

连续动力系统的广义同步^{*}

张 刚^{1,3}, 刘曾荣², 马忠军³

- (1. 石家庄学院 数学系, 石家庄 050035;
2. 上海大学 系统生物技术研究所, 上海 200444;
3. 上海大学 理学院, 上海 200444)

(本刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 讨论连续的混沌动力系统之间的广义同步. 利用 Liapunov 稳定性理论, 通过构造适当的耦合项, 得到了一个关于驱动响应系统广义同步的充分条件. 并通过对两个例子的数字模拟, 说明了充分条件的有效性.

关键词: 广义同步; 可微的广义同步; Liapunov 函数

中图分类号: O231.2 **文献标识码:** A

引 言

同步是一个普遍存在的现象. 1990 年, Pecora 和 Carroll^[1]发表了关于混沌系统同步的开创性工作. 从此, 混沌系统的同步问题逐渐成为非线性科学研究领域中最受人关注的问题之一. 科学家们做了大量的工作, 许多不同类型的同步相继被发现和研究, 其中主要包括: 完全同步 (complete synchronization)^[1]、聚类同步 (cluster synchronization)^[2]、相同步 (phase synchronization)^[3]、滞后同步 (lag synchronization)^[4]和广义同步 (generalized synchronization)^[5,8], 等.

然而, 除两个相同系统的完全同步以外, 对其他类型同步的研究还缺乏理论结果和可操作的办法, 尤其对于动力学性质最为复杂的广义同步, 理论结果更是少之又少. 但是, 无论在自然界还是在科技应用领域, 广义同步的现象是广泛存在的^[9], 对广义同步的研究是非常重要的和极其迫切的. 最近, 我们在文献[10]和[11]中基于自适应的思想提出了一系列讨论广义同步问题的新观点, 为此类问题的解决提供了新的思路. 与以往的关于广义同步的研究不同, 本文利用自适应的思想, 讨论了两个单向耦合连续系统的广义同步. 通过构造适当的耦合项, 我们得到了一个关于单向耦合连续系统广义同步的充分条件. 最后, 我们通过两个例子说明我们的结果是可行的.

* 收稿日期: 2005_03_18; 修订日期: 2006_11_30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10672093; 10372054; 70431002)

作者简介: 张刚 (1970—), 男, 河北新乐人, 副教授 (Tel: + 86_311_86050493; E-mail: gzhang_math@163.com);

刘曾荣 (1943—), 男, 教授, 博士生导师 (联系人, Tel: + 86_21_56779234;

E-mail: zrongliu@online.sh.cn).

1 理论结果

考虑下面两个单向耦合系统

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

$$\dot{y} = g(y) + u(x, y, \epsilon), \quad (2)$$

$\Omega_1 \subset R^n$ 是系统(1)的不变区域, $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset R^n \times R^n$ 是系统(2)的不变区域, Ω_2 是 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 在 R^n 上的投影, $u(y, x, \epsilon)$ 表示耦合项, ϵ 是代表耦合强度的参数.

令 $x(t, x_0)$ 和 $y(t, x_0, y_0)$ 是系统(1)和系统(2)的解, 其中 x_0 和 y_0 为初始值. $\|\cdot\|$ 表示 R^n 上的向量范数或者与之相容的 $R^{n \times n}$ 上的矩阵范数. 在本文中, 我们选择 2 -范数作为向

量范数: 对于 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$, 选择 m_∞ -范数作为矩阵范数: 对于 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in R^{n \times n}$, $\|A\| = n \max_{i,j} |a_{ij}|$. 众所周知, 矩阵的 m_∞ -范数与向量的 2 -范数是相容的, 即对任意 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in R^{n \times n}$ 和 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ 都有 $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$. 下面, 我们给出关于完全同步和广义同步的相关定义.

