

线性时变系统二次最优控制问题的保辛近似求解*

谭述君, 钟万勰

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 状态空间的最优控制体系是保守的, 其近似算法应当保辛. 提出了基于分段常值精细积分方法的保辛摄动近似方法, 在同一框架下求解了线性时变 LQ 最优控制中的计算问题, 即变系数矩阵 Riccati 方程和状态反馈方程. 该算法是保辛的, 具有很好的数值稳定性和精度. 算例验证了算法的有效性.

关键词: 线性时变系统; 线性二次最优控制; 变系数 Riccati 方程; 区段混合能; 状态传递矩阵; 保辛摄动

中图分类号: O32; TP273 **文献标识码:** A

引 言

线性系统的二次最优控制问题是一个经典的问题. 其系统稳定性以及控制器的存在性等基本问题, 无论是对时变还是定常系统, 历来得到了广泛的研究^[1-2]. 与之形成对照的是, 有关控制器的求解研究却比较少, 特别是时变系统控制器的求解, 其关键点在于如何有效地求解变系数矩阵 Riccati 微分方程, 也是难点. 自从 Chen 等引入沃尔什函数(Walsh functions)^[3]来分析求解线性时变二次型最优控制以来, 许多作者利用方块脉冲函数^[4]、斜坡函数^[5]以及近年来盛行的小波^[6]等来求解. 然而这些离散都没有考虑保守系统的保辛, 不理想. 而且, 实际系统往往是非线性的, 非线性系统的求解通常用摄动法迭代, 每次迭代都转化成为一个时变系统而求解. 故时变系统的分析求解是很重要的内容, 值得进一步研究.

线性二次最优控制问题对应于 Hamilton 系统对偶方程的两端边值问题, 曾经造成了很大困难. 钟万勰^[7]基于计算结构力学与 LQ 最优控制理论之间的模拟关系, 引入区段混合能的概念, 在同一个框架下精确求解了线性定常系统二次最优控制中的计算问题^[8], 这为时变系统的摄动提供了基础.

* 收稿日期: 2006-09-26; 修订日期: 2007-01-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10202004)

作者简介: 谭述君(1979—), 男, 山东潍坊人, 博士(联系人. Tel: + 86-411-84708404; E-mail: ccnnts@student.dlut.edu.cn);

钟万勰(1934—), 男, 浙江德清人, 教授, 中国科学院院士(Tel/Fax: + 86-441-84708437; E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

本文首先引入区段混合能的概念,得到了矩阵微分 Riccati 方程和区段混合能矩阵之间的联系,指出 Riccati 方程和状态反馈方程的解可通过区段混合能矩阵的计算得到. 然后依据区段混合能矩阵和 Hamilton 对偶方程对应的状态传递矩阵之间的转换关系,将区段混合能的计算转化为相应区段状态传递矩阵的计算. 在 Hamilton 体系下,采用保辛近似算法对时变 Hamilton 系统的区段传递矩阵进行求解^[9],返回去求得相应的区段混合能矩阵,从而完成了时变二次最优控制问题的求解. 因保辛摄动的算法具有很好的数值稳定性和精度,将给出较好的数值结果. 通过给出的两个数值算例验证了算法的有效性.

1 问题描述

考虑线性时变系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

二次时变性能指标为

$$J[u(\cdot)] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt + \frac{1}{2} x^T(t_f)S_f x(t_f), \quad (2)$$

其中矩阵 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ 分别为 $n \times n$ 、 $n \times m$ 、 $n \times n$ 、 $m \times m$ 维,其元素皆为 t 的连续函数或分段连续函数,并且有 $Q(t) \geq 0$ 、 $R(t) > 0$ 、 $S_f \geq 0$ 、 $\forall t \in [t_0, t_f]$ 末态时间 t_f 是固定的; $x(t)$ 、 $u(t)$ 分别是 n 、 m 维的状态与控制向量.

线性时变系统的二次最优控制要求,在满足动力方程(1)的条件下,寻求最优控制 $u(t)$,使得性能指标(2)式最小. 系统的结构形式和定常系统类似,推导如下. 引入 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$ 解除动力约束(1)式,得到扩展的指标泛函 J_A

$$J_A = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} [x^T Q(t)x + u^T R(t)u] + \lambda^T [x - A(t)x - B(t)u] \right\} dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f), \quad \delta J_A = 0, \quad (3)$$

先完成对 u 的变分

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t), \quad (4)$$

得到

$$J_A = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \lambda^T x - H(x, \lambda) \right\} dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f), \quad \min_x \max_\lambda J_A, \quad (5)$$

其中

$$H(x, \lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda + \lambda^T A(t)x - \frac{1}{2} x^T Q(t)x. \quad (5a)$$

变分(5)式是典型的 Hamilton 体系变分原理,相应的对偶方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t), & x(t_0) = x_0, \\ \dot{\lambda}(t) = -Q(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t), & \lambda(t_f) = -S_f x(t_f). \end{cases} \quad (6)$$

对上式齐次方程组的求解,通常采用经典的 Riccati 变换,

$$\lambda(t) = -S(t)x(t), \quad (7)$$

将(5)式转化为两个一端边值问题,即 Riccati 方程和状态反馈方程的求解.

$$\begin{aligned} -\dot{S}(t) &= S(t)A(t) + A^T(t)S(t) + Q(t) - \\ &S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t), \quad S(t_f) = S_f, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t))\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (9)$$

以上便是线性时变系统的二次最优控制问题, 最终导向一个变系数矩阵 Riccati 微分方程(8)式和变系数线性微分方程(9)式的求解. 求解理论同线性定常系统是一致的, 但由于系统时变的特性, 进一步增加了 Riccati 方程求解的难度, 而这正是控制器求解的关键. 同时, 控制仿真要求对变系数微分方程(9)式的精确求解.

