

# 弹性半空间地基上四边自由矩形板稳态振动的解析解\*

王春玲<sup>1</sup>, 黄 义<sup>1</sup>, 贾继红<sup>2</sup>

(1. 西安建筑科技大学 理学院, 西安 710055;

2. 东莞理工学院 软件学院, 广东 东莞 523808)

(本刊原编委黄义来稿)

摘要: 采用双重 Fourier 变换, 分析得到弹性半空间地基受竖向稳态荷载作用下的积分变换解. 与四边自由矩形板的振动解析解相结合, 得出弹性半空间地基上四边自由矩形板稳态振动的解析解. 还给出算例及参数影响分析.

关键词: 弹性半空间地基; 四边自由矩形板; 稳态振动; 相互作用; 解析解

中图分类号: O343.3; O327; TU311.3 文献标识码: A

## 引 言

弹性地基板是一种常见的工程结构形式, 广泛应用于机场、道路、码头以及建筑结构的基础等工程中<sup>[1,2]</sup>, 因而得到了广泛重视和大量研究. 现有的研究, 要么采用 Winkler 地基模型<sup>[3]</sup>或双参数地基模型<sup>[4]</sup>; 要么对地基反力做一些假设<sup>[5]</sup>; 要么不能全部满足板的边界条件<sup>[6]</sup>等; 要么用数值方法<sup>[7]</sup>或半解析方法<sup>[6]</sup>. 有关弹性半空间地基上矩形板的静、动力相互作用的解析解国内外研究甚少, 主要是哥尔布诺夫\_波沙道夫给出的双重幂级数解法<sup>[2]</sup>以及文献[8]的弯曲解析解. 但都是对静力问题而言, 而其动力问题的解析解未曾见过. 动力问题要比文献[8]中的静力问题难度大得多, 其原因在于很难寻找一个既满足板稳态振动控制方程及四边自由边界条件的挠度函数表达式, 又要正确反映土与基础之间的相互作用规律. 虽然现在有许多大型商用软件可以求取弹性地基上四边自由矩形板问题的数值解<sup>[7]</sup>, 但是在许多情况下这个问题的解析解还是很有必要研究的<sup>[9]</sup>.

本文将弹性半空间地基受任意竖向简谐荷载作用下的积分变换解<sup>[5]</sup>, 与四边自由矩形板的振动解析解相结合, 得出弹性半空间地基上四边自由矩形板稳态振动的解析解.

## 1 直角坐标系下弹性半空间地基稳态动力响应通解

受任意简谐荷载作用, 地基的稳态位移分别为  $ue^{i\omega t}$ ,  $ve^{i\omega t}$  和  $we^{i\omega t}$ , 由文献[5]知地基位移

\* 收稿日期: 2006\_01\_17; 修订日期: 2006\_11\_11

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目(2006D23)

作者简介: 王春玲(1964—), 女, 陕西礼泉人, 副教授, 博士生(联系人. Tel: + 86\_29\_82202222; E\_mail: wangchunlingjd@sina.com).

积分变换解为

$$\begin{cases} u = F^{-2} \left[ i \xi \frac{A}{k^2} e^{-q_1 z} + B e^{-q_2 z} \right], \\ v = F^{-2} \left[ i \eta \frac{A}{k^2} e^{-q_1 z} + C e^{-q_2 z} \right], \\ w = F^{-2} \left[ q_1 \frac{A}{k^2} e^{-q_1 z} - \frac{i}{q_2} (\xi B + \eta C) e^{-q_2 z} \right], \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $q_1^2 = \xi^2 + \eta^2 - k^2$ ,  $q_2^2 = \xi^2 + \eta^2 - l^2$ ,  $l^2 = \rho \omega^2 / \mu$ ,  $k^2 = \omega^2 \rho / (\lambda + 2\mu)$ ,  $\rho$  是地基密度, 待定函数  $A(\xi, \eta)$ ,  $B(\xi, \eta)$  和  $C(\xi, \eta)$  宜结合地基边界条件确定.

