

# 激波捕捉差分方法研究<sup>\*</sup>

涂国华<sup>1,2,3</sup>, 袁湘江<sup>1,3</sup>, 陆利蓬<sup>4</sup>

- (1. 中国空气动力研究与发展中心, 四川 绵阳 621000;
2. 天津市现代工程力学重点实验室, 天津 300072;
3. 北京航空航天大学 国家计算流体力学实验室, 北京 100083;
4. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

(鲁传敬推荐)

**摘要:** 在迎风格式和矢量通量分裂技术的基础之上, 对捕捉激波方法进行一种新的尝试. 该方法首先对原始格式在特征方向上进行投影, 然后用限制器对这些特征分量的变化幅值进行限制以抑止非物理波动, 最后再把它转换成守恒形式, 得到了基本上无振荡的激波捕捉格式. 用该方法对两种迎风显示格式(二阶和三阶)和 3 种迎风紧致格式(三阶、五阶和七阶)进行处理, 并在一维和二维的情况下进行了应用测试. 通过与高阶 WENO、MP、Compact-WENO 等格式的比较, 表明该方法在光滑捕捉激波的前提下仍有较高精度和分辨率.

**关键词:** 高阶格式; 激波捕捉; 迎风格式; 紧致格式; 高分辨率; 守恒格式

**中图分类号:** O346.1      **文献标识码:** A

## 引 言

湍流的直接数值模拟(DNS)、大涡模拟(LES)以及计算声学(CAA)等都对计算格式具有很高要求. 通常, 为了得到高品质的数值结果, 需要采用谱方法、紧致格式或其他高阶格式. 但是, 当流场含有间断或弱间断时, 采用线性格式计算会出现非物理解, 这些非物理解常常影响和制约了数值计算精度, 于是需要对格式做出相应的处理, 其中尤为关键的是提高格式光滑捕捉激波的能力.

自上个世纪中后期以来, 在计算含有激波的流场方面取得了不断的进步, 并发展出了多种激波捕捉差分方法. 比如 TVD 方法<sup>[1]</sup>, 近似 Riemann 方法<sup>[2]</sup>, ASUM 类方法<sup>[3]</sup>, ENO 以及 WENO 方法<sup>[4,6]</sup>, MP(monotonicity preserving)方法<sup>[7]</sup>等. TVD、近似 Riemann 和 ASUM 等格式在航空航天工程中得到大量运用, 但是, 发展相应的高阶精度格式是及其困难的, 比如传统的 TVD 格式在极值点的精度常降为一阶. ENO/WENO 格式在光滑捕捉激波的同时, 也能在极值点保持高阶精度, 被大量用于 DNS 和 LES, 但是在计算大梯度流场(比如边界层和热流计算)时不太

\* 收稿日期: 2006-02-24; 修订日期: 2007-01-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10321002; 10672012)

作者简介: 涂国华(1977—), 男, 四川中江人, 博士生(Tel: + 86-10-82317014; Email: tootoo85@21cn.com);

袁湘江(联系人, Tel: + 86-10-82332056; Fax: + 86-10-82317018; E-mail: yuan\_xj18@163.com).

理想,对接触间断的耗散也较大. MP方法的精度和分辨率都较高,但是在多维情况下和极值点附近的精度有所降低.

为了在光滑捕捉激波的同时又能提高格式精度,我们融合了以下几点已经比较成熟的处理方法: 1) 矢量通量分裂和迎风处理; 2) 限制器; 3) TVD思想; 4) 特征投影; 5) 高精度计算格式特别是紧致格式. 本文首先在矢量通量分裂技术和迎风型格式的基础之上,把物理量(通量或守恒变量等)沿特征方向进行投影,然后通过具有 TVD 性质的限制器对投影量的变化幅值进行约束以避免发生非物理现象. 针对以下 5 种不能光滑捕捉间断的线性迎风格式: 二阶和三阶迎风显式格式,三阶、五阶和七阶迎风紧致格式,采用本文的激波捕捉方法进行处理后,得到了在间断附近基本上无虚假振荡的非线性激波捕捉格式,并在一维和二维 Euler 系统中通过数值计算验证了该方法的高阶精度和高分辨率.