2 基于区段混合能的求解方法

对于定常系统的线性二次最优控制问题, 钟万勰^[7]基于计算结构力学与最优控制之间的模拟关系, 发现了 Riccati 方程的解和区段混合能矩阵之间的联系, 将时间上逐步递推的串行计算转化为空间上的并行计算, 大大提高了控制器求解的精度和效率. 其实, 这种基于计算结构力学的区段混合能解法, 不仅仅限于定常系统.

相应与变分(5)式, 引入区段 $[t_a, t_b]$ 的混合能 $V(\mathbf{x}_a, \lambda_b)$

$$V(\mathbf{x}_a, \lambda_b) = \lambda_b^T \mathbf{x}_b - J_A(t_a, t_b) = \lambda_b^T \mathbf{x}_b - \int_a^b \left\{ \lambda^T \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}, \lambda) \right\} dt, \quad (10)$$

上式定义的区段混合能 $V(\mathbf{x}_a, \lambda_b)$ 只是两端 \mathbf{x}_a, λ_b 的函数. 对于线性二次型问题, 混合能(10)式总可以一般的表述为

$$V(\mathbf{x}_a, \lambda_b) = \frac{1}{2} \lambda_b^T \mathbf{G}(t_a; t_b) \lambda_b + \lambda_b^T \mathbf{F}(t_a; t_b) \mathbf{x}_a - \frac{1}{2} \mathbf{x}_a^T \mathbf{Q}(t_a; t_b) \mathbf{x}_a. \quad (11)$$

这里应该注意, 对于时变系统, 区段混合能矩阵不能简单地认为是区段长度 $\eta = t_b - t_a$ 的函数, 故而写作 $\mathbf{Q}(t_a; t_b)$ 、 $\mathbf{G}(t_a; t_b)$ 、 $\mathbf{F}(t_a; t_b)$. 文献[7]给出了 \mathbf{x}_a, λ_b 满足的区段对偶方程

$$\begin{cases} \mathbf{x}_b = \mathbf{F}(t_a; t_b) \mathbf{x}_a + \mathbf{G}(t_a; t_b) \lambda_b, \\ \lambda_a = -\mathbf{Q}(t_a; t_b) \mathbf{x}_a + \mathbf{F}^T(t_a; t_b) \lambda_b. \end{cases} \quad (12)$$

区段对偶方程(12)式对应于连续的对偶方程(6)式, 实质上是用区段两端的性质来描述整个区段上的性质; 而从一端到另一端则暗示了问题的递推求解形式. 利用前面引入的 Riccati 变换(7)式, 在区段 $[t_a, t_b]$ 端点有

$$\lambda_a = -\mathbf{S}_a \mathbf{x}_a, \quad \lambda_b = -\mathbf{S}_b \mathbf{x}_b, \quad (13)$$

把上式代入到区段对偶方程(12)式, 整理得

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{Q}(t_a; t_b) + \mathbf{F}^T(t_a; t_b) \mathbf{S}_b [\mathbf{I} + \mathbf{G}(t_a; t_b) \mathbf{S}_b]^{-1} \mathbf{F}(t_a; t_b), \quad (14)$$

$$\mathbf{x}_b = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(t_a; t_b) \mathbf{S}_b]^{-1} \mathbf{F}(t_a; t_b) \mathbf{x}_a. \quad (15)$$

如果划分整个区间 $[t_0, t_f]$ 为 $[t_0, t_1], \dots, [t_{k-1}, t_k], \dots, [t_{N-1}, t_N]$ 共 N 个区段, 记区段 $[t_a, t_b]$ 为第 k 区段 $[t_{k-1}, t_k]$, 相应的区段能矩阵记为 \mathbf{Q}_k 、 \mathbf{G}_k 、 \mathbf{F}_k , 那么由(14)式和(15)式可得到整个区间的递推式为

$$\mathbf{S}_{k-1} = \mathbf{Q}_k + \mathbf{F}_k^T \mathbf{S}_k [\mathbf{I} + \mathbf{G}_k \mathbf{S}_k]^{-1} \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{S}_N = \mathbf{S}_f, \quad k = N, N-1, \dots, 1, \quad (16)$$

$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_k \mathbf{S}_k]^{-1} \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

首先离线利用(16)式的逆向递推得到 Riccati 方程(8)的解, 然后利用(17)式正向递推就得到了状态方程(9)的解. 这样, 线性二次最优控制问题(8)式、(9)式的求解转化为区段 $[t_{k-1}, t_k]$ 的混合能矩阵 $\mathbf{Q}(t_{k-1}; t_k)$ 、 $\mathbf{G}(t_{k-1}; t_k)$ 、 $\mathbf{F}(t_{k-1}; t_k)$ 的求解, 结构力学中的子结构分析^[7]等技术就可应用了.

