文章编号: 1000_0887(2007) 01_0099_08　

带梯度吸收项的快扩散方程的自相似奇性解*

石佩虎,　王明新

(东南大学 数学系, 南京 210096)

(李继彬推荐)

摘要:　研究一类带有非线性梯度吸收项的快速扩散方程的自相似奇性解· 通过自相似变换, 该自相似奇性解满足一个非线性常微分方程的边值问题, 再利用打靶法技巧研究该常微分方程初值问题解的存在唯一性并根据初值的取值范围对其解进行了分类· 通过对这些解类的性质的分析研究, 得出了自相似强奇性解存在唯一性的充分必要条件, 此时自相似奇性解就是强奇性解·

关　键　词:　快扩散方程;　梯度吸收;　自相似奇性解;　强奇性解

中图分类号:　O175.26　　文献标识码:　A

引言和主要结论

本文研究含有梯度吸收项的快扩散方程

$$u_t = \Delta(u^m) - |\nabla u|^p, \qquad (x, t) \in R^n \times (0, \infty) \tag{1}$$

的自相似奇性解, 其中 $(1 - 2/n)_+ < m < 1 < p < 2$· 当 $m = 1$ 时, (1) 式称为 KPZ 方程, 它出现在曲面增长动力学问题中, 其详细背景可见文献[1]和文献[2]· 我们研究的是其渗流形式· 文献[3]和文献[4]给出了方程(1)当 $m \geqslant 1$ 时的研究结果· 所谓方程(1)的奇性解 u 是指在 $R^n \times [0, \infty) \setminus \{(0, 0)\}$ 上连续且满足

$$\lim_{t\to 0}\sup_{|x|>\varepsilon} u(x, t) = 0, \qquad \forall \varepsilon > 0 \tag{2}$$

的非平凡非负解· 若奇性解 $u(x, t)$ 还满足

$$\lim_{t\to 0}\int_{|x|<\varepsilon} u(x, t)\,\mathrm{d}x = \infty, \qquad \forall \varepsilon > 0, \tag{3}$$

则称其为强奇性解· 如果(3)式中的极限是正常数, 则称 u 为基本解· 具有下列形式

$$\begin{cases} u(x, t) = t^{-\alpha} v(|x| t^{-\beta}), \ \alpha = (2 - p)/[(3 - m)p - 2], \\ \beta = (p - m)/[(3 - m)p - 2] \end{cases} \tag{4}$$

的解 $u(x, t)$ 称为自相似解, 这里 $\alpha, \beta > 0$, 函数 $v(r)$ 定义在 $[0, \infty)$ 上且满足方程

$$(v^m)'' + \frac{n-1}{r}(v^m)' + \beta r v' + \alpha v - |v'|^p = 0, \qquad \forall r > 0, \tag{5}$$

其中 $r = |x| t^{-\beta}$ 为自相似变量· 若 $n\beta < \alpha$ 且奇性解是自相似的, 则(2)式变为 $\lim_{r\to\infty} r^{\alpha/\beta} v(r) = 0$ 且 $v \in L^1(0, \infty; r^{n-1}dr)$, 同时(3)式自动成立, 故 u 是自相似强奇性解·

---

* 收稿日期:　2004_05_28;　修订日期:　2006_10_09

基金项目:　国家自然科学基金资助项目(10471022); 教育部科学技术基金(重点)资助项目(104090)

作者简介:　石佩虎(1967—), 男, 湖南省花垣县人, 副教授, 博士(联系人. E_mail: sph2106@yahoo.com.cn)·

1983年Brezis和Friedman[5]首次证明当$1< p< 1+2/n$时对$\forall c>0$热方程$u_t=\Delta u-u^p$存在唯一的奇性解,且满足$u(\cdot,0)=c\delta(\cdot)$;当$p\geqslant 1+2/n$时无奇性解. 不久,Brezis等[6]又证明当$1<p<1+2/n$时该方程有唯一的强奇性解. 此后很多学者研究了下述方程

$$u_t=\Delta(u^m)-u^q,\quad 0<m<\infty,\ q>1,$$
$$u_t=\operatorname{div}(|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m)-u^q,\quad 0<m<\infty,\ p>1,\ q>1$$

的奇性解和强奇性解,得到许多好的研究结果(见文献[7]至文献[10]). 自相似解,奇性解和强奇性解还可用于刻划上述相应方程Cauchy问题解的大时间性态,见文献[11]至文献[14].

全文引入记号

$$\xi=(3-m)p-2,\quad \mu=2/(1-m)>n,$$
$$\theta=(1-m)p/m,\quad \eta=\mu-(\mu+1)p<0.$$

为了利用打靶法研究方程(1)的自相似奇性解,考虑初值问题

$$\begin{cases}(v^m)''+\dfrac{n-1}{r}(v^m)'+\beta rv'+\alpha v-|v'|^p=0, & r>0,\\ v(0)=a>0,\ v'(0)=0.\end{cases}\tag{6}$$

主要结果如下

定理1 假设$(1-2/n)_+<m<1<p<2$. 对任意$a>0$,设$v(r;a)=v(r)$为问题(6)的解,则存在$R(a)>0$使得在$(0,R(a))$上$v(r;a)>0$, $v'(r;a)<0$成立. 此外,还有以下结论