定义 1 系统(1)与系统(2)称为在 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 内是完全同步的(CS), 若 $\forall x_0 \in \Omega_1, y_0 \in \Omega_2$, 系统(1)与系统(2)的解的长期行为具有如下性质:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, x_0, y_0) - x(t, x_0)\| = 0. \quad (3)$$

定义 2 系统(1)与系统(2)称为在 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 内是广义同步的(GS), 若存在连续变换 $\phi: R^n \rightarrow R^n$ 使得 $\forall x_0 \in \Omega_1, y_0 \in \Omega_2$, 系统(1)与系统(2)的解的长期行为具有如下性质:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, x_0, y_0) - \phi(x(t, x_0))\| = 0. \quad (4)$$

事实上, 完全同步可以被看作广义同步的特殊情形(只要令 $\phi = I$, I 为恒同变换). 根据变换 ϕ 的数学性质的不同, 我们可以对广义同步做许多分类^[12]. 其中之一, 当 ϕ 在相应的定义域连续可微时, 我们称这种广义同步为可微的广义同步(DGS). 这里, 我们将讨论可微的广义同步.

为了研究系统(1)和系统(2)的广义同步, 我们令 $e(t) = y(t) - \phi(x(t))$ 为系统(1)和系统(2)的广义同步误差, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别为系统(1)和系统(2)在 t 时刻的状态. 误差 e 的演化系统由下式给出:

$$\dot{e} = y' - \phi'(x) = g(y) + u(x, y, \epsilon) - D\phi(x)f(x), \quad (5)$$

其中 $D\phi(x)$ 是向量函数 $\phi(x)$ 的 Jacobi 矩阵.

很容易证明性质(4)与系统(5)的零解渐近稳定性是充分必要的关系. 因此, 我们可以通过研究系统(5)的零解渐近稳定性来讨论系统(1)和系统(2)的广义同步. 一个系统的零解渐近稳定性通常用 Liapunov 函数的方法来分析. 对于系统(5), Liapunov 函数 $V(e)$ 可以被定义为具有下面性质的连续可微实值函数: $V(e) > 0$, 当 $e \neq 0$; $V(e) = 0$, 当 $e = 0$. 如果沿着系统(5)的轨道对 $V(e)$ 求导满足 $\dot{V}(e) < 0$ 当 $e \neq 0$, 则系统(5)的零解是渐近稳定的, 也就是系统(1)和系统(2)实现了广义同步.

定理 1 若 g 满足 Lipschitz 条件(Lipschitz 常数为 L), 存在连续可微的变换 $\phi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, 使得 $\forall x \in \Omega_1$ 有 $\exists K > 0$, 满足

$$\|g(\phi(x)) - D\phi(x)f(x)\| \leq K. \quad (6)$$

取耦合项 $u = \epsilon(\phi(x) - y) + \left[1 - \|e\|/\epsilon\right](D\phi(x)f(x) - g(\phi(x)))(\epsilon > 0)$, 则当 $\epsilon > (L\sqrt{n} + \sqrt{L^2 n + 4K\sqrt{n}})/2$ 时, 系统(1)与系统(2)在 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 内是广义同步的.

证明

$$\begin{aligned} \dot{e} &= y - \phi(x) = g(y) + \epsilon(\phi(x) - y) + \\ & (1 - (\|e\|/\epsilon))(D\phi(x)f(x) - g(\phi(x))) - D\phi(x)f(x), \end{aligned}$$

选择 Liapunov 函数 $V(e) = e^T e/2$, 沿着式(5) 的轨道对 $V(e)$ 求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T \dot{e} = \\ & e^T [g(y) + \epsilon(\phi(x) - y) + (1 - \|e\|/\epsilon)(D\phi(x)f(x) - \\ & g(\phi(x))) - D\phi(x)f(x)] = \\ & e^T [g(y) - g(\phi(x)) + g(\phi(x)) + \epsilon(\phi(x) - y) + \\ & (1 - \|e\|/\epsilon)(D\phi(x)f(x) - g(\phi(x))) - D\phi(x)f(x)] = \\ & e^T [g(y) - g(\phi(x))] + e^T (\|e\|/\epsilon)[g(\phi(x)) - D\phi(x)f(x)] + \\ & e^T [\epsilon(\phi(x) - y)] = \\ & \sum_{i=1}^n e_i [g_i(y) - g_i(\phi(x))] + \\ & \frac{\|e\|}{\epsilon} \sum_{i=1}^n e_i [g_i(\phi(x)) - D\phi_i(x)f_i(x)] - \epsilon e^T e \leq \\ & L\|e\| \sum_{i=1}^n e_i + \frac{K}{\epsilon} \|e\| + \|e\| \sqrt{n} \|e\| - \epsilon \|e\|^2 \leq \\ & L\|e\| \sqrt{n} \|e\| + (K/\epsilon) \sqrt{n} \|e\|^2 - \epsilon \|e\|^2 = \\ & \left(L\sqrt{n} + (K/\epsilon) \sqrt{n} - \epsilon \right) \|e\|^2, \end{aligned}$$