假设地基与基础之间无摩擦, 那么地基表面的边界条件可写成

$$\begin{cases} \sigma_x(x, y, 0) = \sigma_y(x, y, 0) = 0 & (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty), \\ \sigma_z(x, y, 0) = \begin{cases} -F_z(x, y) & (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b), \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

这里,  $F_z(x, y)$  是地基反力幅值. 由弹性力学位移与应力的关系<sup>[5]</sup>可得

$$\begin{cases} \sigma_x(x, y, 0) = -\mu F^{-2} \left[ \frac{2iq_1 \xi}{k^2} A + \frac{1}{q_2} (\xi^2 + q_2^2) B + \frac{\xi \eta}{q_2} C \right] = 0, \\ \sigma_y(x, y, 0) = -\mu F^{-2} \left[ \frac{2iq_1 \eta}{k^2} A + \frac{\xi \eta}{q_2} B + \frac{1}{q_2} (\eta^2 + q_2^2) C \right] = 0, \\ \sigma_z(x, y, 0) = -\mu F^{-2} \left[ (2q_2^2 + l^2) \frac{A}{k^2} - 2i(\xi B + \eta C) \right] = -F_z(x, y). \end{cases} \quad (3)$$

因为

$$F^2[\sigma_z(x, y, 0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -F_z(x, y) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy = -F_z(\xi, \eta), \quad (4)$$

给(3)式两边做双重 Fourier 变换, 并结合(4)式可以解出待定系数  $A$ 、 $B$ 、 $C$ , 并将其代入竖向位移  $w$  的积分变换解, 可得地基表面竖向位移

$$w|_{z=0} = -\frac{1}{\mu} \frac{q_1 l^2}{F(\xi, \eta)} F_z(\xi, \eta), \quad (5a)$$

或

$$w|_{z=0} = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_1 l^2}{F(\xi, \eta)} F_z(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (5b)$$

式中,  $F(\xi, \eta) = [2(\xi^2 + \eta^2) - l^2]^2 - 4q_1 q_2 (\xi^2 + \eta^2)$  是 Rayleigh 函数.

## 2 弹性半空间地基上四边自由矩形板的稳态振动

### 2.1 动力方程与边界条件

边长分别为  $a$  和  $b$  的矩形弹性薄板支承在弹性半空间地基的表面上. 假设矩形薄板与地基之间为光滑接触. 板的 Poisson 比为  $\nu$ , 面密度为  $m$ , 弯曲刚度为  $D$ . 设板受到任意简谐激励  $q(x, y) e^{i\omega t}$  作用, 地基作用于板的竖向反力为  $F_z(x, y) e^{i\omega t}$ ,  $\omega$  为激励的圆频率. 矩形薄板的动力方程可表示为

$$D \nabla^4 W(x, y) - m \omega^2 W(x, y) = q(x, y) - F_z(x, y), \quad (6)$$

式中,  $\nabla^4 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  和  $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$ . 板的内力幅值可以用挠度函数幅值表示为

$$\begin{cases} M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right], & M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right], \\ M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \\ Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W, & Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W. \end{cases} \quad (7)$$

边界条件可表示为

$x = 0, a$  时:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0; \quad (8b)$$

$y = 0, b$  时:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad (8c)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} = 0; \quad (8d)$$

角点处:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0. \quad (8e)$$

## 2.2 方程求解

为了在边界条件(8a)~(8e)下求解(6)式,将挠度幅值设为带有补充项的双重余弦级数<sup>[8]</sup>

$$\begin{aligned} W = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (2-\nu) \frac{m^2 \pi^2 b^2}{a^2} \frac{4by^3 - 4b^2 y^2 - y^4}{24b^4} + \right. \\ & \left. \frac{2by - y^2}{2b^2} \right\} C_m + \left\{ (2-\nu) \frac{m^2 \pi^2 b^2}{a^2} \frac{y^4 - 2b^2 y^2 + y^2}{24b^4} + \frac{y^2}{2b^2} \right\} D_m \Big\} \cos \frac{m\pi x}{a} + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (2-\nu) \frac{n^2 \pi^2 a^2}{b^2} \frac{4ax^3 - 4a^2 x^2 - x^4}{24a^4} + \frac{2ax - x^2}{2a^2} \right\} G_n + \\ & \left. \left\{ (2-\nu) \frac{n^2 \pi^2 a^2}{b^2} \frac{x^4 - 2a^2 x^2 + x^2}{24a^4} + \frac{x^2}{2a^2} \right\} H_n \right\} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (9) \end{aligned}$$