## 1 捕捉激波的特征处理方法

### 1.1 对通量型格式的特征处理

考虑如下双曲系统

$$\partial Q/\partial t + \partial F(Q)/\partial x = 0, \quad (1)$$

并令 Jacobi 矩阵

$$A(Q) = \partial F/\partial Q. \quad (2)$$

设计算空间被均匀分成间距为  $\Delta x_j$  的离散空间,那么  $x_j$  处的物理量可用下标  $j$  来指示. 不论采取什么格式对(1)式进行离散,我们总能把一类守恒型的半离散格写成如下形式:

$$(dQ/dt)_j = - (H_{j+1/2}^+ + H_{j+1/2}^- - H_{j-1/2}^+ - H_{j-1/2}^-) / \Delta x_j, \quad (3)$$

其中  $H_{j\pm 1/2}^\pm$  可看作是网格交接面上的正负通量,不同的格式对其有不同定义.

设  $F^\pm$  是某类单调正负通量(比如采用 Steger-Warming 分裂技术得到的通量). 如果把  $F_j^\pm$  视为网格单元的平均通量,那么  $H_{j+1/2}^+ - F_j^+$  与  $F_{j+1}^- - H_{j+1/2}^-$  体现了网格  $j$  与网格  $j+1$  之间的通量流动情况.

由于双曲系统的信息沿着特征方向传播,许多文献都把它投影到特征空间中处理. 通量的流量在特征空间中的投影为

$$\Delta \mathcal{H}_{j+1/2}^+ = L_{j+1/2}^+(H_{j+1/2}^+ - F_j^+), \quad \Delta \mathcal{H}_{j+1/2}^- = L_{j+1/2}^-(F_{j+1}^- - H_{j+1/2}^-), \quad (4)$$

其中  $L_{j\pm 1/2}^\pm$  为  $A_{j\pm 1/2}^\pm$  的左特征矩阵,则它的右特征矩阵  $R_{j\pm 1/2}^\pm = (L_{j\pm 1/2}^\pm)^{-1}$ .  $A_{j\pm 1/2}^\pm$  可取  $j$  和  $j+1$  点的 Roe 平均或算术平均. 但我们建议采用网格内的平均量,即  $A_{j+1/2}^+ = A(Q_j)$ ,  $A_{j+1/2}^- = A(Q_{j+1})$ . 计算经验表明,这样不仅计算量小,而且对精度几乎没有影响. 知道  $A_{j\pm 1/2}^\pm$  后,便可以求相应的左右特征矩阵.

$\Delta \mathcal{H}_{j+1/2}^\pm$  体现了特征波在传播过程中的幅值变化情况. 在某些情况下(比如激波),可能会出现同族特征线的相交现象,考虑到熵增条件,信息在沿这些特征线传播时将会减弱,即特征波的幅值非线性地减小. 另外,即使没有发生同族特征线相交,计算过程中仍然可能出现不满足熵增条件的解. 所以有必要对  $\Delta \mathcal{H}_{j+1/2}^\pm$  进行限制. 本文借用文献[8]的 TVD 限制器对  $\Delta \mathcal{H}_{j+1/2}^\pm$  进行限制,得到

$$\begin{cases} \delta \mathcal{H}_{j+1/2}^+ = \varphi(\Delta \mathcal{H}_{j+1/2}^+, \Delta \mathcal{H}_{j+1/2}^+, \Delta \mathcal{H}_{j+1/2}^-), \\ \delta \mathcal{H}_{j+1/2}^- = \varphi(\Delta \mathcal{H}_{j+1/2}^-, \Delta \mathcal{H}_{j+1/2}^-, \Delta \mathcal{H}_{j+3/2}^-), \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\Delta \mathcal{H}_{j+1/2}^\pm = L_{j+1/2}^\pm(F_{j+1}^\pm - F_j^\pm)$ , 可粗略代表  $j$  和  $j+1$  点之间通量沿特征方向的变化,  $\varphi$  为

限制器. 文献[8]列举了两种限制器

$$\varphi(a, b, c) = \begin{cases} s \cdot \min(|a|, |b|), & \text{若 } a, b, c \text{ 同号,} \\ 0, & \text{其他;} \end{cases} \quad (6)$$

$$\varphi(a, b, c) = \begin{cases} s \cdot \min\left[|a|, |b| \frac{2bc}{|a|+|c|+\varepsilon}\right], & \text{若 } a, b, c \text{ 同号,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (7)$$

其中  $s = \text{sign}(a)$ ,  $a, b$  和  $c$  分别表示(5)式中的3个元素,  $\varepsilon$ 是一个任意小正数, 比如  $1.0E-9$ . 需要注意的是, 限制器  $\varphi$ 中3个元素的位置不能调换, (6)式中的  $\min$  函数值只与  $a$  和  $b$  有关. 若没有特别说明, 本文采用的是第一种限制器.