可知, 若 $L\sqrt{n} + K\sqrt{n}/\epsilon - \epsilon < 0$, $\dot{V}(e) < 0$. 因此, $\epsilon > (L\sqrt{n} + \sqrt{L^2 n + 4K\sqrt{n}})/2$ 时, DGS 发生. □

2 定理的应用

例 1 我们选择系统(1) 和系统(2) 为两个相同的 Lorenz 系统. Lorenz 系统描述如下:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) \\ \alpha x_1 - x_1 x_3 - x_2 \\ x_1 x_2 - b x_3 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

当 $a = 10, b = 8/3, c = 28$ 时, Lorenz 系统有奇怪吸引子. 人们已经对 Lorenz 系统进行了大量的研究, 发现了许多重要的结果. 其中之一, Lorenz 系统存在一个包含 Lorenz 吸引子的有界区域 $D \subset R^3$ 使得以 D 内的点为初始点的轨道不会离开它^[13].

$$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a - c)^2 \leq M \right\},$$

其中

$$M = \frac{b^2(a+c)^2}{4(b-1)}. \tag{8}$$

可见, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in D$ 满足 $|x_1| < \sqrt{M}, |x_2| < \sqrt{M}, a + c - \sqrt{M} < x_3 < a + c + \sqrt{M}$.

考虑下面两个单向耦合的相同的 Lorenz 系统

$$\dot{x} = f(x), \tag{9}$$

$$\dot{y} = f(y) + \epsilon(\phi(x) - y) + \left(1 - (\|e\|/\epsilon)\right) (D\phi(x)f(x) - f(\phi(x))), \tag{10}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) \\ cx_1 - x_1x_3 - x_2 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix},$$

$a = 10, b = 8/3, c = 28, M = (b^2(a + c)^2)/(4(b - 1)) = 1540.27. D = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a - c)^2 \leq 1540.27\}$. 数字模拟显示 $D \times D$ 是系统(10)的不变区域, 这个结果与文献[14]的最终耗散的理论一致. 令 $\Omega = D$. 假设 $\phi^t(x)$ 是系统(9)的流. 令 $\phi = \phi^\tau(x): x(t) \mapsto x(t - \tau)$ (τ 为常数), 显然 ϕ 是连续可微的. 下面, 我们来验证系统(9)和系统(10)满足定理1的条件. $\forall x, y \in \Omega$,

$$f(x) - f(y) = \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) \\ cx_1 - x_1x_3 - x_2 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(y_2 - y_1) \\ cy_1 - y_1y_3 - y_2 \\ y_1y_2 - by_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - x_3 & -1 & -y_1 \\ x_2 & y_1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix} = A(x - y),$$

估计矩阵 A 的范数, 其中 $a = 10, b = 8/3, c = 28, \|A\| = n \max_{i,j} |a_{ij}| \leq 3 \sqrt{1540.27} \approx 117.74$. 令 $L = \|A\| = 117.74, \forall x, y \in \Omega$, 则 $\|f(x) - f(y)\| = \|A(x - y)\| \leq L \|x - y\|$. 因此, f 满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数为 $L = 117.74$.

$\forall x \in \Omega$, 若 $f(x) = 0, x$ 是系统(9)的平衡点, 则 $f(\phi(x)) - D\phi(x)f(x) = 0$. 假设

$$f(x) \neq 0, D\phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial(t - \tau)} \frac{\partial(t - \tau)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = f(x(t - \tau)) \frac{1}{f(x)},$$

则 $f(\phi(x)) - D\phi(x)f(x) = f(x(t - \tau)) - f(x(t - \tau))(1/f(x))f(x) = 0$. 因此 $K = 0$.