(Ⅰ) 若$n\beta\geqslant\alpha$,即$(2+mn)/(1+n)\leqslant p<2$,则$R(a)=\infty$且$\lim\limits_{r\to\infty}r^{\alpha/\beta}v(r;a)=k(a)>0$;

(Ⅱ) 若$n\beta<\alpha$,即$1<p<(2+mn)/(1+n)$,则存在唯一$a^*>0$及集合$\mathscr{A}=(0,a^*)$, $\mathscr{C}=(a^*,\infty)$使得

1) 当$a\in\mathscr{A}$时,$R(a)<\infty$并且$v(R(a),a)=0$, $(v^m)'(R(a);a)<0$;

2) 当$a=a^*$时,$R(a^*)=\infty$并且$\lim\limits_{r\to\infty}r^{\alpha/\beta}v(r;a^*)=0$;

3) 当$a\in\mathscr{C}$时,$R(a)=\infty$并且存在常数$k(a)>0$使得$\lim\limits_{r\to\infty}r^{\alpha/\beta}v(r;a)=k(a)$;

(Ⅲ) 上述(Ⅰ)和(Ⅱ)3)中的$k(a)$关于a连续,严格单增且$\lim\limits_{a\searrow 0}k(a)=0$或$\lim\limits_{a\searrow a^*}k(a)=0$, $\lim\limits_{a\nearrow\infty}k(a)=\infty$.

上述定理说明,方程(1)有自相似强奇性解$u(x,t)=t^{-\alpha}v(|x|t^{-\beta};a^*)$当且仅当$n\beta<\alpha$.

1 问题(6)的解的分类

对任意$a>0$,利用Banach不动点理可以证明问题(6)有唯一的局部解v,且$v(r)$在$r\in(0,r^*)$上满足$v(r)>0$, $v'(r)<0$,其中$r^*\ll 1$. 若$r_0\geqslant r^*$, $v(r_0)>0$,可以证明存在$\hat r>r_0$使得在$(0,\hat r]$上有$v(r)>0$, $v'(r)<0$. 记$R(a)=\sup\left\{r>0,\ |\ v(s)>0,\ s\in[0,r]\right\}$,则$[0,R(a))$是使$v(r)>0$的最大区间,且在$(0,R(a))$上$v'(r)<0$, $v\in C^\infty(0,R(a))$.

引理1.1 设v是问题(6)的解且$R(a)=\infty$. 则当$r\to\infty$时有$v(r)$, $v'(r)\to 0$.

证明 因为$v>0$且严格单减,所以$\lim\limits_{r\to\infty}v(r)=l\geqslant 0$. 记$E(r)=(1/2)|(v^m)'|^2+(m\alpha/(m+1))v^{m+1}$,直接计算知对任意$r>0$有$E'(r)<0$,故$0\leqslant E(r)\leqslant(m\alpha/(m+1))a^{m+1}$且$\lim_{r\to\infty}(v^m)'(r)=l_1\leqslant 0$. 再利用方程(6)得$l=l_1=0$. 由$m<1$得$\lim_{r\to\infty}v'(r)=0$.

证毕. □

引理 1.2 设 $v(r;a)$ 为问题(6) 的解, 则 $|v'(r)| \leqslant (a\alpha)^{1/p}$, $r \in (0, R(a))$.

证明 因为 $\lim_{r\to 0}(v^m)'' = -a\alpha/n < 0$, 所以存在 $\hat{r} > 0$ 使得 $(v^m)'' \leqslant 0$, $r \in [0, \hat{r}]$. 由方程(6) 知在$[0, \hat{r}]$ 上有 $\alpha v(r) - |v'(r)|^p \geqslant 0$, 即在 $[0, \hat{r}]$ 上结论成立; 若存在 $r' > \hat{r}$ 使得$(v^m)''(r') > 0$, 则存在 r_0 使得$(v^m)''(r_0) = 0$ 且当 $r \in (r_0, r')$ 时$(v^m)''(r) > 0$. 于是有 $|v'(r_0)| \leqslant (a\alpha)^{1/p}$ 和$(v^m)'(r_0) < (v^m)'(r') < 0$. 从而 $|v'(r')| < |v'(r_0)| \leqslant (a\alpha)^{1/p}$. 证毕. □

由问题(6), 在原点附近有 $v''(r) = -(\alpha/(mn))a^{2-m} + O(r)$, 于是当 $r \ll 1$ 时有 $v(r) = a - (\alpha/(2mn))a^{2-m}r^2 + O(r^3)$. 再利用方程(6) 得

$$v^m(r) = a^m - \left\{\frac{\alpha a}{2n}r^2 - \frac{\alpha a^{2-m}(2\beta+\alpha)r^4}{8mn(n+2)} - \frac{(\alpha a^{2-m})^p r^{p+2}}{(mn)^p(n+p)(p+2)}\right\} + O(r^5) + O(r^{p+3}). \tag{7}$$

作变换 $w(r) = w(r;a) = (r^\mu v)^m(r;a)$, 用 $v = (r^\mu v)^m(r;a)$ 代入(5) 式得

$$r^2w'' + (n-1-2m\mu)rw' + m\mu(\mu-n)w - (\beta\mu-\alpha)w^{1/m} + \frac{\beta}{m}rw^{1/m-1}w' - \frac{1}{m^p}r^\eta w^\theta|rw' - m\mu w|^p = 0. \tag{8}$$