式中,  $w_{mn}, C_m, D_m, G_n, H_n$  均为待定系数. 不难验证, (9)式对四边自由矩形板具有4阶连续可导性,且自动满足边界条件(8b)、(8d)、(8e)式. 将荷载以及  $F_z(x, y)$  也展为双重余弦级数

$$q(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} q_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (10a)$$

$$F_z(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} Q_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (10b)$$

式中,

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} 1/4, & \text{当 } m = n = 0, \\ 1/2, & \text{当 } m = 0, n > 0 \text{ 或 } m > 0, n = 0, \\ 1, & \text{当 } m > 0, n > 0; \end{cases} \quad (11)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad (12a)$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a F_z(x, y) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (12b)$$

将(9)式、(10)式代入基本微分方程(6)式,采用文献[10]中的方法,将补充项中含有的多项式,展为余弦级数,然后对比(6)式两边展式相应项的系数得

$$\begin{aligned}
 & D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 w_{mn} + 2D \left[ (2-\nu) b^2 \alpha_m^6 \left( \frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} - \frac{h_n}{90} \right) + \alpha_m^4 \left( \frac{3-2\nu}{\beta_n^2 b^2} h_n + \frac{h_n}{6} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{\nu \alpha_m^2}{2b^2} h_n \right] C_m + 2D \left[ (2-\nu) b^2 \alpha_m^6 \left( \frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} + \frac{7h_n}{720} \right) + \right. \\
 & \left. \alpha_m^4 \left( \frac{3-2\nu}{\beta_n^2 b^2} h_n - \frac{h_n}{12} \right) + \frac{\nu \alpha_m^2}{2b^2} h_n \right] (-1)^{n+1} D_m + \\
 & 2D \left[ (2-\nu) a^2 \beta_n^6 \left( \frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} - \frac{h_m}{90} \right) + \beta_n^4 \left( \frac{3-2\nu}{\alpha_m a^2} h_m + \frac{h_m}{6} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{\nu \beta_n^2}{2a^2} h_m \right] G_n + 2D \left[ (2-\nu) a^2 \beta_n^6 \left( \frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} + \frac{7h_m}{720} \right) + \right. \\
 & \left. \beta_n^4 \left( \frac{3-2\nu}{\alpha_m a^2} h_m - \frac{h_m}{12} \right) + \frac{\nu \beta_n^2}{2a^2} h_m \right] (-1)^{m+1} H_n - m \omega^2 w_{mn} - \\
 & 2m \omega^2 \left[ (2-\nu) b^2 \alpha_m^2 \left( \frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} - \frac{h_n}{90} \right) - \frac{h_n}{\beta_n^2 b^2} + \frac{h_n}{6} \right] C_m - \\
 & 2m \omega^2 \left[ (2-\nu) b^2 \alpha_m^2 \left( \frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} + \frac{7h_n}{720} \right) - \frac{h_n}{\beta_n^2 b^2} - \frac{h_n}{12} \right] (-1)^{n+1} D_m - \\
 & 2m \omega^2 \left[ (2-\nu) a^2 \beta_n^2 \left( \frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} - \frac{h_m}{90} \right) - \frac{h_m}{\alpha_m^2 a^2} + \frac{h_m}{6} \right] G_n - \\
 & 2m \omega^2 \left[ (2-\nu) a^2 \beta_n^2 \left( \frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} + \frac{7h_m}{720} \right) - \frac{h_m}{\alpha_m^2 a^2} - \frac{h_m}{12} \right] (-1)^{m+1} H_n = \\
 & \lambda_{mn} (q_{mn} - Q_{mn}) \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots), \tag{13}
 \end{aligned}$$

式中,  $\alpha_m = m\pi/a$ ,  $\beta_n = n\pi/b$ , 当  $i = 0$  时,  $h_i$  取值为 0,  $h_i$  取值为 1; 当  $i \neq 0$  时,  $h_i$  取值为 1,  $h_i$  取值为 0.

