

带弹性附件充液矩形贮箱俯仰 运动动态响应*

吕 敬, 李俊峰, 王天舒

(清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

(陈立群推荐)

摘要: 首先建立了俯仰运动矩形贮箱刚-液-弹耦合系统在外力矩作用下的耦合动力学模型, 给出满足边界条件的速度势函数和液面波高的级数表达式, 采用伽辽金法离散, 将动力学模型转化为常微分方程组, 得到刚-液-弹耦合系统的固有频率, 给出简单的近似表达式, 分析了转动中心距静液面不同位置时刚-液-弹耦合系统各阶固有频率的变化规律, 系统转动中心距静液面较近时, 耦合后液体反对称模态和刚体的固有频率对比耦合前减小, 较远时则增大, 最后进行数值验证, 比较分析了液体和弹性体对刚体姿态的影响.

关键词: 刚-液-弹耦合; 非线性动力学; 固有频率; 俯仰运动

中图分类号: V412.4 文献标识码: A

引 言

随着航天技术的发展, 卫星系统结构越来越复杂, 主刚体常带有挠性附件(例如太阳能电池板)和大量的液体燃料, 而弹性附件、刚体与液体之间发生耦合振动可能会给系统的正常工作带来不利影响, 甚至失稳, 所以研究刚-液-弹之间的耦合问题具有重要的理论意义和工程价值. 对刚-液-弹耦合系统的动力学问题进行完整详尽的理论分析, 可以深入的研究耦合机理、预测系统的重要非线性动力学现象, 为系统的设计和分析提供理论参考.

关于刚-液耦合系统, 在理论分析方面, Rumjantsev 等^[1]于 1954 年首次提出利用 H-O 原理推导刚-液耦合系统的动力学方程, 另外 Abramson 等^[2]和 Faltinsen^[3-5]直接采用伯努利方程、王照林等^[6]用 Jourdain 原理推导了刚-液耦合系统的动力学方程, 尹立中等^[7-9]利用推广形式的驻定压力原理建立了刚-液耦合系统液体晃动的动力学方程, 并研究了动力学特性, 而且和苟兴宇等^[10]系统深入地开展了贮箱类液固耦合动力学的数值和试验研究. 最近, 陈科等^[11]根据 H-O 原理建立了充液贮箱内刚体平动与液体非线性晃动的耦合动力学方程并进行了数值模拟, 通过与 ALE 有限元方法、边界元方法的结果进行比较, 验证了方法的正确性. 在数值计算方

* 收稿日期: 2005-09-20; 修订日期: 2006-12-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10302013, 10572022)

作者简介: 吕敬(1979—), 女, 河北人, 博士(E-mail: lv-j03@mails.tsinghua.edu.cn);

李俊峰(1964—), 男, 黑龙江人, 教授, 博士(联系人, E-mail: Lijunf@tsinghua.edu.cn);

王天舒(1969—), 男, 湖北人, 副教授, 博士, 硕士生导师(E-mail: tswang@mail.tsinghua.edu.cn).

面, 王士敏和王照林^[6]提出浮标接力法, 能准确地描述自由液面, 曾江红^[12], 徐刚^[13]利用 ALE 方法将储液容器作为大型薄壁结构和大晃动粘性流体组成的流固耦合问题进行数值研究, 岳宝增^[14-15]将任意的拉格朗日-欧拉运动学描述引入到 Navier-Stokes 方程中, 用 ALE 分布有限元法对圆筒形贮腔内的液体大幅晃动进行了数值模拟, 李遇春等^[16]利用边界元方法对水槽中的液体非线性晃动问题进行数值模拟, 但这些都没有考虑弹性体的运动. 关于刚-弹耦合系统, 李俊峰等^[17]研究了中心刚体带对称柔性伸展梁的航天器姿态动力学问题, Kalaycioglu 等^[18]给出了伸展附件振动的近似解, 贾英宏等^[19-20]研究了带弹性附件航天器的动力学与变结构控制问题, 但这些研究都没有涉及与航天器中液体运动的耦合问题. 关于刚-液-弹耦合系统, 李铁成等^[21]用 Jourdain 变分原理推导了带弹性隔板的充液贮箱的运动方程, 程绪铎等^[22]研究了带弹性伸展附件充液航天器姿态动力学问题, 分析过程中将液体等效为刚体, 忽略了非线性因素.

本文充分考虑了刚-液-弹耦合系统的非线性动力学特性, 同时考虑了刚体转动、液体晃动和弹性体振动之间的相互作用、相互耦合. 应用 H-O 变分原理建立了矩形贮箱刚-液-弹耦合系统在外力矩作用下俯仰运动的耦合动力学模型, 给出满足边界条件的速度势函数和液面波高的级数表达式, 而后采用伽辽金法对液体运动边界条件和动力方程进行离散, 将动力学模型转化为一阶非线性常微分方程组, 得到刚-液-弹耦合系统的固有频率, 并给出简单的近似表达式, 分析了各阶固有频率随系统转动中心距离静液面位置的变化规律, 而后进行数值验证, 详细比较分析了液体和弹性体对刚体姿态的影响.

1 系统动力学方程

1.1 耦合系统动力学方程

我们考虑如图 1 所示的刚-液-弹耦合系统, 假设液体不可压缩, 流动无旋, 动力粘性系数 μ 和密度 ρ 为常数. 设 $OXYZ$ 为惯性坐标系, $Oxyz$ 为刚体固连坐标系, 矩形刚性贮箱可绕固定点 O 做俯仰运动, 转动角用 θ 表示. 分别用 S, S_0, S_w 表示自由液面、未扰静液面、固壁与液体接触面, 液体区域、波高和液深分别记为 τ, ζ, a , 而 b, c, e 分别为贮箱长度、转动中心距离静液面的距离、质心距离转动中心的距离.