对于定常系统, 利用区段平移不变的性质, 可利用 2^N 类算法进行细分、合并来得到基本区

段混合能矩阵在计算机上的精确解;而对于时变系统,区段混合能矩阵不仅仅与区段长度有关, 2^N 类算法就不能采用了. 但是,区段合并消元依然具有次序无关的性质^[7],这意味着各个区段的混合能矩阵 Q_k 、 G_k 、 F_k 可以独立运算;而且,也可以先由相连的一些基本区段合成较大的区段,递推得到各个大区段端点上的值,再独立的递推各大区段内部各点的值,这些运算的独立性给编程实现带来了极大的灵活性,使得并行运算成为可能,从而大大提高求解效率. 因此,如何提高时变区段混合能矩阵的精度是成为求解(8)式,(9)式的关键.

3 时变区段的混合能矩阵求解

3.1 区段混合能矩阵与辛状态传递矩阵的转换

注意到区段混合能定义(10)式的是基于变分(5)式引入的,而对(5)式的变分导出了连续的对偶方程(6)式;因此,表征区段 $[t_b, t_a]$ 的混合能矩阵 $[Q(t_a; t_b), G(t_a; t_b), F(t_a; t_b)]$ 与对偶方程(6)式的辛状态传递矩阵 $\Phi(t_a; t_b)$ 之间必然存在联系,下面推导之.

引入标记 $v = \{x^T, \lambda^T\}^T$, 则对偶方程(6)式表述为

$$\dot{v} = H(t)v(t), \quad (18)$$

其中, $H(t)$ 为时变的 Hamilton 矩阵

$$H(t) = \begin{bmatrix} A(t) & D(t) \\ B(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}, \quad (18a)$$

这里引入了标记 $D(t) = B(t)R^{-1}(t)B^T(t)$, $B(t) = Q(t)$, $A(t) = A(t)$.

该线性时变方程的解有如下形式

$$v(t) = \Phi(t; t_0) \cdot v(t_0), \quad (19)$$

其中, $\Phi(t; t_0)$ 为辛状态传递矩阵,满足下面性质

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t; t_0) = H(t) \cdot \Phi(t; t_0), & \Phi(t_0; t_0) = I, \\ \Phi(t_c; t_b) \cdot \Phi(t_b; t_a) = \Phi(t_c; t_a). \end{cases} \quad (20)$$

根据(19)式,在区段 $[t_a, t_b]$ 内,有传递矩阵 $\Phi(t_b; t_a)$, 使

$$v(t_b) = \Phi(t_b; t_a) \cdot v(t_a), \quad (21)$$

用分块矩阵表示为

$$\begin{cases} x_b = \Phi_{1,1}(t_b; t_a)x_a + \Phi_{1,2}(t_b; t_a)\lambda_a, \\ \lambda_b = \Phi_{2,1}(t_b; t_a)x_a + \Phi_{2,2}(t_b; t_a)\lambda_a. \end{cases} \quad (21)'$$

比较区段传递方程(21)'和区段对偶方程(12),不难发现区段混合能矩阵和辛状态传递矩阵之间的关系

$$\begin{cases} G(t_a; t_b) = \Phi_{1,2}(t_b; t_a) \Phi_{2,2}^{-1}(t_b; t_a), \\ Q(t_a; t_b) = \Phi_{2,1}^{-1}(t_b; t_a) \Phi_{2,1}(t_b; t_a), \\ F(t_a; t_b) = \Phi_{2,2}^T(t_b; t_a). \end{cases} \quad (22)$$

根据上述关系,基本区段混合能矩阵的计算可以转化为时变 Hamilton 动力系统辛状态传递矩阵的计算了. 那么,就可以利用各种近似方法,尤其是 Hamilton 系统的保辛摄动近似法来提高区段传递矩阵的计算精度^[9].

3.2 辛传递矩阵的保辛摄动

方程(18)表示的 Hamilton 动力系统可采用正则变换方法摄动计算,在每一个基本区段 $[t_a, t_b]$ 内,将时变的 Hamilton 矩阵分成两部分

$$H(t) = H_0 + H_1(t), \quad H_0 = \begin{bmatrix} A_0 & D_0 \\ B_0 & -A_0^T \end{bmatrix}, \quad (23)$$

其中, H_0 是定常的, A_0, B_0, D_0 是 $A(t), B(t), D(t)$ 的区段均值, 是区段 $[t_a, t_b]$ 内关于 $H(t)$ 的零次近似, 仍为 Hamilton 矩阵; $H_1(t)$ 是余下的时变“小量”.