在  $x = 0$  边上,  $M_x = 0$ , 其余弦级数的每一项系数必须均为 0, 得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) w_{mn} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (2-\nu) b^2 \alpha_m^4 \left( \frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} - \frac{h_n}{90} \right) - \right. \\
 & \left. \alpha_m^2 \left[ \frac{(1-\nu)^2}{\beta_n^2 b^2} h_n - \frac{h_n}{6} \right] + \frac{\nu h_n}{2b^2} \right\} C_m + \\
 & 2(-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (2-\nu) b^2 \alpha_m^4 \left( \frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} + \frac{7h_n}{720} \right) - \right. \\
 & \left. \alpha_m^2 \left[ \frac{(1-\nu)^2}{\beta_n^2 b^2} h_n + \frac{h_n}{12} \right] + \frac{\nu h_n}{2b^2} \right\} D_m + \left( \frac{2-\nu}{3} \beta_n^2 + \frac{1}{a^2} \right) G_n + \\
 & \left( \frac{2-\nu}{6} \beta_n^2 - \frac{1}{a^2} \right) H_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{14}
 \end{aligned}$$

由  $x = a$  边上,  $M_x = 0$ , 得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) w_{mn} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ (2-\nu) b^2 \alpha_m^4 \left( \frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} - \frac{h_n}{90} \right) - \right. \\
 & \left. \alpha_m^2 \left[ \frac{(1-\nu)^2}{\beta_n^2 b^2} h_n - \frac{h_n}{6} \right] + \frac{\nu h_n}{2b^2} \right\} C_m +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ (2-\nu) b^2 \alpha_m^4 \left[ \frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} + \frac{7h_n}{720} \right] - \right. \\
& \left. \alpha_m^2 \left[ \frac{(1-\nu)^2}{\beta_n^2 b^2} h_n + \frac{h_n}{12} \right] + \frac{Vh_n}{2b^2} \right\} D_m + \left[ -\frac{\nu(2-\nu)}{24} a^2 \beta_n^4 + \frac{2\nu-1}{3} \beta_n^2 + \frac{1}{a^2} \right] G_n + \\
& \left[ -\frac{\nu(2-\nu)}{24} a^2 \beta_n^4 + \frac{5\nu-4}{6} \beta_n^2 - \frac{1}{a^2} \right] H_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (15)
\end{aligned}$$

用相同的方法, 由  $y = 0$  和  $y = b$  边上,  $M_y = 0$ , 得

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n^2 + \nu \alpha_m^2) w_{mn} + \left[ \frac{2-\nu}{3} \alpha_m^2 + \frac{1}{b^2} \right] C_m + \left[ \frac{2-\nu}{6} \alpha_m^2 - \frac{1}{b^2} \right] D_m + \\
& 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (2-\nu) a^2 \beta_n^4 \left[ \frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} - \frac{h_m}{90} \right] - \beta_n^2 \left[ \frac{(1-\nu)^2}{\alpha_m^2 a^2} h_m - \frac{h_m}{6} \right] + \right. \\
& \left. \frac{\nu h_m}{2a^2} \right\} G_n + 2(-1)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (2-\nu) a^2 \beta_n^4 \left[ \frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} + \frac{7h_m}{720} \right] - \right. \\
& \left. \beta_n^2 \left[ \frac{(1-\nu)^2}{\alpha_m^2 a^2} h_m + \frac{h_m}{12} \right] + \frac{\nu h_m}{2a^2} \right\} H_n = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\beta_n^2 + \nu \alpha_m^2) w_{mn} + \left[ -\frac{\nu(2-\nu)}{24} b^2 \alpha_m^4 + \frac{2\nu-1}{3} a^2 + \frac{1}{b^2} \right] C_m + \\
& \left[ -\frac{\nu(2-\nu)}{24} b^2 \alpha_m^4 + \frac{5\nu-4}{6} a^2 - \frac{1}{b^2} \right] D_m + \\
& 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ (2-\nu) a^2 \beta_n^4 \left[ \frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} - \frac{h_m}{90} \right] - \beta_n^2 \left[ \frac{(1-\nu)^2}{\alpha_m^2 a^2} h_m - \frac{h_m}{6} \right] + \right. \\
& \left. \frac{Vh_m}{2a^2} \right\} G_n + 2(-1)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ (2-\nu) a^2 \beta_n^4 \left[ \frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} + \frac{7h_m}{720} \right] - \right. \\
& \left. \beta_n^2 \left[ \frac{(1-\nu)^2}{\alpha_m^2 a^2} h_m + \frac{h_m}{12} \right] + \frac{\nu h_m}{2a^2} \right\} H_n = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)
\end{aligned}$$