总之, 系统(9)和系统(10)满足定理1的条件. 由定理1, 当 $\epsilon > (L\sqrt{n} + \sqrt{L^2n + 4K\sqrt{n}})/2 = 117.74 \times \sqrt{3} \approx 203.93$ 时, 系统(9)和系统(10)的可微广义同步发生. 利用 matlab 进行数字模拟, 取 $x_0 = (1, 1, 1), y_0 = (2, 2, 2), \tau = 0.1, \epsilon = 205, e_i = y_i(t) - x_i(t - \tau)$, 其中 $i = 1, 2, 3$, 我们得到了例1的数字结果(见图1)与理论结果完全一致.

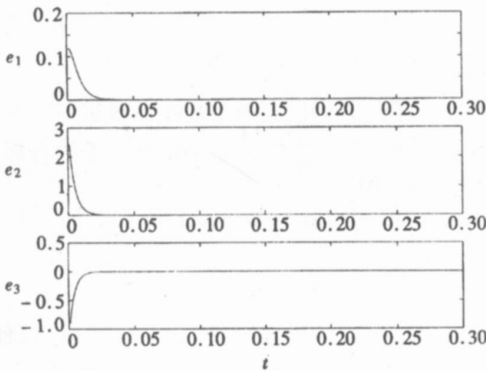


图1 例1中状态误差随时间的演化图

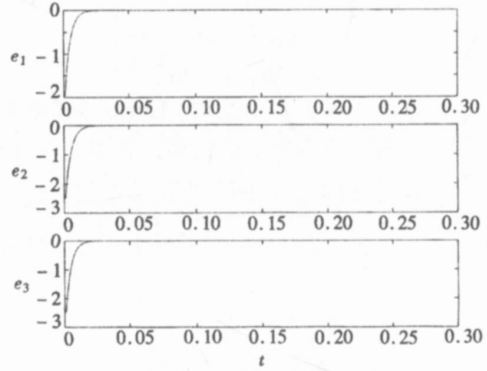


图2 例2中状态误差随时间的演化图

例2 考虑下面两个单向耦合的不同的 Lorenz 系统

$$\dot{x} = f(x), \tag{11}$$

$$\dot{y} = g(y) + \epsilon(\phi(x) - y) + (1 - \|e\|/\epsilon)(D\phi(x)f(x) - g(\phi(x))), \tag{12}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 10(x_2 - x_1) \\ 28x_1 - x_1x_3 - x_2 \\ x_1x_2 - (8/3)x_3 \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} 10(y_2 - y_1) \\ 30y_1 - y_1y_3 - y_2 \\ y_1y_2 - 3y_3 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \frac{(8/3)^2 \cdot 38^2}{4(8/3 - 1)} = 1\,540.27, \quad M_2 = \frac{3^2 \cdot 40^2}{4(3 - 1)} = 1\,800.$$

类似地可以选取, $D = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 38)^2 \leq 1\,540.27\}$, $D_2 = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1^2 + y_2^2 + (y_3 - 40)^2 \leq 1\,800\}$. 数字模拟显示 $D_1 \times D_2$ 是系统(12)的不变区域, 令 $\Omega_1 = D_1$, $\Omega_2 = D_2$.

令 $\phi: R^3 \rightarrow R^3$,

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

显然, $\phi(\Omega_1) \subset \Omega_1 \subset \Omega_2$. 下面, 我们来验证系统(11)和系统(12)满足定理1的条件. 由例1, 我们知道 g 满足 Lipschitz 条件(Lipschitz 常数 $L = 3 \times \sqrt{1\,800} \approx 127.28$).

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_1$,

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2/2 \\ x_3/2 \end{pmatrix},$$

$$D\phi(x)f(x) - g(\phi(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10(x_2 - x_1) \\ 30x_1 - x_1x_3 - x_2 \\ x_1x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10(x_2/2 - x_1) \\ 28x_1 - x_1x_3/2 - x_2/2 \\ x_1x_2/2 - (8/3)(x_3/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_2 \\ -13x_1 \\ -x_3/6 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\|D\phi(x)f(x) - g(\phi(x))\| =$$