系统的动能为刚体部分、液体部分和弹性体部分的动能之和, 其中弹性附件看作悬臂梁, 其弯曲变形写成 $z(x, t) = \phi(x) \cdot \eta(t)$, 所以

$$T = \frac{\Omega^T J_0 \Omega}{2} + \frac{\rho}{2} \int_{\tau} (\dot{\phi})^2 d\tau + \int_0^l (\Phi \mathbf{r}' + \Omega \mathbf{r}')^T \frac{\rho}{2} (\Phi \mathbf{r}' + \Omega \mathbf{r}') dl, \quad (1)$$

式中 J_0 为刚体转动惯量, Ω 为转动角速度, ρ 为弹性体密度, Φ 为弹性附件模态的表达式, η 为模态坐标, \mathbf{r}' 为附件上各个质量元到原点的距离, l 为弹性附件的长度, 且

$$\phi_k(x) = D \left[\operatorname{ch}k(x - b/2) - \operatorname{cosh}k(x - b/2) - \frac{\operatorname{sh}kl - \operatorname{sink}l}{\operatorname{ch}kl + \operatorname{cosh}kl} \operatorname{sh}k \left[x - \frac{b}{2} \right] - \operatorname{sink} \left[x - \frac{b}{2} \right] \right]. \quad (2)$$

由振型归一化和正交性质有 $\int_0^l \Phi \Phi^T dl = E$, 故

$$T = \frac{\Omega^T J \Omega}{2} + \frac{\rho}{2} \int_{\tau} (\dot{\phi})^2 d\tau + \frac{1}{2} \mathbf{\eta}^T \mathbf{C} \mathbf{\eta}, \quad (3)$$

其中 $J = J_0 + \int_0^l \frac{1}{2} \mathbf{r}'^T \rho \mathbf{r}' dl$ 为弹性体伴随惯量与刚体转动惯量之和, $\mathbf{C} = \int_0^l \mathbf{r}'^T \rho \Phi dl$ 为模态

耦合系数阵.

系统的势能为刚体、液体和弹性体的重力势能 (忽略液体的表面张力) 和弹性体弹性势能之和, 即

$$\begin{aligned} \Pi = & \rho g \int_S \frac{1}{2} \cos \theta \zeta^2 dS - \rho g \int_S x \zeta \sin \theta dS + \\ & e M_0 g (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} \eta^T \Lambda^2 \eta + \text{const}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中对角阵 $\Lambda^2 = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$ 为非约束模态频率, \mathbf{K} 为弹性体的刚度阵, M_0 为系统的质量.

假设在 O 点有外加力矩, H-O 变分原理可以写成:

$$\int_0^{t_1} \left(\delta T - \delta \Pi + \delta R + m \delta \theta + \int_{\tau} p \operatorname{div} \delta \mathbf{r} d\tau \right) dt = 0,$$

其中 p 为流体内部压强, m 为外加力矩大小, $R = - \int_{\tau} \{ \mu \varphi \} d\tau$ 为液体的耗散函数. 由该变分原理推导出刚-液-弹耦合系统的动力学方程组:

$$J \dot{\Omega} + \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \Omega \times \mathbf{H} + \mathbf{C} \dot{\eta} + \mathbf{M} = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\dot{\phi} - \Omega \times \mathbf{r})^2 - \frac{1}{2} (\Omega \times \mathbf{r})^2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \mu \varphi = 0, \quad (5b)$$

$$\dot{\eta} + \mathbf{C}^T \dot{\Omega} + \Lambda^2 \eta = 0, \quad (5c)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = (\dot{\phi} - \Omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}, \quad (5d)$$

其中 Ω 为刚体角速度, $\mathbf{H} = \rho \int_{\tau} \mathbf{r} \times \dot{\phi} d\tau$ 为液体动量矩, $F = z - \zeta$ 为液体的自由液面, \mathbf{r} 为贮箱内液体质点的矢径, \mathbf{M} 为系统重力产生力矩与外加力矩之和.

1.2 伽辽金法离散

俯仰运动时液体的速度势函数表示为 $\phi = \varphi + \mathbf{x} \cdot \Omega$, 只考虑二维情况, 则 $\Omega = (0, \Omega, 0)$, $\mathbf{x} = (0, x, 0)$. 在固壁上液体速度为零, 所以 φ 满足 $\partial \varphi / \partial \mathbf{v} = 0$, \mathbf{v} 表示外法线方向, 假设 φ 为如下形式:

$$\begin{cases} \varphi = \sum_n y_n(t) \varphi_n(x, z), \\ \varphi_n(x, z) = \frac{\operatorname{ch}((n\pi/b)(z + a - c))}{(n\pi/b) \operatorname{sh}((n\pi/b)a)} \cos\left[\frac{n\pi}{b}\left(x + \frac{b}{2}\right)\right], \end{cases} \quad (6)$$

\mathbf{x} 为斯托克斯-诺科夫斯基势函数, 满足 $\Delta \mathbf{x} = 0$, 并且在液体和刚体的接触面上满足边界条件 $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, 我们假设 \mathbf{x} 的形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^3 (2n-1)^3} \left[\frac{4a^2 \sin[(2n-1)(\pi/a)(z + a/2 - c)] \operatorname{sh}[(2n-1)(\pi/a)x]}{\operatorname{ch}[(2n-1)(\pi b/2a)]} + \right. \\ & \left. \frac{4b^2 \sin[(2n-1)(\pi/b)x] \operatorname{ch}[(2n-1)(\pi/b)(z - c)]}{\operatorname{sh}[(2n-1)(\pi a/b)]} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