若地基反力  $F_z(x, y)$  已知, 由(13)式至(17)式这5组方程可以联立求解各待定系数  $w_{mn}$ 、 $C_m$ 、 $D_m$ 、 $G_n$ 、 $H_n$ . 各系数求得之后代回(9)式中得挠度, 进一步可求得弯矩等内力. 由(10b)式可以求得

$$F_z(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} Q_{mn} \frac{[e^{i\xi a} (-1)^m - 1][(-1)^n e^{i\eta b} - 1]}{\xi \eta [1 - (m\pi/(a\xi))^2][1 - (n\pi/(b\eta))^2]}. \quad (18)$$

将  $w|_{z=0}$  看成是区域  $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  上的函数, 当然能在区域  $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  上, 将其展成双重余弦级数

$$w|_{z=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} w_{zmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (19)$$

$$w_{zmn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b w|_{z=0} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (20)$$

利用(5b)式及(18)式,  $w_{zmn}$  可表示成

$$w_{zmn} = -\frac{l^2}{\pi^2 \mu ab} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} Q_{pq} \lambda_{pq} \eta_{pqmn}, \quad (21)$$

$$\eta_{pqmn} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_1}{F(\xi, \eta)} \left\{ [(-1)^p e^{i\xi a} - 1][(-1)^q e^{i\eta b} - 1] \times \right. \\
\left. [(-1)^m e^{-i\xi a} - 1][(-1)^n e^{-i\eta b} - 1] \right\} \times$$

$$\left\{ \xi^2 \eta^2 [1 - (m\mathcal{V}(a\xi))^2] [1 - (n\mathcal{V}(b\eta))^2] \times [1 - (p\mathcal{V}(a\xi))^2] [1 - (q\mathcal{V}(b\eta))^2] \right\}^{-1} d\xi d\eta.$$

采用文献[11]中的方法,将板的挠度幅值(9)式也展成同样形式的双重余弦级数.由于矩形薄板的竖向挠度幅值与地基表面的竖向位移幅值相等,因此其对应项的系数也相等.于是得以下变形协调方程

$$\begin{aligned} & - \frac{l^2}{\pi^2 \mu a b} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} Q_{pq} \lambda_{pq} \eta_{pqmn} \lambda_{mn} = \\ & w_{mn} + 2 \left[ (2 - \nu) b^2 \alpha_m^2 \left( \frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} - \frac{h_n}{90} \right) - \frac{h_n}{\beta_n^2 b^2} + \frac{h_n}{6} \right] C_m + \\ & 2 \left[ (2 - \nu) b^2 \alpha_m^2 \left( \frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} + \frac{7h_n}{720} \right) - \frac{h_n}{\beta_n^2 b^2} - \frac{h_n}{12} \right] (-1)^{n+1} D_m + \\ & 2 \left[ (2 - \nu) a^2 \beta_n^2 \left( \frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} - \frac{h_m}{90} \right) - \frac{h_m}{\alpha_m^2 a^2} + \frac{h_m}{6} \right] G_n + \\ & 2 \left[ (2 - \nu) a^2 \beta_n^2 \left( \frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} + \frac{7h_m}{720} \right) - \frac{h_m}{\alpha_m^2 a^2} - \frac{h_m}{12} \right] (-1)^{m+1} H_n. \end{aligned} \quad (22)$$

(13)式至(17)式以及(22)式这6组方程,即为弹性半空间地基上矩形薄板振动的控制方程,联立可求解各待定系数 $w_{mn}$ 、 $Q_{mn}$ 、 $C_m$ 、 $D_m$ 、 $G_n$ 、 $H_n$ .设 $m$ 和 $n$ 分别取到最大值 $M$ 和 $N$ ,则共有 $2(M+1)(N+1) + 2(M+1) + 2(N+1)$ 个方程,用以解相同数目的未知数.各系数求得之后代回(9)式,得板的挠度幅值,进一步可求得弯矩内力幅值.当然也能计算出地基反力幅值.注意这里的动力问题计算要比文献[8]中的静力问题计算难度大得多,因为此时 $\eta_{pqmn}$ 的无穷积分表达式既具有振荡性又具有奇异性,其计算参阅文献[11].