为了保证通量守恒以及正确捕捉到流场间断, 把格式还原成守恒形式是有利的:

$$H_{j+1/2}^+ = F_j^+ + R_{j+1/2}^+ \delta \mathcal{H}_{j+1/2}^+, \quad H_{j+1/2}^- = F_j^- - R_{j+1/2}^- \delta \mathcal{H}_{j+1/2}^-, \quad (8)$$

于是  $(dQ/dt)_j = - (H_{j+1/2}^+ + H_{j+1/2}^- + H_{j-1/2}^+ - H_{j-1/2}^-) / \Delta x_j, \quad (9)$

(9)式即为特征处理后的半离散格式. 它与 Ravichandran<sup>[9]</sup>的格式很相似, 不同点在于本文投影到特征空间中进行处理, 而且所采用的限制器能保证格式的精度更高(特别是在极值点附近).

### 1.2 特征处理方法在其他类型格式中的推广

上文的特征处理方法不仅可以用在通量型的格式上, 还可以用在守恒变量型或原始变量型等格式上. 下面以守恒变量型格式为例进行说明, 其他变量型的格式可以类推.

在(3)式中, 常见的守恒变量型格式可以表示成

$$H_{j+1/2}^+ = F^+(Q_{j+1/2}^+), \quad H_{j+1/2}^- = F^-(Q_{j+1/2}^-), \quad (10)$$

不同格式的差别在于求解  $Q_{j+1/2}^+$  和  $Q_{j+1/2}^-$  的方法不同. 网格交接面上的左右守恒变量与两侧网格内的平均守恒变量之差可表示为  $Q_{j+1/2}^+ - Q_j$  和  $Q_{j+1}^- - Q_{j+1/2}^-$ . 把它们在特征方向上投影

$$\Delta W_{j+1/2}^+ = L_{j+1/2}^+(Q_{j+1/2}^+ - Q_j), \quad \Delta W_{j+1/2}^- = L_{j+1/2}^-(Q_{j+1}^- - Q_{j+1/2}^-), \quad (11)$$

此处  $W^\pm$  正好与双曲系统的特征变量类似. 设  $\delta W_{j+1/2}^\pm$  代表了特征波的幅值, 为了避免出现非物理解, 应该对  $\delta W_{j+1/2}^\pm$  的取值进行限制以避免出现不满足熵条件的解. 此时可采用与上小节相同的限制器来模拟熵条件

$$\begin{cases} \delta W_{j+1/2}^+ = \varphi(\Delta W_{j+1/2}^+, \Delta W_{j+1/2}^-, \Delta W_{j-1/2}^+), \\ \delta W_{j+1/2}^- = \varphi(\Delta W_{j+1/2}^-, \Delta W_{j+1/2}^+, \Delta W_{j+3/2}^-), \end{cases} \quad (12)$$

其中  $\Delta W_{j+1/2}^\pm = L_{j+1/2}^\pm(Q_{j+1} - Q_j)$ .

特征处理后的  $Q_{j+1/2}^+$  和  $Q_{j+1/2}^-$  可表示为

$$Q_{j+1/2}^+ = Q_j + R_{j+1/2}^+ \delta W_{j+1/2}^+, \quad Q_{j+1/2}^- = Q_{j+1}^- - R_{j+1/2}^- \delta W_{j+1/2}^-, \quad (13)$$

于是  $H_{j+1/2}^+ = F^+(Q_{j+1/2}^+), \quad H_{j+1/2}^- = F^-(Q_{j+1/2}^-). \quad (14)$

把上式代入(9)式即可得到特征处理后的半离散格式.