假设波高函数 ζ 的形式为

$$\zeta = c + \sum_n y_n(t) \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x) = \cos\left[\frac{n\pi}{b}\left(x + \frac{b}{2}\right)\right]. \quad (8)$$

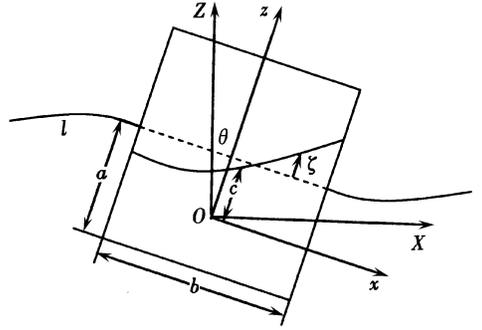


图1 刚-液-弹耦合系统模型

后面分析过程中, 液体截断到三阶模态, 弹性体截断到二阶模态, 随后用伽辽金法对液体动力方程(5b)和运动方程(5d)进行离散, 得到一阶常微分方程组, 具体表达式略。

2 固有频率分析

2.1 固有频率的精确解与近似解

对系统一阶非线性常微分方程组进行分析, 在平衡点附近局部线性化导出方程

$$\begin{pmatrix} \beta_1 g - \omega^2 & -\alpha_1 \omega^2 & 0 & -\alpha_2 \omega^2 & -\alpha_3 \omega^2 & -\alpha_4 \omega^2 \\ b_{211}g - a_{211}\omega^2 & k_{21}g - \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{22}g - \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ b_{231}g - a_{231}\omega^2 & 0 & 0 & k_{23}g - \omega^2 & 0 & 0 \\ -C_1\omega^2 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^2 - \omega^2 & 0 \\ -C_2\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0, \quad (9)$$

解 ω 即为耦合系统固有频率的精确解, 但无法给出具体表达式。因此首先取出常微分方程组中的质量矩阵和刚度矩阵, 质量矩阵乘其逆矩阵化为单位阵, 刚度矩阵也同时乘质量矩阵的逆, 由于所得矩阵的非对角元素为小量, 所以其对角元素可以作为耦合系统各阶固有频率的近似表达式, 具体形式为

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\frac{g(\beta_1 - \alpha_1 b_{211} - \alpha_2 b_{231})}{1 - \alpha_1 a_{211} - \alpha_2 a_{231} - \alpha_3 C_1 - \alpha_4 C_2}}, \\ \omega_{11} &= \sqrt{\frac{g(k_{21} - \alpha_1 b_{211} - k_{21} \alpha_2 a_{231} - k_{21} \alpha_3 C_1 - k_{21} \alpha_4 C_2)}{1 - \alpha_1 a_{211} - \alpha_2 a_{231} - \alpha_3 C_1 - \alpha_4 C_2}}, \\ \omega_{12} &= \sqrt{k_{22}g}, \quad \omega_B = \sqrt{\frac{g(k_{23} - \alpha_2 b_{231} - k_{23} \alpha_1 a_{211} - k_{23} \alpha_3 C_1 - k_{23} \alpha_4 C_2)}{1 - \alpha_1 a_{211} - \alpha_2 a_{231} - \alpha_3 C_1 - \alpha_4 C_2}}, \\ \omega_{e1} &= \sqrt{\frac{(1 - \alpha_1 a_{211} - \alpha_2 a_{231} - \alpha_4 C_2) \lambda_1^2}{1 - \alpha_1 a_{211} - \alpha_2 a_{231} - \alpha_3 C_1 - \alpha_4 C_2}}, \\ \omega_{e2} &= \sqrt{\frac{(1 - \alpha_1 a_{211} - \alpha_2 a_{231} - \alpha_3 C_1) \lambda_2^2}{1 - \alpha_1 a_{211} - \alpha_2 a_{231} - \alpha_3 C_1 - \alpha_4 C_2}} \end{aligned}$$

其中 ω_r 、 ω_{11} 、 ω_{12} 、 ω_{13} 、 ω_{e1} 和 ω_{e2} 分别接近于非耦合系统的刚体、液体第一阶、液体第二阶、液体第三阶、弹性体第一阶、弹性体第二阶固有频率值。相关系数表达式为

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\rho \int_{-a+c}^{\zeta} \int_{-b/2}^{b/2} (z \cdot \ddot{\varphi}_{1y} - y \cdot \ddot{\varphi}_{1z}) dy dz}{J + \rho \int_{-a+c}^{\zeta} \int_{-b/2}^{b/2} (z \cdot \ddot{\varphi}_y^* - y \cdot \ddot{\varphi}_z^*)}, & \alpha_2 &= \frac{\rho \int_{-a+c}^{\zeta} \int_{-b/2}^{b/2} (z \cdot \ddot{\varphi}_{3y} - y \cdot \ddot{\varphi}_{3z}) dy dz}{J + \rho \int_{-a+c}^{\zeta} \int_{-b/2}^{b/2} (z \cdot \ddot{\varphi}_y^* - y \cdot \ddot{\varphi}_z^*)}, \\ \alpha_3 &= \frac{C_1}{J + \rho \int_{-a+c}^{\zeta} \int_{-b/2}^{b/2} (z \cdot \ddot{\varphi}_y^* - y \cdot \ddot{\varphi}_z^*)}, & \alpha_4 &= \frac{C_2}{J + \rho \int_{-a+c}^{\zeta} \int_{-b/2}^{b/2} (z \cdot \ddot{\varphi}_y^* - y \cdot \ddot{\varphi}_z^*)}, \\ \beta_1 &= \frac{M_0 e}{J + \rho \int_{-a+c}^{\zeta} \int_{-b/2}^{b/2} (z \cdot \ddot{\varphi}_x^* - x \cdot \ddot{\varphi}_z^*) dx dz}, & a_{211} &= \frac{\int_{z=c}^{\zeta} \varphi^* \phi_1 dx}{\int_{z=c}^{\zeta} \varphi_1 \phi_1 dx}, \\ a_{231} &= \frac{\int_{z=c}^{\zeta} \varphi^* \phi_3 dx}{\int_{z=c}^{\zeta} \varphi_3 \phi_3 dx}, & b_{211} &= \frac{\int_{z=c}^{\zeta} -x \phi_1 dx}{\int_{z=c}^{\zeta} \varphi_1 \phi_1 dx}, & b_{231} &= \frac{\int_{z=c}^{\zeta} -x \phi_3 dx}{\int_{z=c}^{\zeta} \varphi_3 \phi_3 dx}, \end{aligned}$$