### 3 数值算例及参数影响分析

#### 3.1 数值算例

考虑一支承在弹性半空间地基表面,边长为 $a = 4\text{ m}$ 、厚度为 $h = 0.2\text{ m}$ 的弹性方薄板的振动.假设板与地基之间为光滑接触.地基Poisson比为0.25,密度 $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$ ,弹性模量 $E_s = 50\text{ MPa}$ ;板的Poisson比为 $\nu = 0.167$ ,板的密度为 $2550\text{ kg/m}^3$ ,弹性模量 $E = 30\text{ GPa}$ .在板上作用均布简谐激励荷载,其幅值为 $100\text{ kPa}$ ,频率为 $f = 10\text{ Hz}$ .用本文方法求得板的挠度幅值、内力幅值及板与地基之间的接触反力幅值的分布规律分别如图1~图6所示.

#### 3.2 参数影响分析

##### 3.2.1 板的挠度幅值、地基反力幅值与 $h/a$ 的关系

图7、图8分别给出不同 $h/a$ 时,板的挠度幅值及地基压力幅值沿板中心线的变化曲线.由图7可见,随着板厚 $h$ 与板长 $a$ 的比值 $h/a$ 的增大,板的中心沉降减小.由图8可见,随着比值 $h/a$ 的增大,板边应力集中程度也就越大,而当 $h/a$ 较小时,地基压力近似均匀分布.

##### 3.2.2 板的挠度幅值、地基反力幅值与 $E_s/E$ 的关系

图9、图10分别给出了不同 $E_s/E$ 时,板的挠度幅值及地基压力幅值沿板中心线的变化情况.由图9可见,随着地基弹性模量 $E_s$ 与板弹性模量 $E$ 的比值 $E_s/E$ 的减小,板的变形越大,也就是说地基越松软,板的变形就越大;由图10可见,随着比值 $E_s/E$ 的减小,板边应力集中程度也就越大,也就是说板刚性较大时,板边应力集中程度就越大.