### 1.3 运用举例

本文以5种不能光滑激波捕捉的线性格式为例, 来说明前文特征处理方法的效果. 在对通量进行离散的情况下, 这5种格式可以分别表示为:

1) 二阶迎风显示格式

$$H_{j+1/2}^+ = (3F_j^+ - F_{j-1}^+)/2, \quad H_{j+1/2}^- = (3F_{j+1}^- - F_{j+2}^-)/2; \quad (15)$$

2) 三阶迎风显示格式

$$H_{j+1/2}^+ = (11F_j^+ - 7F_{j-1}^+ + 2F_{j-2}^+)/6, \quad H_{j+1/2}^- = (11F_{j+1}^- - 7F_{j+2}^- + 2F_{j+3}^-)/6; \quad (16)$$

3) 三阶迎风紧致格式

$$5H_{j-1/2}^+ + 8H_{j+1/2}^+ - H_{j+3/2}^+ = 12F_j^+, \quad -H_{j-1/2}^- + 8H_{j+1/2}^- + 5H_{j+3/2}^- = 12F_{j+1}^-; \quad (17)$$

## 4) 五阶迎风紧致格式

$$\begin{cases} 9H_{j-1/2}^+ + 18H_{j+1/2}^+ + 3H_{j+3/2}^+ = 10F_{j+1}^+ + 19F_j^+ + F_{j-1}^+, \\ 3H_{j-1/2}^- + 18H_{j+1/2}^- + 9H_{j+3/2}^- = F_{j+2}^- + 19F_{j+1}^- + 10F_j^-; \end{cases} \quad (18)$$

## 5) 七阶迎风紧致格式

$$\begin{cases} 180H_{j-1/2}^+ + 240H_{j+1/2}^+ = F_{j+3}^+ - 11F_{j+2}^+ + 79F_{j+1}^+ + 319F_j^+ + 34F_{j-1}^+ - 2F_{j-2}^+, \\ 240H_{j+1/2}^- + 180H_{j+3/2}^- = -2F_{j+3}^- + 34F_{j+2}^- + 319F_{j+1}^- + 79F_j^- - 11F_{j-1}^- + F_{j-2}^-. \end{cases} \quad (19)$$

把上面5式所得的  $H_{j\pm 1/2}^\pm$  代入(3)式,便可得到相应的差分格式. 在上面这5种格式中,如果把右边的  $F^\pm$  换成  $Q$ ,把左边的  $H^+$  换成  $Q^1$ ,  $H^-$  换成  $Q^r$ ,便可得到与之对应的守恒变量型格式.

把  $H_{j\pm 1/2}^\pm$  代入(4)式,或把  $Q_{j\pm 1/2}^1$  和  $Q_{j\pm 1/2}^r$  代入(11)式,通过1.1或1.2节的特征处理后,便可得到与原格式相对应的激波捕捉格式. 为了便于标记,我们把特征限制处理后的二阶迎风显示格式表示成 CU2-\*,相应的三阶格式为 CU3-\*;把特征处理后的三阶迎风紧致格式表示成 CC3-\*,五阶迎风紧致格式为 CC5-\*,七阶迎风紧致格式为 CC7-\*. 当用“F”替换“\*”时,表示通量型格式;当用“C”替换“\*”时,表示守恒变量型格式.

## 1.4 限制器对精度和分辨率的影响

为了考察格式对多尺度问题的计算精度,考虑波数区间  $[0, n]$  上的连续 Fourier 模态,取函数

$$f(x) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-n/2}^{n/2} A(k) \exp \left[ i \left( \frac{2\pi kx}{L} + \varphi(k) \right) \right] \right\}, \quad (20)$$

此处  $i = \sqrt{-1}$ . 求解域被等分为100段. 令振幅  $A(k) = 1$ ,相  $\varphi(k)$  在  $[0, 2\pi]$  上随机分布. 图1给出了  $f(x)$  的一阶导数的精确解(Exact)、三阶线性紧致格式的数值解(Linear Compact)和线性紧致格式被限制器修改后所给出的数值解(Modified Compact). 通过观察可以发现,线性紧致格式在极值点处有过冲现象,采用限制器修改后的紧致格式可以避免这种现象. 通过观察还可以发现,采用本文的限制器不会降低线性格式的尺度分辨率. 线性紧致格式的  $L_1$  范数误差为0.03766,采用限制器修改后的  $L_1$  范数误差为0.03775. 总的来说,采用限制器修改后的格式比原格式的精度稍低,在本算例的情况下,  $L_1$  误差增加了0.24%. 可见,在保证光滑捕捉激波的情况下,对精度的牺牲还是很小的.

## 2 数值算例

把系统(1)的半离散格式(9)式与时间离散相结合,便可得到全离散的格式,本文采用三阶 TVD 型的 Runge-Kutta 法<sup>[5]</sup>对时间项进行离散.