$$k_{21} = \frac{\int_{z=c}^{\zeta} z \phi_1 dx}{\int_{z=c}^{\zeta} \Phi_1 \phi_1 dx \cdot v_1}, \quad k_{22} = \frac{\int_{z=c}^{\zeta} z \phi_2 dx}{\int_{z=c}^{\zeta} \Phi_2 \phi_2 dx \cdot v_2}, \quad k_{23} = \frac{\int_{z=c}^{\zeta} z \phi_3 dx}{\int_{z=c}^{\zeta} \Phi_3 \phi_3 dx \cdot v_3}.$$

以大型卫星为背景, 选取系统参数为 $a = 0.5 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $M_0 = 1\,000 \text{ kg}$, $J = 3\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $\rho_l = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $A = 0.01 \text{ m}^2$, $l = 2 \text{ m}$, $EI = 54 \text{ N}\cdot\text{m}$, $\mu = 0$, 调节参数 g 、 c 、 e 的大小, 通过数值计算求解方程(9), 再与近似表达式得到的相比较, 发现误差很小, 例如取 $g = 0.01 \text{ m/s}^2$, $c = e = 0.3 \text{ m}$, ω_r 、 ω_{11} 、 ω_{12} 、 ω_{13} 、 ω_{e1} 和 ω_{e2} 的近似表达式与精确数值解的相对误差分别为 1.6%、0.006 67%、0、0.000 3%、0.011%、0.000 7%。

2.2 系统转动中心距离静液面距离对固有频率的影响

给定 $a = 0.5 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $M_0 = 1\,000 \text{ kg}$, $J = 2\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$, 分析刚-液-弹的相互耦合作用对系统固有频率的影响。图 2 至图 7 为 $g = 0.01 \text{ m/s}^2$, $e = 0.3 \text{ m}$ 时的 $c - \omega_{11}$, $c - \omega_{12}$, $c - \omega_{13}$, $c - \omega_B$, $c - \omega_{e1}$, $c - \omega_{e2}$ 曲线图(图中‘...’表示非耦合系统刚体、液体、弹性体的固有频率, ‘—’表示耦合系统各阶固有频率)。表 1 给出了耦合系统中 ω_{11} 、 ω_{12} 、 ω_{13} 与液体的前三阶固有频率的定性对比关系。

表 1 耦合系统中 ω_{11} 、 ω_{12} 、 ω_{13} 与液体的前三阶固有频率的对比关系

转动中心至 静液面距离 c	σ_1	σ_2	ω_{11} 与液体第一阶 频率相比	ω_{12} 与液体第二阶 频率相比	ω_{13} 与液体第三阶 频率相比
$< 0.21 \text{ m}$	> 0	> 0	小	相同	小
$0.21 \text{ m} \sim 0.42 \text{ m}$	> 0	< 0	小	相同	大
$> 0.42 \text{ m}$	< 0	< 0	大	相同	大

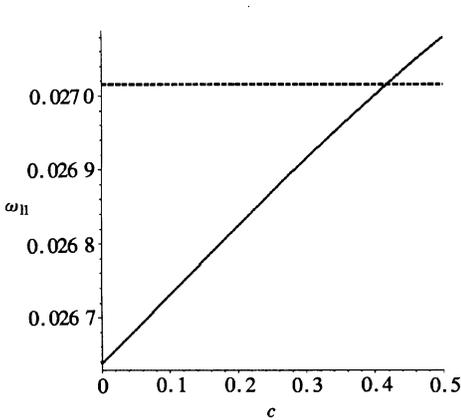


图 2 $c - \omega_{11}$ 曲线

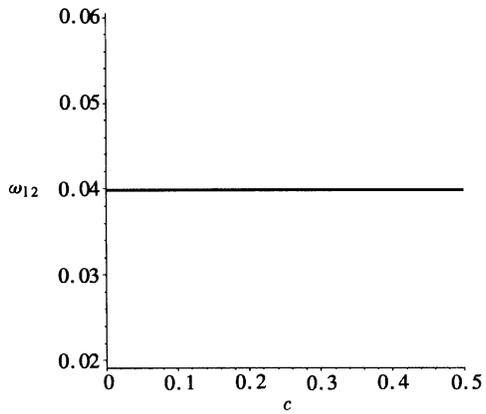


图 3 $c - \omega_{12}$ 曲线

俯仰运动时, 重力加速度主要影响耦合系统固有频率中的 ω_r 、 ω_{11} 、 ω_{12} 及 ω_{13} , 对 ω_{e1} 、 ω_{e2} 影响较小。与弹性体的耦合增强了刚体对 ω_{11} 、 ω_{13} 的作用趋势。由于弹性体与刚体的直接耦合和与液体的间接耦合作用, 使得 ω_{e1} 、 ω_{e2} 比耦合前弹性体固有频率值增大, 如图 6、图 7 所示。由于系统重力相对于转动中心产生力矩, 所以耦合系统具有固有频率 ω_r 且较小, 当转动中心距离静液面较小时 ω_r 更小, 距离较大时 ω_r 略大, 如图 5 所示。