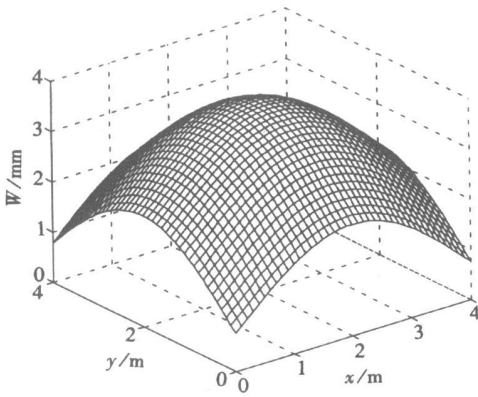


图1 弹性半空间地基板的挠度幅值

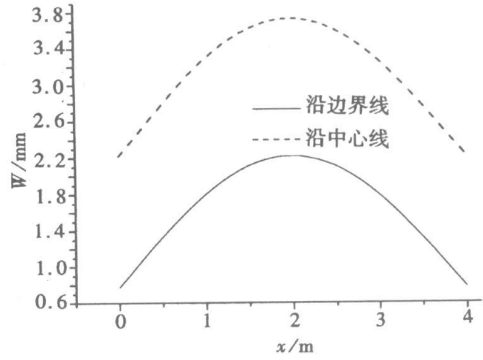


图2 沿板中心线和边界线的挠度幅值

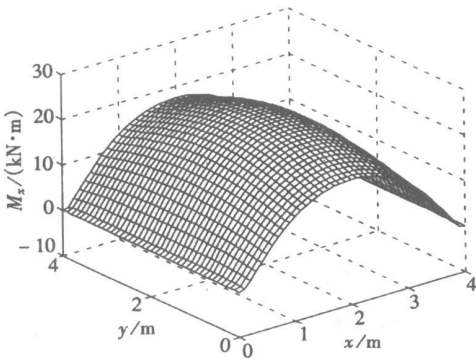
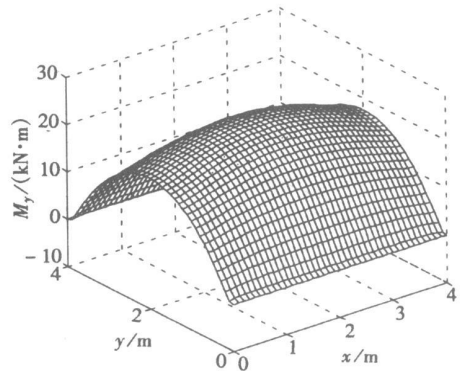
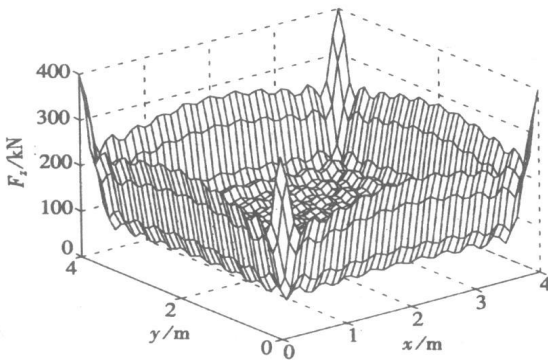
图3 弹性半空间地基板的弯矩  $M_x$  幅值图4 弹性半空间地基板的弯矩  $M_y$  幅值

图5 接触压力幅值

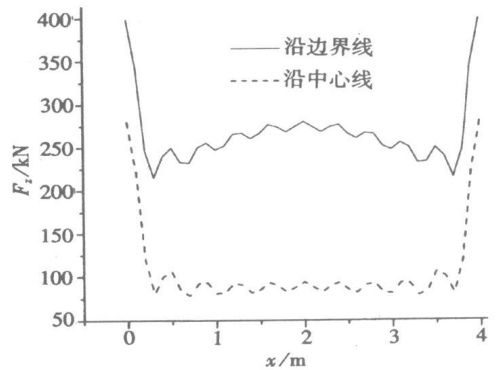


图6 沿板中心线和边界线的接触压力幅值

### 3.2.3 结果分析与比较

3.2.1 和 3.2.2 节中给出的结论, 不仅与双参数地基模型的相应结论吻合, 而且也与土动力学的实测结果一致, 但与 Winkler 地基模型的相应结论有差异. 如果采用 Winkler 地基模型, 板受均匀简谐荷载时, 不论板的刚度如何, 板均匀沉陷, 地基反力也是均匀分布的. 因此可见弹性半空间地基模型比 Winkler 地基模型要优越.