零次近似系统 $\mathfrak{H}_0(t) = H_0 v_0(t)$ 是定常的, 它的辛状态传递矩阵为 $\Phi_0(t; t_a)$, 满足

$$\Phi_0(t; t_a) = H_0 \Phi_0(t; t_a), \quad \Phi_0(t_a; t_a) = I, \quad (24)$$

该定常系统的传递矩阵存在解析解, 可用精细积分法求得. 当然, 该定常系统的混合能矩阵 $Q_0(t_a; t), G_0(t_a; t), F_0(t_a; t)$, 亦可由精细积分法精确求解. 利用传递辛矩阵 $\Phi_0(t; t_a)$ 做正则变换

$$v(t) = \Phi_0(t; t_a) v_1(t), \quad (25)$$

考虑到(24)式, 有

$$v(t_a) = v_1(t_a), \quad (25a)$$

把变换(25)式代入(18)式, 并利用(24)式, 得

$$\mathfrak{H}(t) = H_1(t) \bullet v_1(t), \quad (26)$$

$$H_1(t) = \Phi_0^{-1}(t; t_a) H_1(t) \Phi_0(t; t_a) = -J \Phi_0^T(t; t_a) \bullet J H_1(t) \bullet \Phi_0(t; t_a). \quad (26a)$$

因 $H(t)$ 及 H_0 皆为 Hamilton 矩阵, 不难验证 $[J H_1(t)]^T = J H_1(t)$, 即 H_1 仍是 Hamilton 矩阵. 这说明, 正则变换后的微分方程(26) 仍然是 Hamilton 矩阵的微分方程, 仍是保守体系, 即保守了.

方程(26) 是线性时变的, 对应的传递辛矩阵 $\Phi_1(t; t_a)$ 满足

$$\Phi_1(t; t_a) = H_1(t) \Phi_1(t; t_a), \quad \Phi_1(t_a; t_a) = I, \quad (27)$$

其中 $H_1(t)$ 是时变的, $\Phi_1(t; t_a)$ 的解析解难以求得. 但是由于 $H_1(t)$ 已是一次保辛摄动后的结果, 可认为是相对“小量”, 近似在这一小量的层次做出是可接受的. 很多近似方法都可用于摄动方程(27)的求解, 比如 Taylor 级数展开、Runge-Kutta 法等近似方法, 但是这一类差分近似方法都未考虑到保辛; 对小量的近似也应该保辛. 辛传递矩阵 $\Phi_1(t; t_a)$ 的 Taylor 级数展开相当于加法摄动, 文献[10]第五章指出辛矩阵的加法摄动是不保辛的, 而混合能矩阵的加法摄动是保辛的, 应采用之.

将 $H_1(t)$ 采用分块矩阵表述为

$$H_1(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & D_1(t) \\ B_1(t) & -A_1^T(t) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

那么(26)式对应的 Hamilton 函数为

$$H'(x_1, \lambda_1, t) = \frac{1}{2} \lambda_1^T D_1(t) \lambda_1 + \lambda_1^T A_1(t) x_1 - \frac{1}{2} x_1^T B_1(t) x_1, \quad (29)$$

其中 x_1, λ_1 为 v_1 的分量, 即 $v_1 = \{x_1^T, \lambda_1^T\}^T$. 相应的区段混合能矩阵定义为

$$V(x_{1a}, \lambda_{1b}) = \lambda_{1b}^T x_{1b} - \int_{t_a}^{t_b} [\lambda_{1a}^T x_{1a} - H'(x_1, \lambda_1, t)] dt = \frac{1}{2} \lambda_{1a}^T G_1(t_a; t_b) \lambda_{1b} + \lambda_{1b}^T F_1(t_a; t_b) x_{1a} - \frac{1}{2} x_{1a}^T Q_1(t_a; t_b) x_{1a}. \quad (30)$$

文献[11]指出, 区段混合能矩阵 Q_1, G_1, F_1 与 Hamilton 函数矩阵 A_1, B_1, D_1 之间满足微分关系

$$\begin{cases} \partial Q_1 / \partial t_b = F_1^T B_1 F_1, & Q_1(t_a; t_a) = \mathbf{0}, \\ \partial G_1 / \partial t_b = D_1 + A_1 G_1 + G_1 A_1^T - G_1 B_1 G_1, & G_1(t_a; t_a) = \mathbf{0}, \\ \partial F_1 / \partial t_b = (A_1 - G_1 B_1) F_1, & F_1(t_a; t_a) = I. \end{cases} \quad (31)$$

对于摄动系统的混合能矩阵微分方程(31), 采用 Taylor 级数展开、Runge-Kutta 法等近似方法是保辛的, 为表述简明, 这儿采用 Taylor 级数展开的方法.