$$\sqrt{(5x_2)^2 + (-13x_1)^2 + (-x_3/6)^2} \leq 510.20.$$

因此, 系统(11)和系统(12)满足定理1的条件. 由定理1, 当

$$\epsilon > (L\sqrt{n} + \sqrt{L^2n + 4K\sqrt{n}})/2 \approx 224.40$$

时, 系统(11)和系统(12)的可微广义同步发生. 利用 *matlab* 进行数字模拟, 取 $x_0 = (1, 1, 1)$, $y_0 = (3, 3, 3)$, $\epsilon = 225$, $e = y - \phi(x)$ ($e_1 = y_1(t) - x_1(t)$, $e_2 = y_2(t) - x_2(t)/2$, $e_3 = y_3(t) - x_3(t)/2$), 我们得到了例2的数字结果(见图2)与理论结果一致.

3 结 论

复杂系统中存在大量的同步现象, 它们主要表现为广义同步. 如何讨论广义同步是一件困难的事情, 这里我们给出了一个理论框架并通过构造适当的耦合项, 得到了一个关于单向耦合连续系统广义同步的充分条件. 从表面上看我们的耦合项和条件似乎太苛刻了, 但是如果注意到复杂系统的自适应所导致完全不同于技术系统的特征, 我们认为这样的耦合项是可以接受的. 对于定理中的条件, 数值上发现是很一般的, 如果注意到最终耗散的观点^[14], 我们认

为这些条件也是成立的.

[参 考 文 献]

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys Rev Lett, 1990, **64**(8): 821_824.
- [2] MA Zhong_jun, LIU Zeng_rong, ZHANG Gang. A new method to realize cluster synchronization in connected chaotic networks[J]. Chaos, 2006, **16**(2): 023103.
- [3] ZHENG Zhi_gang, HU Gang, HU Bambi. Phase slips and phase synchronization of coupled oscillators [J]. Phys Rev Lett, 1998, **81**(24): 5318_5321.
- [4] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators[J]. Phys Rev Lett, 1997, **78**(22): 4193_4196.
- [5] Yang S_S, Duan C_K. Generalized synchronization in chaotic systems[J]. Chaos, Solitons, Fractals, 1998, **9**(10): 1703_1707.
- [6] YANG Xiao_song. On concept of synchronization in dynamical systems[J]. Phys Lett A, 1999, **260**(5): 340_344.
- [7] ZHENG Zhi_gang, HU Gang. Generalized synchronization versus phase synchronization[J]. Phys Rev E, 2000, **62**(6): 007882.
- [8] ZHANG Gang, LIU Zeng_rong, MA Zhong_jun. Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems[J]. Chaos, Solitons Fractals, 2007, **32**(2): 773_779.
- [9] Boccaletti J, Kurths G, Osipov D L, et al. The synchronization of chaotic systems[J]. Physics Reports, 2002, **366**(1/2): 1_101.
- [10] 刘曾荣. 关于同步的几个理论问题[J]. 自然杂志, 2004, **26**(5): 298_300.
- [11] 刘曾荣. 用结构适应实现不同系统之间的完全同步[J]. 应用数学和计算数学学报, 2004, **18**(2): 68_72.
- [12] Hunt B R, Ott E, Yorke J A. Differentiable generalized synchronization of chaos[J]. Phys Rev E, 1997, **55**(4): 4029_4034.
- [13] Zhou T, L J, Chen G, et al. Synchronization stability of three chaotic systems with linear coupling [J]. Phys Lett A, 2002, **301**(3/4): 231_240.
- [14] Belykh I, Belykh V, Nevidin K, et al. Persistent clusters in lattices of coupled nonidentical chaotic systems[J]. Chaos, 2003, **13**(1): 165_178.

Generalized Synchronization of Continuous Dynamical System

ZHANG Gang^{1,3}, LIU Zeng_rong², MA Zhong_jun³

(1. Department of Mathematics, Shijiazhuang College,

Shijiazhuang 050035, P. R. China;

2. Institute of System Biology, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China;

3. College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China)

Abstract: Generalized synchronization between two continuous dynamical systems is discussed. By exploring the Liapunov stability theory and constructing appropriately unidirectional coupling term, a sufficient condition for determining the generalized synchronization between continuous systems was proved. Two examples are used to show the effectiveness of this result.

Key words: generalized synchronization; differentiable generalized synchronization; Liapunov function