因为 $\beta\mu - \alpha = 1/(1-m)$, 记 $w_a = \partial w/\partial a$, 则 w_a 满足线性方程

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(w_a) := {} & r^2w_a'' + (n-1-2m\mu)rw_a' + m\mu(\mu-n)w_a - \frac{1}{(1-m)m}w^{1/m-1}w_a + \\ & \frac{1-m}{m^2}\beta rw^{1/m-2}w'w_a + \frac{\beta}{m}rw^{1/m-1}w_a' - \frac{\theta}{m^p}r^\eta w^{\theta-1}|rw' - m\mu w|^p w_a - \\ & \frac{p}{m^p}r^\eta w^\theta|rw' - m\mu w|^{p-2}(rw' - m\mu w)(rw_a' - m\mu w_a) = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

引理 1.3 若在 $(0, r_1)$ 内 $w' > 0$, 其中 $r_1 < R(a)$. 则对 $\forall r \in (0, r_1)$ 有 $\mu a w_a > rw'$ 且 $w_a(r_1) > 0$.

证明 因为 $r(r^2w'')' = r^2(rw')''$, 用算子 $r(\mathrm{d}/\mathrm{d}r)$ 作用(8) 式得

$$\mathscr{L}(rw') = (1/m^p)\eta r^\eta w^\theta|rw' - m\mu w|^p < 0, \ \forall r \in (0, R(a)).$$

在 $(0, r_1)$ 上记 $w_a(r) = C(r)rw'(r)$, 当 $r \ll 1$ 时利用展开式(7) 得

$$C(r) = (\mu a)^{-1}\left\{1 + \frac{\xi}{2m}\left(\frac{\alpha}{mn}\right)^p\frac{a^{(2-m)p-m}}{(n+p)(p+2)}r^{p+2} + O(r^{p+3})\right\}.$$

故 $C(0) = (\mu a)^{-1}$ 且当 $r \ll 1$ 时有 $C'(r) > 0$. 将 $w_a = C(r)rw'$ 代入(9) 式知 $C(r)$ 满足方程

$$(r^3w')C''(r) + [\cdots]C'(r) + C(r)\mathscr{L}(rw') = 0.$$

因为在 $(0, r_1)$ 上 $w' > 0$, $\mathscr{L}(rw') < 0$, 故由上式知在$(0, r_1)$ 内 $C'(r) > 0$. 因此在$(0, r_1)$ 内 $w_a = C(r)rw' > (\mu a)^{-1}rw'$. 再证 $w_a(r_1) > 0$. 记 $r_0 = \min\{1, r_1/2\}$, ϕ 是$(0, R(a))$ 上初始问题 $\mathscr{L}(\phi) = 0$, $\phi(r_0) = 0$ 和 $\phi'(r_0) = 1$ 的解, 则在$(r_0, r_1]$ 上 $\phi > 0$, 因为 ϕ 的任意两个零点之间必有 w_a 的零点. 令 $k_0 = C'(r)rw'(r)|_{r=r_0} > 0$, $c_0 = C(r_0)$, 则在$(0, R(a))$ 上 $\mathscr{L}(\varphi) = 0$, 其中 $\varphi = w_a - k_0\phi$. 因为 $\varphi(r_0) = c_0rw'(r)|_{r=r_0}$, $\varphi'(r_0) = c_0(rw'(r))'|_{r=r_0}$, 所以若记 $\varphi = C(r)rw'(r)$, 则 $C(r)$ 与 $C(r)$ 满足同一方程. 由 $C(r_0) = c_0 > 0$, $C'(r_0) = 0$ 知 $C''(r_0) > 0$, 从而在(r_0, r_1) 内 $C'(r) > 0$, $\varphi = C(r)rw' > 0$, 故在$[r_0, r_1]$ 上 $w_a \geqslant k_0\phi > 0$. 证毕. □

根据引理 1.3, 对任意 $a > 0$, 定义下面 3 个集合

$$\mathscr{A}=\left\{a>0 \mid \text{存在有限的 } R_1(a)\in(0,R(a)) \text{ 使得 } w'(R_1(a);a)=0\right\},$$
$$\mathscr{B}=\left\{a>0 \mid \text{在}(0,\infty)\text{ 上 } w'(r;a)>0 \text{ 且 } \lim_{r\to\infty}w(r;a)<\infty\right\},$$
$$\mathscr{C}=\left\{a>0 \mid \text{在}(0,\infty)\text{ 上 } w'(r;a)>0 \text{ 且 } \lim_{r\to\infty}w(r;a)=\infty\right\}.$$

因为在原点附近总有 $w'(r;a)>0$, 所以若 $a\notin\mathscr{A}$则 $R(a)=\infty$且在$(0,R(a))$内 $w'>0$, 即 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$和 $\mathscr{C}$互不相交且 $\mathscr{A}\cup\mathscr{B}\cup\mathscr{C}=(0,\infty)$. 于是根据初值的取值范围, 问题(6)的解分成了三类.