记区段 $[t_a, t_b]$ 的长度为 $\tau = t_b - t_a$, 那么当 τ 很小时, $A_1(t)$ 、 $B_1(t)$ 、 $D_1(t)$ 可以用二次函数近似为

$$\begin{cases} A_1(t_a; t_a + \tau) \approx a_0 + a_1 \cdot \tau + a_2 \cdot \tau^2, \\ B_1(t_a; t_a + \tau) \approx b_0 + b_1 \cdot \tau + b_2 \cdot \tau^2, \\ D_1(t_a; t_a + \tau) \approx d_0 + d_1 \cdot \tau + d_2 \cdot \tau^2. \end{cases} \quad (32)$$

因区段长 τ 比较小, 故区段混合能矩阵 Q_1 、 G_1 、 F_1 可用幂级数展开之法求解. 令

$$\begin{cases} Q_1(t_a; t_a + \tau) = q_1 \tau + q_2 \tau^2 + q_3 \tau^3 + q_4 \tau^4 + O(\tau^5), \\ G_1(t_a; t_a + \tau) = g_1 \tau + g_2 \tau^2 + g_3 \tau^3 + g_4 \tau^4 + O(\tau^5), \\ F_1(t_a; t_a + \tau) = f_1 \tau + f_2 \tau^2 + f_3 \tau^3 + f_4 \tau^4 + O(\tau^5), \\ F_1(t_a; t_a + \tau) = I + F_1'(t_a; t_a + \tau), \end{cases} \quad (33)$$

其中, q_i 、 g_i 、 f_i , $i = 1 \sim 4$, 皆为 $n \times n$ 的 Taylor 展开系数矩阵. 将展开(33)式、(32)式代入方程(31), 比较 τ 的各幂次, 给出

$$\begin{cases} g_1 = d_0; & g_2 = [(a_0 g_1 + d_1/2) + (a_0 g_1 + d_1/2)^T]/2, \\ g_3 = [(a_0 g_2 + a_1 g_1 + d_2/2 - g_1 b_0 g_1/2) + \\ & (a_0 g_2 + a_1 g_1 + d_2/2 - g_1 b_0 g_1/2)^T]/3, \\ g_4 = [(a_0 g_3 + a_1 g_2 + a_2 g_1 - g_1 b_0 g_2 - g_1 b_1 g_1/2) + \\ & (a_0 g_3 + a_1 g_2 + a_2 g_1 - g_1 b_0 g_2 - g_1 b_1 g_1/2)^T]/4. \end{cases} \quad (34a)$$

$$\begin{cases} f_1 = a_0; & f_2 = [a_0 f_1 + (a_1 - g_1 b_0)]/2, \\ f_3 = [a_0 f_2 + (a_1 - g_1 b_0) f_1 + (a_2 - g_1 b_1 - g_2 b_0)]/3, \\ f_4 = [a_0 f_3 + (a_1 - g_1 b_0) f_2 + (a_2 - g_1 b_1 - g_2 b_0) f_1 - \\ & (g_1 b_2 + g_2 b_1 + g_3 b_0)]/4. \end{cases} \quad (34b)$$

$$\begin{cases} q_1 = b_0; & q_2 = [(b_0 f_1 + b_1/2) + (b_0 f_1 + b_1/2)^T]/2, \\ q_3 = [(b_0 f_2 + b_1 f_1 + b_2/2 + f_1^T b_0 f_1/2) + \\ & (b_0 f_2 + b_1 f_1 + b_2/2 + f_1^T b_0 f_1/2)^T]/3, \\ q_4 = [(b_0 f_3 + b_1 f_2 + b_2 f_1 + f_1^T b_0 f_2 + f_1^T b_1 f_1/2) + \\ & (b_0 f_3 + b_1 f_2 + b_2 f_1 + f_1^T b_0 f_2 + f_1^T b_1 f_1/2)^T]/4. \end{cases} \quad (34c)$$

系数矩阵 q_i 、 g_i 、 f_i , $i = 1 \sim 4$ 只需按上式逐步计算, 不需要迭代. 从(34a)式和(34c)式可以看出 Q_1 和 G_1 的系数矩阵保持对称, $g_i = g_i^T$ 、 $q_i = q_i^T$. 得到系数 q_i 、 g_i 、 f_i , $i = 1 \sim 4$ 之后, 回代到(33)式, 就得到摄动后区段 $[t_a, t_b]$ 的混合能矩阵 Q_1 、 G_1 、 F_1 , 然后利用转换关系(22)式得到相应的辛传递矩阵 $\Phi_1(t_b; t_a)$.

有了 $\Phi_0(t_b; t_a)$ 和 $\Phi_1(t_b; t_a)$ 后, 就可以求得该区端原状态 $v(t)$ 的传递矩阵了, 推导如下

$$v(t_b) = \Phi_0(t_b; t_a) \cdot v_1(t_b) = \Phi_0(t_b; t_a) \cdot \Phi_1(t_b; t_a) \cdot v_1(t_a) =$$

$$\Phi_0(t_b; t_a) \cdot \Phi_1(t_b; t_a) \cdot \mathbf{v}(t_a), \quad (35)$$

其中用到了(25a)式的性质. 从而有

$$\Phi(t_b; t_a) = \Phi_0(t_b; t_a) \cdot \Phi_1(t_b; t_a), \quad (36)$$

这样, 就完成了时变 Hamilton 矩阵 $\mathbf{H}(t)$ 对应的辛传递矩阵的保辛摄动近似求解. 得到 $\Phi(t_b; t_a)$ 后, 利用区段混合能矩阵和状态传递阵之间的关系(22)式, 就完成了该区段混合能矩阵 $\mathbf{Q}(t_a; t_b)$ 、 $\mathbf{G}(t_a; t_b)$ 、 $\mathbf{F}(t_a; t_b)$ 的保辛近似求解.