若用下列表达式替换(1)式中的  $Q$  和  $F$ ,便可得到描述无粘可压流动的 Euler 方程.

$$Q = [\rho, \rho u, \rho e], \quad F = [\operatorname{div}(\rho u), \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \dot{\sigma} p, \operatorname{div}(\rho e u + pu)], \quad (21)$$

此处  $\rho$  是流体密度,  $u$  为速度,  $e$  为总能量,表示内能与动能之和. 通过补充状态方程可以使上述方程组封闭,本文使用理想气体状态方程  $p = \rho e (\gamma - 1)$ ,  $\gamma$  为比热比,本文取1.4.

## 2.1 定常正激波

由于本文的特征处理方法涉及到限制器的使用,所以有必要考察该限制器是否能收敛到定常解. 计算区域仍然是  $[-3, 3]$ ,取31个网格点. 计算初始条件为:在  $x < -1$  的区域,给定

波前值 $(\rho, u, p) = (1.0, 1.0, 1/(\sqrt{Ma_\infty^2}))$ ; 在  $x \geq 1$  的区域通过 Rankine-Hugoniot 关系式给定波后值; 在  $-1 \leq x < 1$  区域, 采用波前到波后的线性过度值. 在计算过程中保持边界值不变.

由于在  $-1 \leq x < 1$  区域内的初值并不满足 Euler 方程, 那么在计算过程中存在一个向精确解收敛的过程, 最终应该得到一个定常的正激波. 图 2 给出了  $Ma_\infty = 4, t = 100$  的计算结果. 由图可见, 计算收敛到了定常解, 而且经特征限制处理后的格式都能无振荡地捕捉到激波. 对于本文所列举的迎风显示格式 CU2-C 和 CU3-C, 跨激波有两个网格点; 对于本文的迎风紧致格式, 跨激波只有一个网格点.

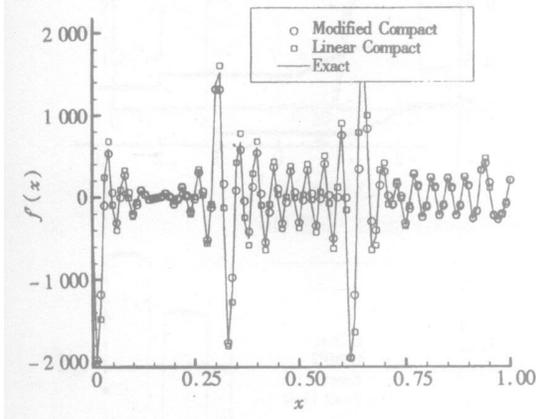


图 1 多尺度问题的解图

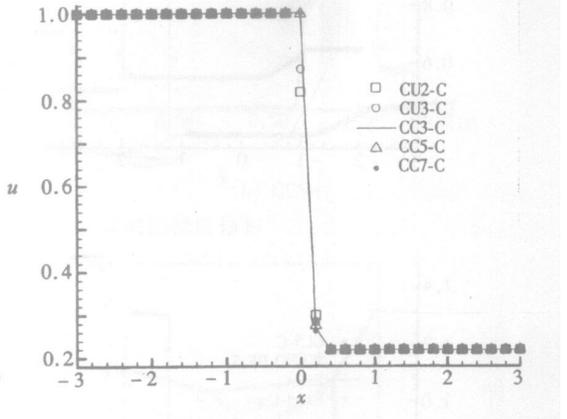


图 2 定常激波数值解的速度分布

## 2.2 Lax 激波管

初始条件为: 在  $x \leq 0$  的区域给定  $(\rho, u, p) = (0.445, 0.698, 3.528)$ , 在  $x > 0$  的区域给定  $(\rho, u, p) = (0.5, 0, 0.571)$ . 计算区域取  $x \in [-3, 3]$ , 网格点取 100, 图 3 给出了  $t = 0.8$  时的计算结果, 可以看出, 在激波附近 ( $x \approx 2$ ) 和接触间断附近 ( $x \approx 1.3$ ), 所有格式的计算结果都基本无振荡. 文献[10] 的计算表明, 线性紧致格式不仅在间断附近有振荡, 而且在稀疏波波头有过膨胀和过压缩现象. 从图 3 还可以看出, 在  $x \approx -1.3$  和  $x \approx -2.2$  的稀疏波波头附近, 本文的几种格式都没有出现过膨胀和过压缩现象.