2 定理 1 的证明

引理 2.1 设 $a>0$, 则下列叙述等价

1) $a\in\mathscr{A}$;

2) 存在有限的 $R_1=R_1(a)\in(0,R(a))$ 使得在$(0,R_1)$内$w'(r;a)>0$, 在$(R_1,R(a))$内 $w'(r;a)<0$且 $w''(R_1;a)<0$;

3) $n\beta<\alpha$ 且 $\sup_{r\in(0,R(a))}w(r;a)<w^*:=[2m(\mu-n)]^{m/(1-m)}$;

4) $R(a)<\infty$且$(v^m)'(R(a);a)<0$.

证明与文献[7]的引理 4.1 类似, 这里略去其证明.

注 1 由引理 2.1 知 $\mathscr{A}$是开集. 此外若 $n\beta\geqslant\alpha$ 则 $\mathscr{A}=\varnothing$, 由下面的引理 2.2 及其推论还知 $\mathscr{B}=\varnothing$, $\mathscr{C}=(0,\infty)$.

定理 2 设 $n\beta<\alpha$, 则存在 $a_*\in(0,\infty)$ 使得 $\mathscr{A}=(0,a_*)$.

证明 先证 $\mathscr{A}\neq\varnothing$. 为此对 $\varepsilon\ll1$, 考虑初值问题

$$\begin{cases}(v^m)''+\dfrac{n-1}{r}(v^m)'+\beta rv+\alpha v-|v'|^p=0,\\ v(0)=\varepsilon,\ v'(0)=0.\end{cases}\tag{10}$$

设 $v(r;\varepsilon)$ 是问题(10)的解, 记 $z_\varepsilon(t)=v(r;\varepsilon)/\varepsilon$, $t=r\varepsilon^{(1-m)/2}$, 则 z_ε 满足

$$\begin{cases}(z_\varepsilon^m)''+\dfrac{n-1}{t}(z_\varepsilon^m)'+\beta tz_\varepsilon'+\alpha z_\varepsilon-\varepsilon^{\xi/2}|z_\varepsilon'|^p=0,\\ z_\varepsilon(0)=1,\ z_\varepsilon'(0)=0.\end{cases}\tag{11}$$

显然, 对任意 $t\geqslant0$, $\varepsilon>0$ 有 $z_\varepsilon(t)\leqslant1$, $|(z_\varepsilon^m)'(t)|<(2m\alpha/(m+1))^{1/2}$. 设$(0,T_\varepsilon)$是 $z_\varepsilon>0$ 的最大区间, 则在$(0,T_\varepsilon)$上 $z_\varepsilon'<0$.

考虑问题

$$\begin{cases}(z^m)''+\dfrac{n-1}{t}(z^m)'+\beta tz'+\alpha z=0,\\ z(0)=1,\ z'(0)=0.\end{cases}\tag{12}$$

我们断言存在有限的 $t_0>0$ 使得问题(12)的解满足 $z(t_0)=0$ 且在$(0,t_0)$上 $z(t)>0$, $z'(t)<0$. 事实上, 若在$(0,\infty)$内 $z(t)>0$ 成立, 则

$$(z^m)'(t)+\beta tz=\frac{1}{t^{n-1}}\int_0^t\rho^{n-1}(n\beta-\alpha)z(\rho)\,\mathrm{d}\rho<0,\qquad \forall t>0.\tag{13}$$

从而存在常数 $\delta>0$ 使得当 $t\geqslant1$ 时有 $\int_0^t\rho^{n-1}(n\beta-\alpha)z(\rho)<-\delta$, 于是

$$(z^m)'+\beta tz<-\delta t^{1-n},\qquad t\geqslant1.\tag{14}$$

当 $n\leqslant2$ 时, 由(14)式得$(z^m)'<-\delta t^{1-n}$. 当 $n>2$ 时, 利用不等式 $\beta tz+\delta t^{1-n}>$

$(\beta tz)^{1-2/n}(\delta t^{1-n})^{2/n} = \beta^{1-2/n}\delta^{2/n}t^{-1}z^{m(1-\nu)}$, $\nu = 2(\mu - n)/(mn\mu) > 0$ 得 $(z^m)' < -\beta^{1-2/n}\delta^{2/n}t^{-1}z^{m(1-\nu)}$。因此当 t 适当大时都有 $z^m(t) < 0$。矛盾。再由(13)式得$(z^m)'(t_0) < 0$。

取 $0<\varepsilon,\ \zeta_0 \ll 1$ 使得 $0 < t_0 - t_1 \ll 1$, $\varepsilon \leqslant (t_1/t_2)^{2(n-1)/\xi}$ 且满足

$$\begin{cases} z(t_1) < \zeta_0,\ (z^m)'(t_1) < \dfrac{1}{2}(z^m)'(t_0), \\ \dfrac{1}{2}(z^m)'(t_0) + \beta t_0\zeta_0 + \left(\dfrac{2m\alpha}{m+1}\right)^{(p-1)/2}\dfrac{m^{1-p}}{(1-m)p+m}\zeta_0^{(1-m)p+m} < 0. \end{cases} \tag{15}$$