3 数值仿真与分析

算例 取 $g = 0.01$, $m = 5\sin(2\pi\omega_f)$, 分别以耦合系统的各阶固有频率激励, 应用龙格库

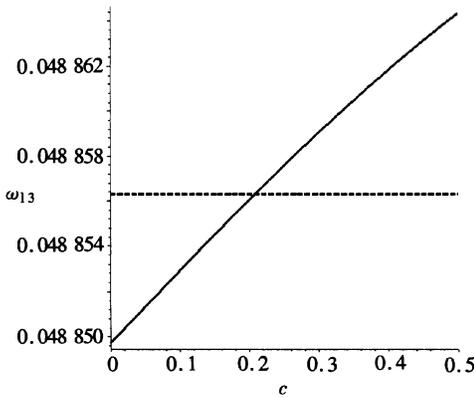


图 4 $c - \omega_{13}$ 曲线

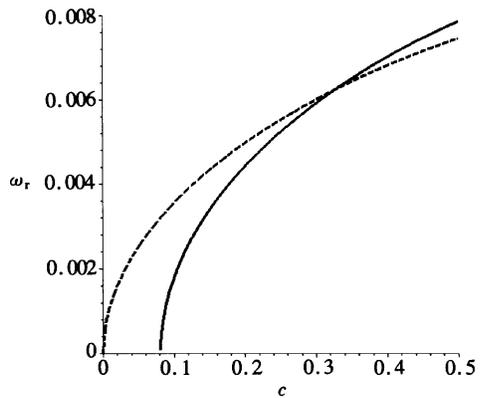


图 5 $c - \omega_r$ 曲线

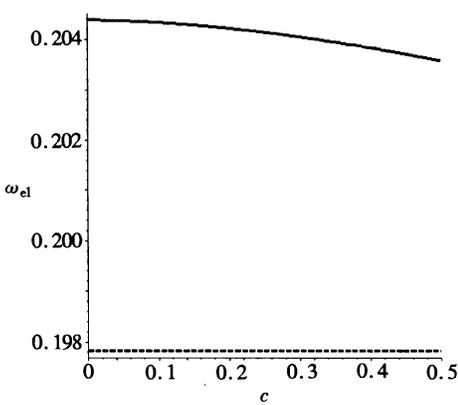


图 6 $c - \omega_{e1}$ 曲线

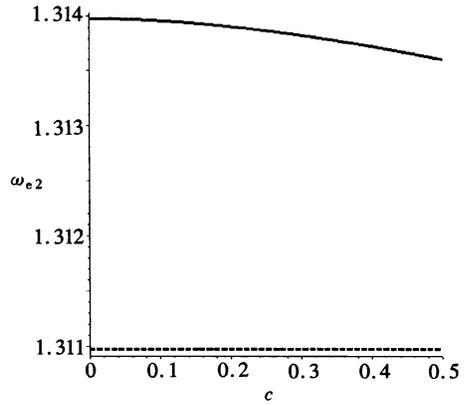


图 7 $c - \omega_{e2}$ 曲线

塔法对系统一阶非线性常微分方程组数值求解, 得到如下刚体、液体和弹性体振动时的波形图, 此时

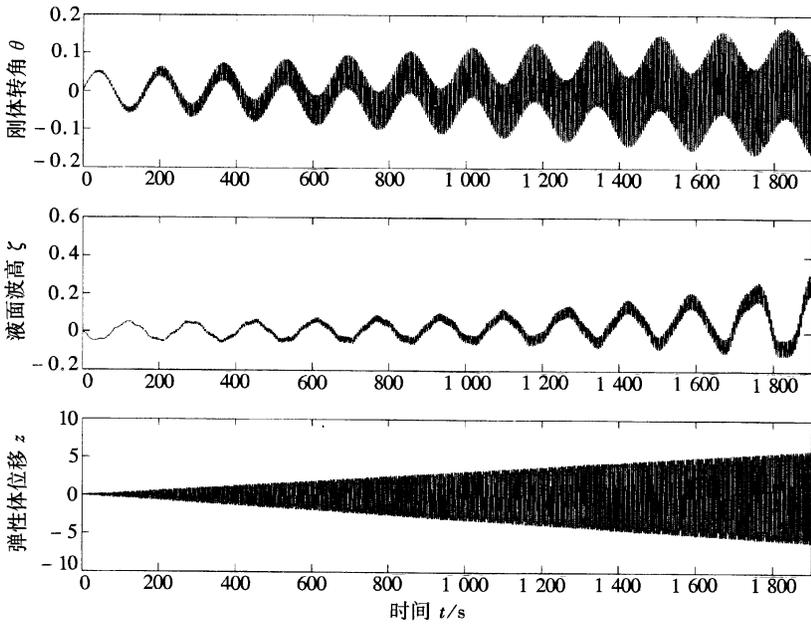
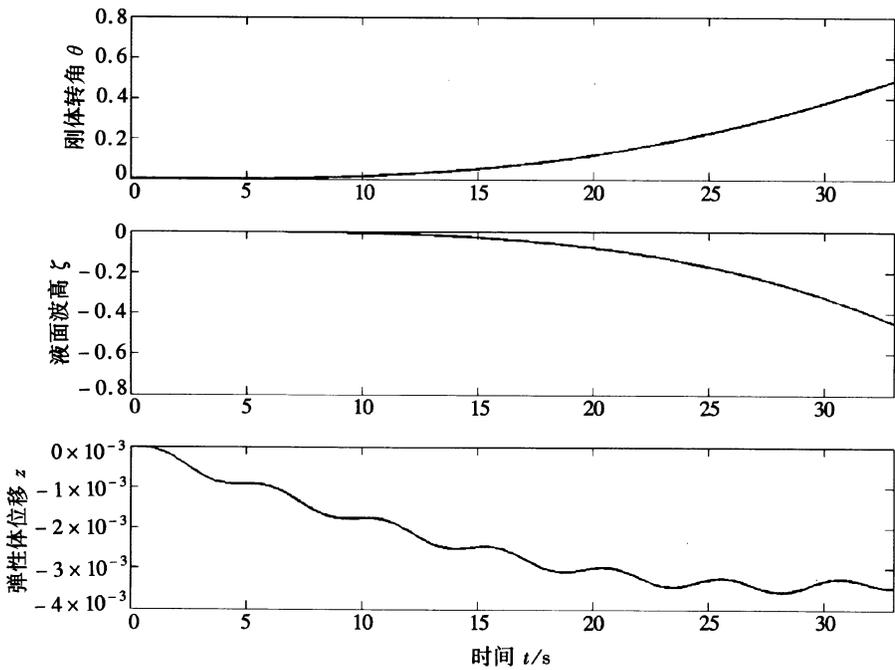
$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{\omega_4}{2\pi} = 0.006\ 158\ 222\ 401, & \omega_{11} &= \frac{\omega_{11}}{2\pi} = 