图 3 还列出了文献[6]的五阶 WENO 格式和文献[7]的七阶 OSMP 格式的计算结果. 通过比较可以发现, 本文三阶格式 CC3-F/C(图 3b)的精度与五阶 WENO 格式(图 3c)相当, 五阶格式 CC5-C(图 3c)的精度高于五阶 WENO 格式, 与七阶 OSMP7 格式(图 3d)相当, 而 OSMP7 则是文献[7]中精度最高的格式. 本文七阶格式 CC7-C(图 3d)的精度最高. WENO-RF-5 以及其他 WENO 格式(如文献[5])在间断附近的数值粘性远大于本文特征处理后的紧致格式.

需要补充的是从图 3(b)可以看出, CC3-C 与 CC3-F 的曲线非常相似, 根据我们的经验, 同种格式的通量型形式与守恒变量型形式的精度非常相近, 所以本文没有列出其他计算结果, 在后面的计算中, 也只给出守恒变量型格式的计算结果.

## 2.3 Blast-Waves 问题

该问题描述了两个互相碰撞的冲击波, 初始条件为: 速度和密度均匀分布,  $u = 0, \rho = 1$ ; 压力为:  $p(x_L) = 1E+3, p(x_M) = 1E-2$  和  $p(x_R) = 1E+2$ , 其中  $x_L \in [0, 0.1), x_M \in [0.1, 0.9], x_R \in (0.9, 1]$ . 网格取 400, 在  $x = 0$  和  $x = 1$  处是反射固壁. 图 4(a) 和 (b) 分别给出了  $t = 0.038$  时采用三阶格式和五阶格式计算所得的密度曲线, 其中实线是五阶格式在 1 600 个点得到的数值结果, 可近似为精确解. 从图可见, 即使在跨音速的稀疏波区, 计算结果仍能

与精确解保持基本一致. 与文献[6](图7)的结果相比,在同网格数同阶精度的情况下,本文结果与精确值更为接近.