由解对参数的连续依赖性知 $T_\varepsilon > t_1$ 且 $z_\varepsilon(t_1) = \zeta < \zeta_0$, $(z_\varepsilon^m)'(t_1) < (z^m)'(t_0)/2$。利用 z_ε, $(z^m)'_\varepsilon$ 的有界性, 由方程(11)得

$$\left(t^{n-1}(z_\varepsilon^m)' + \beta t^n z_\varepsilon\right)' < t^{n-1}\left[(n\beta - \alpha)z_\varepsilon - m^{1-p}\left(\frac{2m\alpha}{m+1}\right)^{(p-1)/2}\varepsilon^{\xi/2}z_\varepsilon^{(1-m)(p-1)}z_\varepsilon'\right].$$

从 t_1 到 $t < \min\left\{T_\varepsilon, t_2\right\}$ 对上式积分并利用(15)式得

$$t^{n-1}(z_\varepsilon^m)'(t) + \beta t^n z_\varepsilon(t) < t_1^{n-1}\left\{\frac{1}{2}(z^m)'(t_0) + \beta t_0\zeta_0 + \left(\frac{2m\alpha}{m+1}\right)^{(p-1)/2}\frac{m^{1-p}}{(1-m)p+m}\zeta_0^{(1-m)p+m}\right\} := -\delta < 0.$$

故 $(z_\varepsilon^m)' + \beta tz_\varepsilon < -\delta t^{1-n}$, $t \in (t_1, \min\left\{T_\varepsilon, t_2\right\})$。类似于对(14)式的分析, 若 $T_\varepsilon = \infty$, 则存在 $\hat{t} = \hat{t}(\delta, \beta, m, n)$ 使得 $z_\varepsilon^m(\hat{t}) = 0$ 且 $\hat{t} \in (t_1, t_2)$, 矛盾。从而 $T_\varepsilon < \infty$ 且$(z_\varepsilon^m)'(T_\varepsilon) < 0$, 由引理 2.1 得$(0, \varepsilon) \subset \mathscr{A}$。

其次, 证明 $\mathscr{A}$是开区间。设 $a \in \mathscr{A}$, 则 $w''(R_1(a); a) < 0$ 且 $w'(R_1(a); a) = 0$。利用隐函数定理, 知方程 $w'(R_1; a) = 0$ 在 a 的邻域内存在唯一解 $R_1 = R_1(a)$。因为 $\mathscr{A}$是开集, 所以 $R_1(a)$ 是 $\mathscr{A}$上的 C^1_函数。对 $a \in \mathscr{A}$, 记 $m(a) = w(R_1(a); a)$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}m(a)}{\mathrm{d}a} = w'(R_1; a)\frac{\mathrm{d}R_1(a)}{\mathrm{d}a} + w_a = w_a > 0.$$

由此, 假设 $(a_1, a_2) \subset \mathscr{A}$ 且 $a_1 > 0$, 则由解对初值的连续依赖性有

$$\sup_{r \in (0, R(a_1))} w(r; a_1) \leqslant \lim_{a \searrow a_1} m(a) < \frac{m(a_1 + a_2)}{2} < w^*,$$

再利用引理 2.1 得 $a_1 \in \mathscr{A}$, 即 $\mathscr{A}$是开区间。证毕。 □

引理 2.2 设 $a > 0$。则 $a \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \sup_{r \in (0, R(a))} w(r; a) > w^*$。

证明 直接由 $\mathscr{C}$的定义可得“⇒”。下证“⇐”。由 $\sup_{r \in (0, R(a))} w(r; a) > w^*$ 及引理 2.1 知 $w(r; a)$ 在$(0, \infty)$ 内严格单增。若 $\hat{w} = \lim_{r \to \infty} w < \infty$, 则存在序列$\left\{r_j\right\}$使得$(rw')|_{r=r_j}$, $(r^2w'')|_{r=r_j} \to 0$。在(8)式中取 $r = r_j \to \infty$ 得 $\hat{w} = w^*$, 但 $\hat{w} > w^*$, 矛盾。故 $\lim_{r \to \infty} w = \infty$, $a \in \mathscr{C}$。证毕。 □

推论 1 设 $a > 0$。则 $\mathscr{B}$是闭集且 $a \in \mathscr{B} \Leftrightarrow \sup_{r \in (0, R(a))} w(r; a) = w^*$。

定理 3 存在 $a^* \geqslant 0$ 使得 $\mathscr{C} = (a^*, \infty)$, 且对任意 $a \in \mathscr{C}$ 存在常数 $k(a) > 0$ 使得 $\lim_{r \to \infty} r^{\alpha/\beta}v(r; a) = k(a)$。另外, $k(a)$ 关于 a 连续, 严格单增且满足

$$\lim_{a \searrow a^*} k(a) = 0,\quad \lim_{a \nearrow \infty} k(a) = \infty. \tag{16}$$

证明　第1步　先证 $\mathscr{C}$ 是开区间. 设 $\tau(a)$ 是满足 $v(\tau(a);a)=a/2$ 的唯一点, 由引理1.2可证当 $a\to\infty$ 时 $\tau(a)\to\infty$. 故当 a 适当大时 $w(\tau(a);a)=(\tau^{\mu}(a)a/2)^m>w^*$, 即 $(a,\infty)\subset\mathscr{C}$. 再利用引理2.2及解对初值的连续依赖性知 $\mathscr{C}$ 为开集. 对任意固定的 r, 由引理1.3知 w 关于 a 严格单增, 由此知 $\mathscr{C}=(a^*,\infty)$, 其中 $a^*=\inf\left\{a>0\mid \lim_{r\to\infty}w(r;a)>w^*\right\}$.