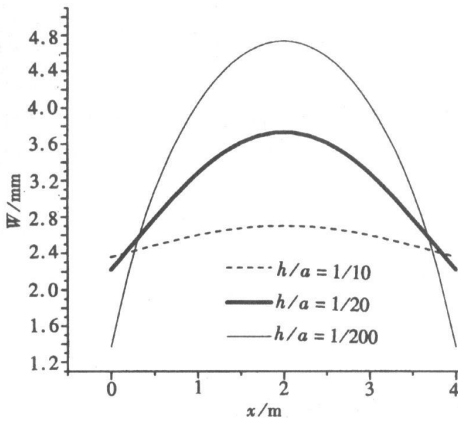


图7 沿板中心线的挠度幅值

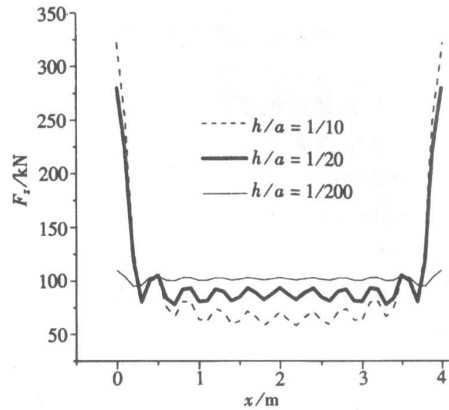


图8 沿板中心线的基底压力幅值

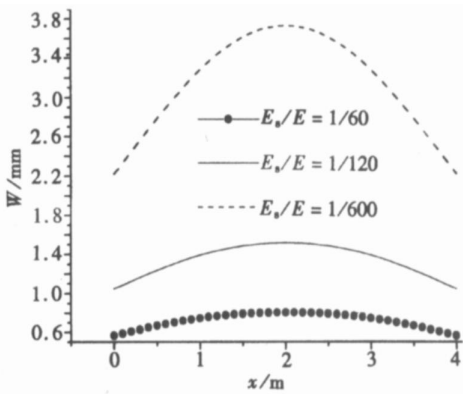


图9 沿板中心线的挠度幅值

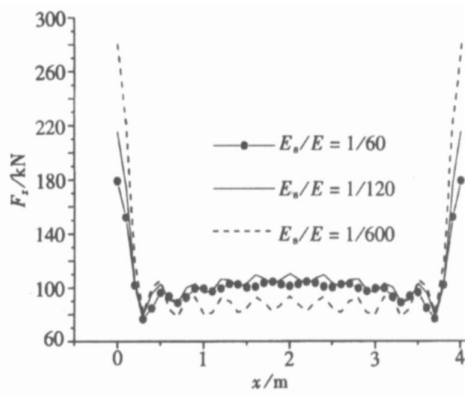


图10 沿板中心线的基底压力幅值

## 4 结 论

本文将弹性半空间地基受任意竖向稳态荷载作用下的积分变换解与四边自由矩形板的振动解析解相结合, 得出弹性半空间地基上四边自由矩形板稳态振动的解析解, 包括板的挠度幅值、内力幅值及板与地基之间的接触反力幅值; 全面分析了板的挠度幅值、板与地基之间的接触反力幅值的分布规律与板、地基的一些物理参数、几何尺寸的关系。这不仅克服了数值法的一些弊端, 同时取消了 Winkler 地基模型或双参数地基模型的假设, 从而得到板的内力幅值及板与地基之间接触反力幅值更合理、更精确的分布规律。

### [参 考 文 献]

- [1] 阎红梅, 崔维成, 刘应中. 弹性地基四边自由矩形板问题的一种新型挠度函数[J]. 船舶力学, 2003, 7(2): 61\_70.
- [2] Sivadurai A P S. Elastic Analysis of a Soil-Structure Interaction [M]. New Jersey: Preenice\_Hall, 1978.
- [3] 王克林, 黄义. 弹性地基上四边自由矩形板[J]. 计算结构力学及其应, 1985, 2(2): 47\_58.
- [4] 生跃, 黄义. 双参数弹性地基上自由边矩形板[J]. 应用数学和力学, 1987, 8(4): 317\_329.
- [5] 李刚, 王贻荪, 尚守平. 弹性半空间上矩形基础稳态振动积分变换解[J]. 湖南大学学报, 2000, 27



- (4): 88\_93.
- [6] 曲传军, 曹志远. 矩形基础与无限层土地基的动力相互作用分析[J]. 建筑结构学报, 1988, 9(6): 66\_74.
- [7] 王元汉, 邱先敏, 张佑启. 弹性地基板的等参有限元法计算[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(4): 7\_11.
- [8] 王春玲, 黄义. 弹性半空间地基上四边自由矩形板的弯曲解析解[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(12): 1402\_1407.
- [9] Taylor R Eatock, Ohkusu M. Green function for hydroelastic analysis of vibrating free-free beams and plates[J]. Applied Ocean Research, 2000, 22(5): 295\_314.
- [10] 严宗达. 结构力学中的富里叶级数解法[M]. 天津: 天津大学出版社, 1989.
- [11] Davis P J, Rabinowitz P. 数值积分方法[M]. 冯振兴, 伍富良 译. 北京: 高等教育出版社, 1986.

## Analytical Solutions of Steady Vibration of a Free Rectangular Plate on the Semi-Infinite Elastic Foundation

WANG Chun\_ling<sup>1</sup>, HUANG Yi<sup>1</sup>, JIA Ji\_hong<sup>2</sup>

(1. School of Science, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, P. R. China;

2. School of Software, Dongguan University of Technology, Dongguan, Guangdong 523808, P. R. China)

**Abstract:** The method of double Fourier transform was employed in the analysis of the semi-infinite elastic foundation with vertical load. And an integral representations for the displacements of the semi-infinite elastic foundation was presented. The analytical solution of steady vibration of an elastic rectangle plate with four free edges on the semi-infinite elastic foundation was also given by combining the analytical solution of the elastic rectangle plate with the integral representation for displacements of the semi-infinite elastic foundation. Some computational results and the analysis of the parameters influence were presented.

**Key words:** semi-infinite elastic foundation; rectangular plate with four free edges; steady vibration; interaction; analytical solution