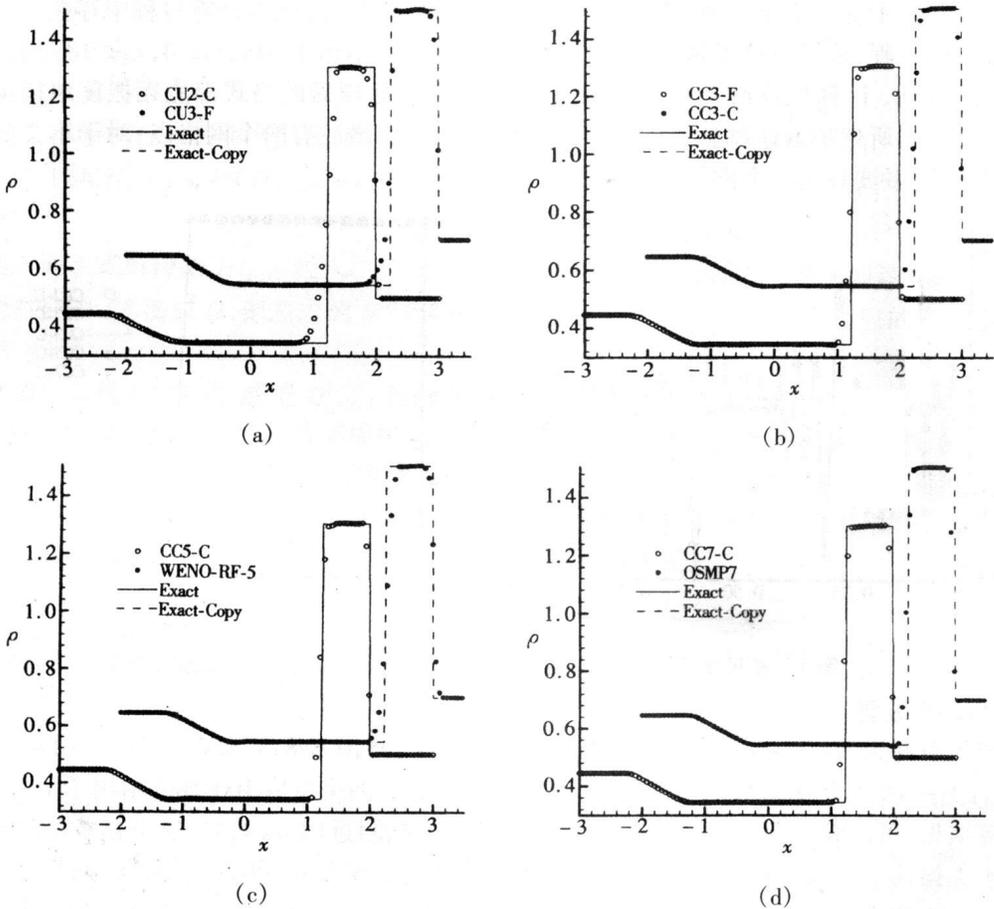


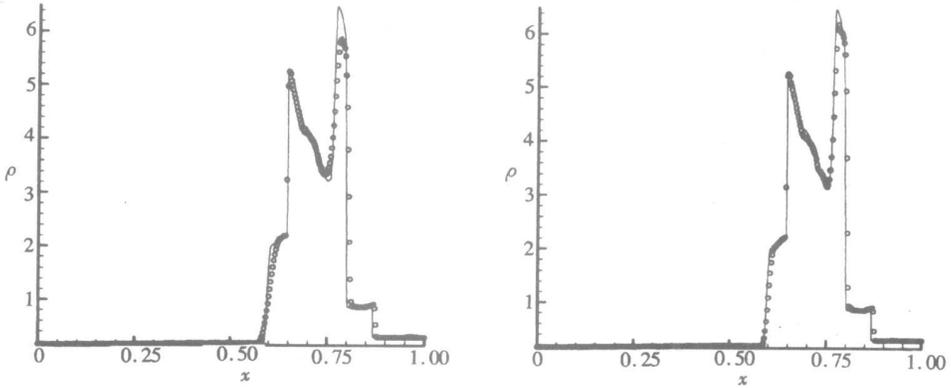
图3 Lax问题的密度曲线

## 2.4 激波的双Mach反射

计算域取  $[0, 4] \times [0, 1]$ , 该问题描述了一个以Mach数  $Ma = 10$  向右运动的斜激波, 激波面与水平线的夹角为  $60^\circ$ , 起始位置  $x = 1/6$ . 在下边界  $x > 1/6$  的区域采用镜面反射边界,  $x \leq 1/6$  的区域给定波后值. 在上边界根据激波运动位置给定相应的波前波后值. 这是一个包含强激波和Mach反射的复杂问题, 对格式的精度、分辨率, 特别是稳定性等都有很高要求. 计算表明, 当格式的精度大于3阶时, 采用限制器(6)式会出现激烈振荡从而导致计算失败, 如果采用限制器(7)式, 那么在七阶情况下也能得到稳定的解.

计算采用两套网格,  $480 \times 119$  和  $800 \times 200$ , 图5和图6分别给出了  $t = 0.2$  时的密度等值线. 图5与Jiang等人的计算结果(文献[6], 图13)相比, 五阶格式CC5-C的精度和分辨率都远远高于文献[6]的五阶WENO格式. 文献[11]和本文都是在同一种五阶迎风紧致格式的基础上做了改进, 通过图6与文献[11]中图4至图9的比较可以发现, CC5-C在以下3个方面都优于文献[11]的五阶格式: 一是在光滑区, CC5-C比文献[11]格式的数值波动小; 二是对流场间断的捕捉, CC5-C捕捉到的间断更加精细; 三是对细小结构的分辨上, CC5-C稍强于文献[11]的格式. 由于, 本文的所发展的激波捕捉方法不仅适用于紧致格式, 还适用于其他不能光滑捕捉激波的迎风格式, 比文献[11]的方法具有更大的发展空间. 另外, 与七阶格式OSMP7相比

(文献[7], 图 17), CC5-C 的数值波动小, 对细小结构的分辨率稍强.