第2步　记 $\tau=\ln r$. 因为 v 严格正, 可将 v 写为 $v(e^{\tau})=v(1)\exp\left\{-\int_0^{\tau}\Lambda(s)\mathrm{d}s\right\}$. 又 $v'(r)<0$, $w'(r)>0$, 故对 $\forall\tau\in(-\infty,\infty)$ 有 $0<\Lambda(\tau)<\mu$. 记 $r(\mathrm{d}/\mathrm{d}r)=\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau=$ "$\cdot$", 将上述变换代入(5)式, 并利用 $r^2v^{1-m}=w^{1/m-1}(r;a)$ 得

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}=J(\Lambda,\tau):=&\ m\Lambda^2+(2-n)\Lambda+\\&m^{-1}[\alpha-\beta\Lambda-\Lambda^p a^p\mathrm{e}^{-p\tau}v^{p-1}(\mathrm{e}^{\tau})]w^{1/m-1}(\mathrm{e}^{\tau}).\end{aligned}\tag{17}$$

因 $a\in\mathscr{C}$, 故当 $\tau\to\infty$ 时 $w(\mathrm{e}^{\tau})\to\infty$, $v(\mathrm{e}^{\tau})\to 0$. 因此对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\tau_\varepsilon>0$ 使得当 $\tau>\tau_\varepsilon$, $\Lambda\in(0,(\alpha-\varepsilon)/\beta]$ 时有 $J(\Lambda,\tau)>0$; 当 $\tau>\tau_\varepsilon$, $\Lambda\in[(\alpha+\varepsilon)/\beta,\mu)$ 时有 $J(\Lambda,\tau)<0$. 于是 $\lim_{\tau\to\infty}\Lambda(\tau)=\alpha/\beta$. 利用上下解方法还可进一步证明以指数为

$$\sigma=\min\left\{\frac{(p-1)\alpha}{2\beta},1-\frac{(1-m)\alpha}{2\beta}\right\}$$

的衰减速率 $\Lambda(\tau)\to\alpha/\beta$. 事实上, 记函数 $\Lambda^-(\tau)=(\alpha/\beta)(1-(1/2\alpha)\mathrm{e}^{\sigma(T-\tau)})$, $\tau>T$. 为证 $\Lambda^-(\tau)$ 是方程(17)的下解, 取 $T\gg1$ 使得当 $\tau\geqslant T$ 时有 $\mathrm{e}^{-p\tau}v^{p-1}(\mathrm{e}^{\tau})<1/(4\mu^p)$ 及

$$\frac{\alpha}{2\beta}<\Lambda(\tau)<\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{2}\left(\mu-\frac{\alpha}{\beta}\right),\tag{18}$$

$$\begin{aligned}&(\Lambda^-(\tau))^p\mathrm{e}^{-p\tau}v^{p-1}(\mathrm{e}^{\tau})<\\&\quad\mu^p\mathrm{e}^{-pT}v^{p-1}(\mathrm{e}^{T})\exp\left\{-(p-1)\int_T^{\tau}\Lambda(s)\mathrm{d}s\right\}\leqslant\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\sigma(T-\tau)},\\&w^{1/m-1}(\mathrm{e}^{\tau})=w^{1/m-1}(\mathrm{e}^{T})\exp\left\{\int_T^{\tau}(2-(1-m)\Lambda)\mathrm{d}s\right\}\geqslant\\&\quad w^{1/m-1}(\mathrm{e}^{T})\mathrm{e}^{\sigma(\tau-T)},\\&(\alpha-\beta\Lambda^-(\tau)-(\Lambda^-(\tau))^p\mathrm{e}^{-p\tau}v^{p-1}(\mathrm{e}^{\tau}))w^{1/m-1}(\mathrm{e}^{\tau})\geqslant\frac{1}{4}w^{1/m-1}(\mathrm{e}^{T}).\end{aligned}$$

故当 $\tau>T$ 且 $T\gg1$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda^-(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-J(\Lambda^-,\tau)\leqslant\frac{\alpha}{2\beta}(2n+\sigma)-\frac{1}{4m}w^{1/m-1}(\mathrm{e}^{T})<0.\tag{19}$$

由(18)式、(19)式及比较原理得 $\Lambda(\tau)>\Lambda^-(\tau)$, $\tau>T$. 类似可证当 T 充分大时 $\Lambda^+(\tau)=(\alpha/\beta)(1+(1/2\alpha)(\mu-(\alpha/\beta))\mathrm{e}^{\sigma(T-\tau)})$ 是(17)式的上解. 于是 $|\Lambda(\tau)-\alpha/\beta|\leqslant c\mathrm{e}^{\sigma(T-\tau)}$, $r(r^{\alpha/\beta}v(r))'=O(r^{-\sigma})$, 因此

$$\begin{aligned}r^{\alpha/\beta}v(r)=&\ v(1)\exp\left\{-\int_0^{\ln r}\left(\Lambda(s)-\frac{\alpha}{\beta}\right)\mathrm{d}s\right\}\to\\&v(1)\exp\left\{-\int_0^{\infty}\left(\Lambda-\frac{\alpha}{\beta}\right)\mathrm{d}s\right\}:=k(a)>0.\end{aligned}$$