对时变对偶微分方程, 寻求精确解几乎不可能. 因在精细积分解基础上采用保辛摄动, 对摄动项已经是小量, 展开(33)式取4项也可以满意了, 但比精细积分的效果仍相差很远. 近似解不可能要求十分准确, 精度只能适可而止.

4 时变区段混合能矩阵的算法

上节将区段混合能的求解转化为区段辛传递矩阵的求解, 保辛摄动是相对于辛传递矩阵而言的. 为了避免辛传递矩阵加法的摄动(不保辛), 摄动后传递矩阵 $\Phi_1(t_b; t_a)$ 的求解, 需要先求得混合能矩阵 $[\mathbf{Q}(t_a; t_b), \mathbf{G}(t_a; t_b), \mathbf{F}(t_a; t_b)]$, 然后用转换关系(22)式得到为 $\Phi_1(t_b; t_a)$, 与零次近似系统的 $\Phi_0(t_b; t_a)$ 按(36)式组合出原状态的传递矩阵 $\Phi(t_b; t_a)$ 之后, 再一次用转换关系(22)式, 才完成了区段混合能矩阵 $[\mathbf{Q}(t_a; t_b), \mathbf{G}(t_a; t_b), \mathbf{F}(t_a; t_b)]$ 的求解. 注意到转换关系(22)式需要对分块矩阵 $\Phi_{22}(t_b; t_a)$ 或 $\mathbf{F}(t_a; t_b)$ 的求逆, 辛矩阵可能是病态的, 从而引起数值困难.

事实上, 辛传递矩阵的顺次相乘等价于相邻两区段的合并. 即

$$\Phi = \Phi_2 \cdot \Phi_1 \Leftrightarrow (\mathbf{Q}_c, \mathbf{G}_c, \mathbf{F}_c) = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{G}_1, \mathbf{F}_1) \ominus (\mathbf{Q}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_2), \quad (37)$$

其中, Φ_1 、 Φ_2 和 Φ_c 分别与 $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{G}_1, \mathbf{F}_1)$ 、 $(\mathbf{Q}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_2)$ 和 $(\mathbf{Q}_c, \mathbf{G}_c, \mathbf{F}_c)$ 相对应. 证明很简单, 只需进行矩阵的代数运算进行验证即可.

有了这个关系上面的两次转换就可避免了, 利用(33)式得到摄动后的区段混合能矩阵 $[\mathbf{Q}_1, \mathbf{G}_1, \mathbf{F}_1]$ 之后, 只要与零次近似系统(24)式对应的混合能矩阵 $[\mathbf{Q}_0, \mathbf{G}_0, \mathbf{F}_0]$ 执行下面区段合并运算

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{G}, \mathbf{F}) = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{G}_1, \mathbf{F}_1) \ominus (\mathbf{Q}_0, \mathbf{G}_0, \mathbf{F}_0) \quad (38)$$

得到的 $[\mathbf{Q}(t_a; t_b), \mathbf{G}(t_a; t_b), \mathbf{F}(t_a; t_b)]$ 就是原系统区段混合能矩阵的解, 实际编程应采用上述算法.

下面给出求解线性时变二次最优控制中 Riccati 方程(8)式和状态反馈方程(9)式的算法. 首先将区间 $[t_0, t_f]$ 划分为 $t = t_0, t_1, \dots, t_N$ 的计算格点:

1) 计算各个区段 $[t_{k-1}, t_k]$ 的混合能矩阵 $(\mathbf{Q}_k, \mathbf{G}_k, \mathbf{F}_k)$. 首先采用精细积分法得到该区段零次近似的混合能矩阵 $[\mathbf{Q}_{0k}, \mathbf{G}_{0k}, \mathbf{F}_{0k}]$, 然后由(33)式得到该区段摄动后混合能矩阵 $[\mathbf{Q}_{1k}, \mathbf{G}_{1k}, \mathbf{F}_{1k}]$, 最后执行(38)式就得到了 $(\mathbf{Q}_k, \mathbf{G}_k, \mathbf{F}_k)$.

2) 组合各区段混合能矩阵 $(\mathbf{Q}_k, \mathbf{G}_k, \mathbf{F}_k)$ 完成问题求解. 即先按(16)式逆向递推得到 Riccati 方程(8)式的在计算格点上的解, 然后按(17)式正向递推就得到了状态反馈方程(9)式在计算格点上的解.

以下就是用数值例题来检验保辛摄动算法的效果了.

5 数值算例

为了刻画本文算法的有效性, 本文选用一个存在解析解的一维刚性问题和一个多维的时

变系统作为算例, 并与四阶 Runge-Kutta 算法的数值结果作比较.

