula was given. At the same time, the computational precision was discussed and some measures of improving computational efficiency were given. Finally, based on sub-interval perturbed finite element method and anti-slide stability analysis method, the formula for computing the bounds of stability factor was given. Which will provide a basis for estimating and evaluating reasonably anti-slide stability of structures.

Key words: interval correlation; interval extension; computational precision; interval finite element method; anti-slide stability