第3步　证明(16)式. 因为对 $r\in(0,\infty)$ 有 $(v^m)_a=r^{-m\mu}w_a>0$, 故 $k(a)$ 在 (a^*,∞) 上连续, 非减. 由引理1.3得 $(r^{\alpha/\beta}v(r))_a\geqslant(1/\mu a)\left\{(\mu-\alpha/\beta)r^{\alpha/\beta}v(r)+r(r^{\alpha/\beta}v(r))'\right\}$. 对任意 $a^*<a_1<a_2$,

$$k(a_2) - k(a_1) = \lim_{r\to\infty}\int_{a_1}^{a_2} r^{\alpha/\beta} v_a(r; a)\mathrm{d}a \geqslant \int_{a_1}^{a_2} \frac{\mu - \alpha/\beta}{\mu a} k(a)\mathrm{d}a > 0,$$

即 $k(a)$ 严格单增.

若 $\lim_{a\searrow a^*} k(a) > 0$, 则 $\sup_{r\in(0,R(a^*))} w(r; a^*) = \sup_{r\in(0,R(a^*))} r^{m\mu} v^m(r; a^*) > w^*$, 即 $a^* \in \mathscr{C}$, 矛盾. 故 $\lim_{a\searrow a^*} k(a) = 0$. 最后, 若 $K(r) = r^{\alpha/\beta} v(r)$ 在 r_1 处取得极大值, 则 $K'(r_1) = 0$, $K''(r_1) \leqslant 0$, 即 $\beta r_1 v'(r_1) + \alpha v(r_1) = 0$ 和 $r_1^2 v''(r_1) \leqslant ((\alpha+\beta)/\beta^2)\alpha v(r_1)$. 将这些关系式代入方程(5) 得 $K(r_1; a) \leqslant k_0(m, n, p)$. 故若 $K(r_1; a) > k_0$, 则 K 在 (r_1, ∞) 上单增. 由第 1 步的证明知当 $a \gg 1$ 时 $\tau^{\alpha/\beta}(a) v(\tau(a); a) > k_0$. 因此 $\lim_{a\nearrow\infty} k(a) \geqslant \lim_{a\nearrow\infty}[\tau^{\alpha/\beta}(a) v(\tau(a); a)] = \infty$. 证毕. □

定理 4 设 $n\beta < \alpha$. 则 $\mathscr{B} = \left\{a_*\right\} = \left\{a^*\right\}$ 且有 $\lim_{r\to\infty} r^{\alpha/\beta} v(r) = 0$.

证明 由定理 2 和定理 3 知 $\mathscr{B} = [a_*, a^*]$, 又由 $\mu > \alpha/\beta$ 及推论 1 知定理的极限部分成立. 要证剩余的结论, 我们先证当 $a \in \mathscr{B}$ 时有 $\lim_{r\to\infty} rw'(r; a) = 0$. 证明分为(ⅰ) $(2\beta - 1)(\mu - n) - m\mu = 0$ 和(ⅱ) $(2\beta - 1)(\mu - n) - m\mu \neq 0$ 两种情形.

对情形(ⅰ), 用定理 3 的方法, 记 $\tau = \ln r$, $v(\mathrm{e}^\tau) = v(1)\exp\left\{-\int_0^\tau \Lambda(s)\mathrm{d}s\right\}$, 则 Λ 满足(17) 式且 $0 < \Lambda < \mu$. 对任意给定 $0 < \varepsilon < (\mu - n)/m$, 我们断言 $\Lambda(\tau) = \mu - \varepsilon$ 是方程(17) 的下解. 事实上, 当 τ 充分大时有

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - J(\Lambda, \tau) < -\frac{m\varepsilon^2}{2} + \Lambda^p \mathrm{e}^{-p\tau} v^{p-1}(\mathrm{e}^\tau) w^{1/m-1}(\mathrm{e}^\tau) < 0.$$

又由 $w \to w^*$ 知存在序列$\left\{\tau_j\right\}$ 使得 $\Lambda(\tau_j) \to \mu$, 故当 τ 适当大时由比较原理得 $\mu - \varepsilon \leqslant \Lambda(\tau) < \mu$, 从而 $\Lambda(\tau) \to \mu$, $rw' = (\mu - \Lambda)w \to 0$. 对情形(ⅱ), 若对 $r \gg 1$, rw' 单调, 则 $\lim_{r\to\infty} rw'(r) = 0$. 若 $\forall r \gg 1$, rw' 在(r, ∞) 上不单调, 即 rw' 在 ∞ 附近振荡无穷多次. 取 rw' 的极大值点$\left\{r_j\right\}$ 使得 $r_j \to \infty$ 及 $0 = (rw')'|_{r_j} = (rw'' + w')|_{r_j}$, 将 $r_j^2 w''(r_j) = -r_j w'(r_j)$ 代入(8) 式知 $\lim_{j\to\infty} r_j w'(r_j) = \lambda$ 且满足$((2\beta - 1)(\mu - n) - m\mu)\lambda = 0$, 故 $\lim_{r\to\infty} rw' = \lambda = 0$.