算例 1 参考文献[12], 构造一维线性时变系统, 如下

$$\dot{x} = 6\sqrt{t} \cdot u, \quad x(0) = 1.0, \quad t \in [0, t_f].$$

二次型性能指标矩阵为

$$Q(t) = 9t, \quad R(t) = 1, \quad S_f = 0.$$

该时变系统对应的一维 Riccati 方程(8), 及闭环的状态反馈方程(9)有解析解, 即

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-18(t_f^2 - t^2)}}{1 + e^{-18(t_f^2 - t^2)}}, \quad x(t) = \frac{1 + e^{-18(t_f^2 - t^2)}}{1 + e^{-18t_f^2}} \cdot e^{-9t^2}.$$

该 Riccati 方程的解析解 $S(t)$ 同时包含快变衰减分量($e^{-18(t_f^2 - t^2)}$) 和慢变“衰减”分量(常值 1), 具有刚性的特征, 能较好的验证算法的稳定性与数值精度.

该 Riccati 方程的解很快收敛到稳态解 $S = 0.5$. 取 $t_f = 1.0$, 比较在瞬态变化部分(即 $0.8 < t < 1$, 如图 1 所示) 本文算法与四阶 Runge-Kutta 法的在相同步长时的数值精度. 表 1 和表 2 分别显示了 Riccati 方程和状态反馈方程的比较结果.

表 1 Riccati 方程数值解 $S(t)$ 比较 ($\Delta t = 0.05$)

| t | 1.0 | 0.95 | 0.90 | 0.85 | 0.80 | 0 |
|--------|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| 分析解 | 0.0 | 0.352 582 3 | 0.468 323 7 | 0.493 273 8 | 0.498 468 5 | 0.499 999 98 |
| 保辛近似 | 0.0 | 0.352 580 4 | 0.468 324 2 | 0.493 274 0 | 0.498 468 6 | 0.500 000 13 |
| 4h R-K | 0.0 | 0.348 977 3 | 0.459 159 9 | 0.488 883 2 | 0.496 941 0 | 0.499 999 95 |

表 2 状态反馈方程数值解 $x(t)$ 比较 ($\Delta t = 0.05$)

| t | 0 | 0.8 | 0.85 | 0.9 | 0.95 | 1.0 |
|--------|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| 分析解 | 1.0 | 0.003 155 9 | 0.001 509 8 | 0.000 704 6 | 0.000 348 1 | 0.000 246 81 |
| 保辛近似 | 1.0 | 0.003 155 7 | 0.001 509 7 | 0.000 704 6 | 0.000 348 0 | 0.000 246 80 |
| 4h R-K | 1.0 | 0.003 178 8 | 0.001 524 8 | 0.000 709 0 | 0.000 331 4 | 0.000 179 88 |

注 保辛近似是在 $H_0 = H(t_{k-1}), t \in [t_{k-1}, t_k]$ 上摄动.

说明

1) 表 1 显示本文算法得到 Riccati 微分方程解的数值精度更高. 不难看出, 在瞬态变化阶段 ($0.8 < t < 1$) 四阶 Runge-Kutta 算法的数值精度只有 2 位有效数字, 而本文保辛近似方法的始终保持 6 位有效数字的精度. 事实上, 只有当 Runge-Kutta 法的步长减小到 0.005, 在瞬态区段才能达到与保辛近似相似的精度. 而至于 Runge-Kutta 法迭代到末端也达到了很高的精度, 这是由于该 Riccati 方程很快收敛于稳态解(在 $t = 0.8$ 时与稳态解的差值就只有 0.001 5)了)导致的.

2) 表 2 显示本文算法得到状态微分方程解的数值精度更高. 状态微分方程的求解利用了各自上面 Riccati 方程的数值解, 因此有误差累积的因素. 本文保辛近似算法始终保持着 4 位有效数字, 而 Runge-Kutta 法只有 2 位有效数字, 特别是末端值, 误差更大. 数值试验发现, Runge-Kutta 法只有当步长小于 0.000 05, 在末端才能达到 4 位有效数字的精度.

3) 本文基于精细积分的保辛近似方法则具有很好的数值稳定性, 而且可执行并行运算. 而 Runge-Kutta 法容易产生数值不稳定现象, 特别是对于大规模的矩阵微分方程或刚性方程. 图 1 显示, 当步长增加到 $\Delta t = 0.1$ 时, Runge-Kutta 法在瞬态变化区段内有震荡的现象, 实际计

算表明,其计算步长不能超过 0.17,否则急剧发散.而本文保辛近似法在计算步长 $\Delta t = 0.2$ 依然保持很好的数值稳定性和精度.

算例 2

考虑下面一个二维线性时变系统,选自太空轨迹控制的一个线性时变系统的分析模型^[13].系统数据如下

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2t & 1 \\ 0 & t+1 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ (2t+2)/(2t+3) \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = I, \quad R(t) = 1.0; t \in [0, 4.0],$$

系统状态初值取 $x(0) = \{1, 1\}^T$, $S_f = 0$.

该系统对应的 Riccati 方程(8)式的分析解很难得到.事实上,除了个别 Riccati 方程可以得到其分析解,几乎所有的 Riccati 方程都需通过数值求解.