(a) CC3-C

(b) CC5-C

图 4 Blast Waves 问题在  $t = 0.038$  时的密度分布

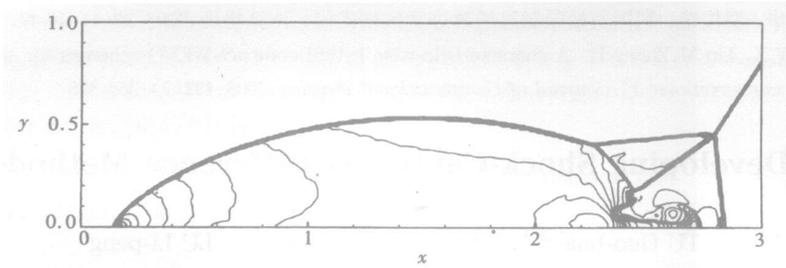


图 5 双 Mach 反射, 网格:  $480 \times 119$ , 30 条等间距密度等值线

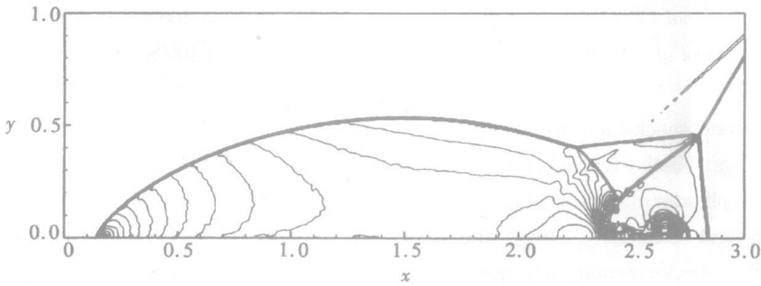


图 6 双 Mach 反射, 网格:  $800 \times 200$ , 50 条等间距密度等值线

### 3 结 论

本文提出了一种捕捉激波的特征处理方法. 通过对 5 种不能光滑捕捉激波的线性格式特别是紧致格式的处理, 得到了能光滑捕捉间断的高价格式. 通过对一些问题的计算, 表明本文的方法不仅可以有效地抑制激波附近的非物理振荡, 而且对防止非物理解比如过膨胀的出现也有一定作用, 所用限制器能保持原格式的尺度分辨率, 对精度的影响较小.

#### [参 考 文 献]

- [1] Harten A. High resolution schemes for hypersonic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 1983, 49(2): 367-393.
- [2] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes[J]. Journal of

- Computational Physics, 1981, **43**(2): 357-372.
- [3] Liou M S. A sequel to AUSM: AUSM+ [J]. Journal of Computational Physics, 1996, **129**(2): 364-382.
- [4] Harten A, Osher S. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes I [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1987, **24**(2): 279-309.
- [5] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1988, **77**(2): 439-471.
- [6] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1996, **126**(1): 202-228.
- [7] Daru V, Tenaud C. High order one step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations [J]. Journal of Computational Physics, 2004, **193**(2): 563-594.
- [8] 涂国华, 袁湘江, 夏治强, 等. 一类 TVD 型的迎风紧致差分格式 [J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(6): 675-682.
- [9] Ravichandran K S. Higher order KFVS algorithms using compact upwind difference operators [J]. Journal of Computational Physics, 1997, **230**(2): 161-173.
- [10] 涂国华, 罗俊荣. 利用通量限制思想改进紧致格式 [J]. 计算物理, 2005, **22**(4): 40-47.
- [11] Ren Y X, Liu M, Zhang H. A characteristic-wise hybrid compact-WENO schemes for solving hyperbolic conservations [J]. Journal of Computational Physics, 2003, **192**(2): 365-386.

## Developing Shock-Capturing Difference Methods

TU Guo-hua<sup>1,2,3</sup>, YUAN Xiang-jiang<sup>1,3</sup>, LU Li-peng<sup>4</sup>

- (1. China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang, Sichuan 621000, P. R. China;  
 2. Tianjin Key Laboratory of Modern Engineering Mechanics, Tianjin 300072, P. R. China;  
 3. National CFD Laboratory, Beihang University, Beijing 100083, P. R. China;  
 4. School of Jet Propulsion, Beihang University, Beijing 100083, P. R. China)

**Abstract:** A new shock capturing method was proposed which is based on upwind schemes and flux-vector splittings. Firstly, original upwind schemes were projected along characteristic directions. Secondly, the amplitudes of the characteristic decompositions were carefully controlled by limiters to prevent non-physical oscillations. Lastly, the schemes were converted into conservative forms and the oscillation-free shock capturing schemes were acquired. Two explicit upwind schemes (2nd order and 3rd order) and three compact upwind schemes (3rd order, 5th order and 7th order) were modified by the method for hyperbolic systems and the modified schemes were checked on several one-dimensional and two-dimensional test cases. Some numerical solutions of the schemes were compared with those of a WENO scheme and an MP scheme as well as a compact-WENO scheme. The results show that the method with high order accuracy and high resolutions can capture shock waves smoothly.

**Key words:** high order scheme; shock-capturing; upwind scheme; compact scheme; high resolution; conservative scheme