其次, 记 $\tau = \ln r$, $rw' = w_\tau$, 则当 τ 充分大时(9) 式中的线性算子 $\mathscr{L}$ 具有如下形式

$$\mathscr{L}(\phi) = \ddot{\phi} + [b + o(1)]\dot{\phi} - [c + o(1)]\phi,$$

其中 b 为常数, $c = 2(\mu - n) > 0$, 当 $\tau \to \infty$ 时 $o(1) \to 0$. 因此当 $T \gg 1$ 时, 在(T, ∞) 上初值问题 $\mathscr{L}(\phi_1) = 0$, $\phi_1(T) = 0$, $\dot{\phi}(T) = 1$ 的解 $\phi_1(\tau)$ 当 $\tau \to \infty$ 时以指数速率趋于 ∞. 另外, 在证明引理 1.3 时得到在(r_0, ∞) 上 $w_a > k_0\phi > 0$. 因为 ϕ 与 w_a 线性无关, 所以它们中必有一个无界. 于是当 $r \to \infty$ 时 $w_a \to \infty$. 因此若 $a_* < a^*$, 则由 Fatou 引理有

$$0 = \lim_{r\to\infty}(w(r; a^*) - w(r; a_*)) = \lim_{r\to\infty}\int_{a_*}^{a^*} w_a(r; a)\mathrm{d}a \geqslant$$

$$\int_{a_*}^{a^*} \liminf_{r\to\infty} w_a(r; a)\mathrm{d}a = \infty$$

矛盾. 于是 $a^* = a_*$. 证毕. □

定理 1 的证明 由定理 2 至定理 4 立即得到定理 1 的结论. □

[参 考 文 献]

[1] Kardar M, Parisi G, Zhang Y C. Dynamic scaling of growing interface[J]. Phys Rev Lett, 1986, **56**(9):

889_892.

[2] Krug J, Spohn H. Universisality classes for deterministic surface growth[J]. Phys Rev A, 1988, **38** (8): 4271_4283.

[3] Bebachour S, Laurençot Ph. Very singular solutions to a nonliear parabolic equation with absorption. I. Existence[J]. Proc the Royal Soc Edinberg, 2001, **131**(A)(1): 27_44.

[4] QI Yuan_wei, WANG Ming_xin. The self_similar profiles of generalized KPZ equation[J]. Pacific J of Math, 2001, **201**(1): 223_240.

[5] Brezis H, Friedman A. Nonlinear parabolic equation involving measures as initial conditions[J]. J Math Pures Appl, 1983, **62**(1): 73_97.

[6] Brezis H, Peletier L A, Terman D. A very singular solution of the heat equation with absorption[J]. Arch Rational Mech Anal, 1986, **95**(3): 185_209.

[7] CHEN Xin_fu, QI Yuan_wei, WANG Ming_xin. Self_similar singular solution of a p_Laplacian evolution [J]. J Differential Equations, 2003, **190**(1): 1_15.

[8] Kamin S, Vazquez J L. Singular solutions of some nonlinear parabolic equation[J]. J Anal Math, 1992, **59**(1): 51_74.

[9] Leoni G. A very singular solution for the porous media equation $u_t = \Delta(u^m) - u^p$ when $0 < m < 1$ [J]. J Diff Eqns, 1996, **132**(2): 353_376.

[10] Peletier L A, WANG Jun_yu. A very singular solution of a quasilinear degenerate diffusion equation with absorption[J]. Trans Amer Math Soc, 1988, **307**(2): 813_826.

[11] CHEN Xin_fu, QI Yuan_wei, WANG Ming_xin. Long time behavior of solutions to p_Laplacian equation with absorption[J]. SIAM J Appl Math, 2003, **35**(1): 123_134.

[12] Escobedo M, Kavian O, Matano H. Large time behavior of solutions of a dissipative semilinesr heat equation[J]. Commun Partial Diff Eqns, 1995, **20**(8): 1427_1452.

[13] Herraiz L. Asymptotic behaviour of solutions of some semilinear parabolic problems[J]. Ann Inst Henri Poicaré, 1999, **16**(1): 49_104.

[14] Kwak M. A porous media equation with absorption I. Long time behaviour[J]. J Math Anal & Appl, 1998, **223**(1): 96_110.

Self_Similar Singular Solution of Fast Diffusion Equation With Gradient Absorption Terms

SHI Pei_hu, WANG Ming_xin

(Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096, P. R. China)

Abstract: The self_similar singular solution of the fast diffusion equation with nonlinear gradient absorption terms had been studied. By a self_similar transformation, the self_similar solutions satisfy a boundary value problem of nonlinear ODE. Using the shooting arguments, the existence and uniqueness of the solution to the initial data problem of the nonlinear ODE had been investigated, the solutions are classified by the region of the initial data. The necessary and sufficient condition for the existence and uniqueness of self_similar very singular solutions is obtained by the investigation of the classification of the solutions. In case of existence, the self_similar singular solution is very singular solution.

Key words: fast diffusion equation; gradient absorption; self_similar singular solution; very singular solution