首先用精细步长 ($\Delta t = 0.0001$) 的 Runge-Kutta 法近似的得到的数值解作为参考解,然后适当增大步长,比较保辛近似与四阶 Runge-Kutta 法得到的数值结果.图 2 和图 3 分别给出了 Riccati 方程和闭环反馈系统状态响应的数值解比较.图

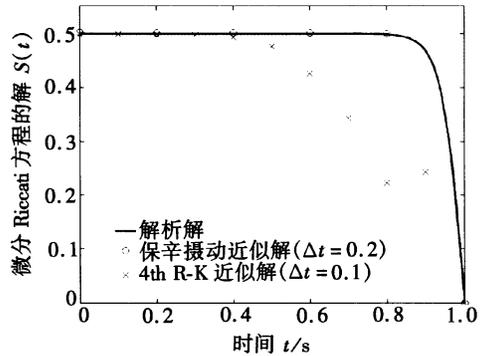


图 1 Riccati 方程数值解比较

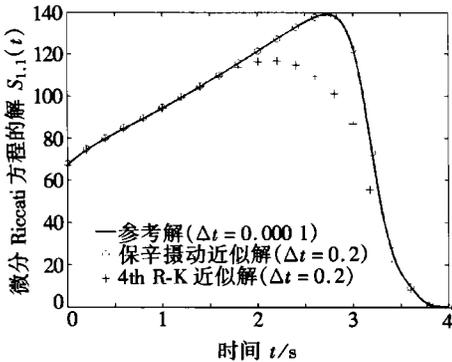


图 2 Riccati 方程数值解比较

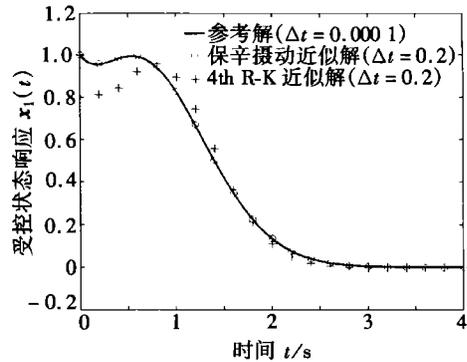


图 3 状态响应数值解比较

例显示,保辛近似方法的数值精度大大高于相同步长 ($\Delta t = 0.2$) 下的四阶 Runge-Kutta 法,特别是在变化比较剧烈的部分,与算例 1 得到的结论一致.这说明本文保辛近似的方法是有效的.

6 结 论

本文提出了基于分段常值精细积分的保辛近似算法,在同一框架下求解了线性时变二次最优控制中的计算问题,即时变系数矩阵 Riccati 方程和状态反馈方程的求解.由于近似出现在 Hamilton 对偶方程做了一次保辛摄动之后的“小量”上,既保持了 Hamilton 体系的性质,又提高了精度.数值算例验证了本文算法的有效性.

本文算法是在线性定常系统精细积分基础上的扩展,所以可以平行的运用到与精细积分方法所处理的定常系统问题相应的时变问题,比如线性时变系统的 Kalman-Bucy 滤波、跟踪以

及 H_∞ 控制和滤波等. 有待进一步发展应用.

[参 考 文 献]

- [1] Anderson Brian D O, Moore John B. Optimal Control: Quadratic Methods [M]. Englewood Cliffs, N J: Prentice Hall, 1990.
- [2] Chen C T. Linear System Theory and Design [M]. New York: CBS College, 1984.
- [3] Chen W L, Shih Y P. Analysis and optimal control of time-varying linear systems via Walsh functions [J]. Int J Control, 1978, 27(6): 917-932.
- [4] 徐宁寿, 郑兵. 方块脉冲函数用于线性时变系统的分析和最优控制[J]. 自动化学报, 1982, 8(1): 55-67.
- [5] 古天龙, 徐国华. 分段线性函数用于时变系统的最优控制[J]. 控制理论与应用, 1989, 6(4): 102-108.
- [6] Hsiao C H, Wang W J. Optimal control of linear time-varying systems via Haar wavelets[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 103(4): 641-655.
- [7] 钟万颢. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993.
- [8] 钟万颢. 线性二次最优控制的精细积分[J]. 自动化学报, 2002, 27(2): 166-173.
- [9] 钟万颢, 姚征. 时间有限元与保辛[J]. 机械强度, 2005, 27(2): 178-183.
- [10] 钟万颢. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [11] ZHONG Wan-xie. Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [12] Choi Chiu H. Time-varying Riccati differential equation for numerical experiments[A]. Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control [C]. Honolulu, Hawaii: Dec. 1990, 930-940.
- [13] LU Ping. Closed-form control laws for linear time-varying systems[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2000, 45(3): 537-542.

Numerical Solutions of LQ Control for Time-Varying Systems Via Symplectic Conservative Perturbation

TAN Shu-jun, ZHONG Wan-xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116023, P. R. China)

Abstract: Optimal control system of state space is a conservative system, whose approximate method should be symplectic conservation. Based on the precise integration method, an algorithm of symplectic conservative perturbation was presented. It gives a uniform way to solve the LQ control problems for linear time-varying systems accurately and efficiently, whose key points are solutions of differential Riccati equation and the state feedback equation with variable coefficient. The method is symplectic conservative and has a good numerical stability and high precision. Numerical examples demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: linear time-varying system; LQ control; Riccati equation with variable coefficient; interval mixed energy; state transition matrix; symplectic conservative perturbation