0.026\ 912\ 308\ 72, \\ \omega_{12} &= \frac{\omega_{12}}{2\pi} = 0.039\ 819\ 797\ 17, & \omega_{13} &= \frac{\omega_{13}}{2\pi} = 0.048\ 859\ 007\ 73, \\ \omega_{e1} &= \frac{\omega_{e1}}{2\pi} = 0.204\ 320\ 412\ 6, & \omega_{e2} &= \frac{\omega_{e2}}{2\pi} = 1.313\ 961\ 045. \end{aligned}$$

刚-液-弹三者之间的耦合使波形图表现出更为丰富的动力学现象, 三者波形相互影响, 代表着能量在三者之间不断相互传递. 用耦合系统中各阶固有频率激励, 得到的响应产生更加强烈的共振现象, 从而验证了耦合系统固有频率解的正确性, 同时说明了考虑刚-液-弹之间相互耦合作用的必要性. 在不同重力环境下, 刚-液-弹三者之间的相互耦合作用如表 2 所示.

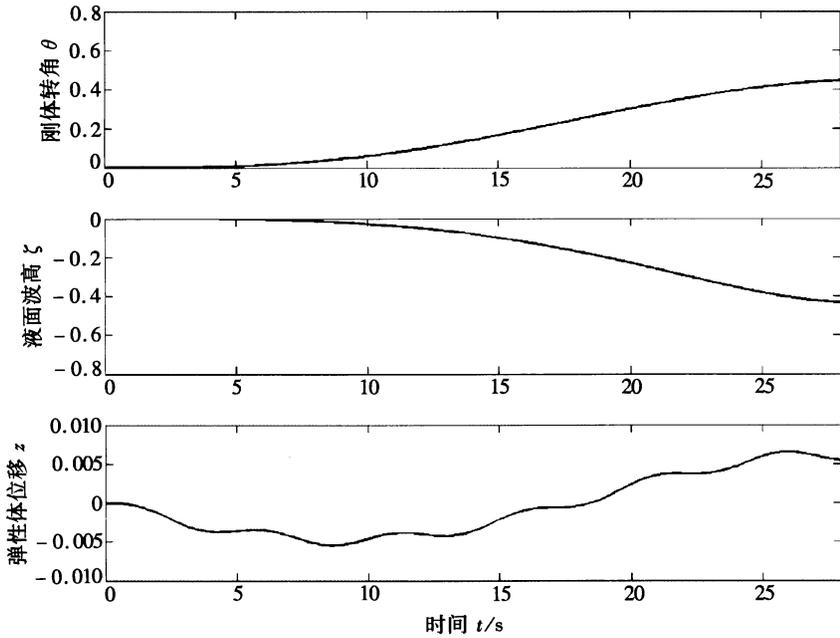
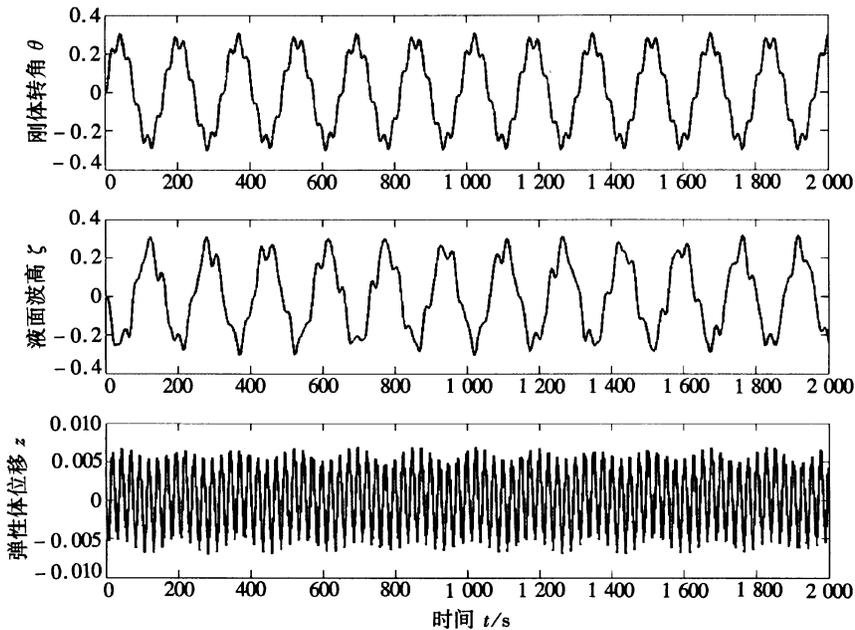
表 2 刚-液-弹之间的相互耦合作用随重力加速度的变化趋势

重力加速度 g	弹性体对刚体	液体对刚体	弹性体对液体	液体对弹性体
9.8	强	弱	强	强
0.8	强	弱	强	强
0.01	强	强	强	弱

当 $g = 0.01$ 时, 液体的前三阶模态对刚体姿态的影响已超过弹性体对刚体姿态的影响,

图8 $\omega = \omega_{e1}$ 时,刚-液-弹波形图图9 $\omega = \omega_r$ 时,刚-液-弹波形图

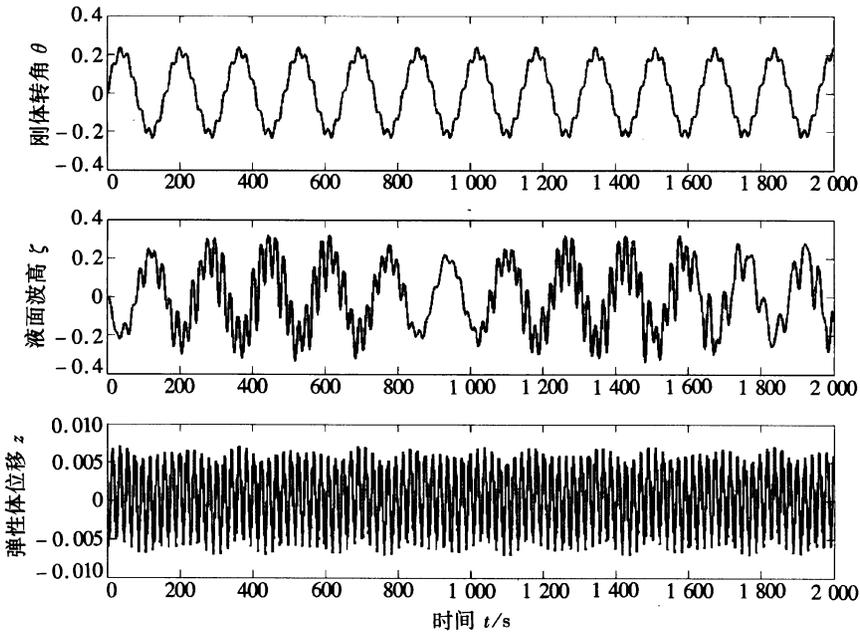
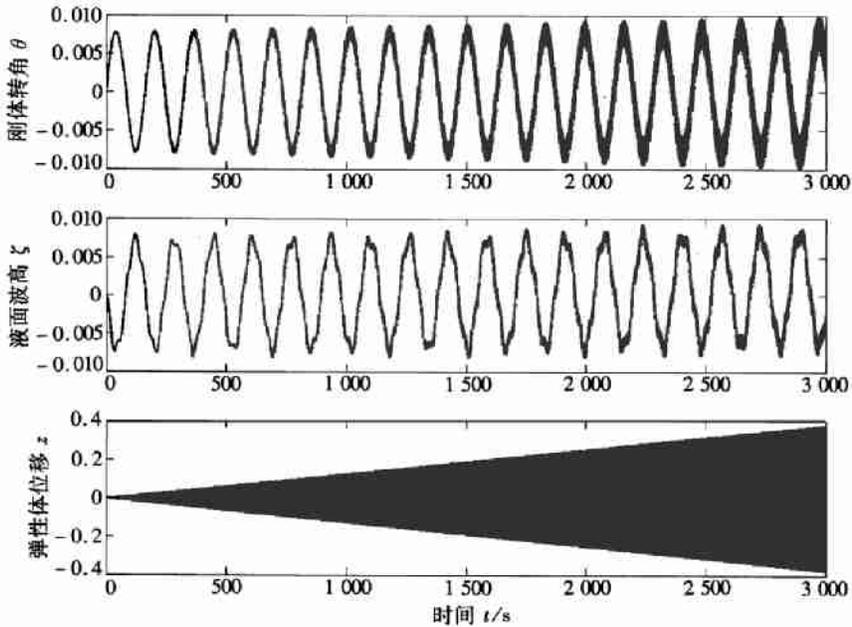
所以在低重下应该考虑液体的多阶模态。由于弹性体部分采用线性模型,所以当激励频率为 ω_{e1} 、 ω_{e2} 时,响应会不断发散,系统随着时间的无限延长将会失稳。由于充分考虑液体的非线性因素,当激励频率为 ω_{11} 、 ω_{12} 、 ω_B 时,激励幅值较小会产生拍振,激励幅值较大时发散,如图8至图13所示。

图 10 $\omega = \omega_{11}$ 时, 刚-液-弹波形图图 11 $\omega = \omega_{12}$ 时, 刚-液-弹波形图

4 结 论

本文首先建立了矩形贮箱作俯仰运动时刚-液-弹耦合系统动力学模型, 用伽辽金法离散后得到一阶非线性常微分方程组, 分析刚-液-弹耦合系统的固有频率后发现:

- 1) 重力加速度对耦合系统的固有频率 ω_r 、 ω_{11} 、 ω_{12} 和 ω_B 影响很大, 对 ω_{e1} 、 ω_{e2} 影响较小.
- 2) 考虑刚-液-弹耦合作用后, ω_{e1} 、 ω_{e2} 较弹性体固有频率大; ω_r 、 ω_{11} 和 ω_{13} 与刚体及液体反

图 12 $\omega = \omega_{13}$ 时, 刚-液-弹波形图图 13 $\omega = \omega_{22}$ 时, 刚-液-弹波形图

对称模态相比较, 变化趋势与转动中心至静液面的距离有关, 距离较小时略有减小, 距离较大时略有增大。

通过数值模拟可以看出, 重力加速度较大时, 弹性体与刚体的耦合作用较强, 重力加速度较小时, 液体与刚体的耦合作用超过了弹性体与刚体的耦合作用, 说明在分析空间环境中充液卫星姿态时必须考虑液体的耦合作用。

[参 考 文 献]

- [1] H H 莫依舍夫, B B 鲁面采夫. 充液刚体动力学[M]. 韩子鹏 译. 北京: 宇航出版社, 1992.
- [2] Abramson H N. The dynamic behavior of liquids in moving containers[R]. NASA SP106, 1966.
- [3] Odd M Faltinsen. A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks[J]. Journal of Ship Research, 1974, **18**(4): 224-241.
- [4] Odd M Faltinsen, Olav F, Rognebakke, Ivan A Lukovsky, et al. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth[J]. J Fluid Mech, 2000, **407**: 201-234.
- [5] Odd M Faltinsen, Alexander N Timokha. Asymptotic modal approximation of nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank with small fluid depth[J]. J Fluid Mech, 2002, **470**, 319-357.
- [6] 王照林, 刘延柱. 充液系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [7] 尹立中. 航天工程中液体大幅晃动及贮箱类液固耦合动力学研究[D]. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 1999.
- [8] 苟兴宇, 尹立中, 马兴瑞, 等. 窄长方形贮箱中液体的强迫晃动[J]. 力学与实践, 1998, **20**(4): 20-22.
- [9] 尹立中, 刘敏, 王本利, 等. 矩形贮箱类液固耦合系统的平动响应研究[J]. 振动工程学报, 2000, **13**(3): 433-437.
- [10] 马兴瑞, 王本利, 苟兴宇, 等. 航天动力学——若干问题进展及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [11] 陈科, 李俊峰, 王天舒. 矩形贮箱内液体非线性晃动动力学建模与分析[J]. 力学学报, 2005, **37**(3): 339-344.
- [12] 曾江红. 多腔充液自旋系统动力学与液体晃动三维非线性数值研究[D]. 博士论文. 北京: 清华大学工程力学系, 1996.
- [13] 徐刚. 大型薄壁结构与大晃动粘性流体的流固耦合数值研究[D]. 博士论文. 北京: 清华大学工程力学系, 2003.
- [14] 岳宝增, 刘延柱, 王照林. 三维液体非线性晃动动力学特性的数值模拟[J]. 应用力学学报, 2001, **18**(1): 110-115.
- [15] 岳宝增. 俯仰激励下三维液体大幅晃动问题研究[J]. 力学学报, 2005, **37**(2): 199-203.
- [16] 李遇春, 楼梦麟. 渡槽中流体非线性晃动的边界元模拟[J]. 地震工程与工程振动, 2000, **20**(2): 51-56.
- [17] 李俊峰, 王照林. 带挠性伸展附件的航天器姿态动力学研究[J]. 清华大学学报, 1996, **36**(10): 35-40.
- [18] Kalaycioglu S, Misra A K. Approximate solutions for vibration of deploying appendages[J]. J Guid Cont Dyn, 1991, **14**(2): 287-293.
- [19] 贾英宏, 徐世杰. 充液挠性多体航天器的变结构控制[J]. 宇航学报, 2002, **23**(3): 18-23.
- [20] 贾英宏, 徐世杰, 荆武兴. 带弹性附件的航天器的动力学与变结构控制[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2003, **35**(1): 1-4.
- [21] 李铁成, 王照林, 李俊峰, 等. 刚-流-弹耦合系统动力方程及其动力边界条件的建立[J]. 应用力学学报, 1998, **15**(2): 127-131.
- [22] 程绪铎, 王照林, 李俊峰. 带弹性伸展附件充液航天器姿态动力学研究[J]. 空间科学学报, 2000, **20**(3): 271-277.

Dynamic Response of a Liquid-Filled Rectangular Tank With Elastic Appendages Under Pitching Excitation

LÜ Jing, LI Jun-feng, WANG Tian-shu

(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: Nonlinear dynamics of liquid-filled rectangular tank with elastic appendages are studied. Based on the assumption of the ideal fluid, the coupling dynamics equations of rigid tank, elastic appendages and liquid fuel were derived using H-O principle. In the case of pitch excitation, the modified potential function and wave height function were introduced to describe the moving boundary of fluid. Then Galerkin's method was used to discrete the dynamic equations into ordinary differential equations. The natural frequencies of the coupling system were formulated in liquid depth, the length of the tank, and etc. The formulae are confirmed by numerical simulation, which also show the effect of liquid and elastic appendages on the attitude angular of rigid.

Key words: liquid-filled rectangular tank with elastic appendage; nonlinear dynamics; natural frequency; pitch