

Hamilton 等参元与智能叠层板的半解析法^{*}

卿光辉¹, 邱家俊², 刘艳红¹

(1. 中国民用航空学院 机电分院, 天津 300300;

2. 天津大学 机械工程学院力学系, 天津 300072)

(钟万勰推荐)

摘要: 根据压电材料修正后的 Hellinger-Reissner(H_R) 变分原理, 建立了各向异性压电材料 4 节点 Hamilton 等参元的一般形式。为智能叠层板自由振动问题和带有压电块的叠层悬臂梁的瞬态响应等问题提出了一种新的半解析法。数学模型的基本步骤: 将压电层和主体层看成独立的三维体, 在平面内离散各层, 分别建立各层的方程; 根据主体层和压电层在连接界面上广义应力和广义位移的连续条件, 联立主体层和压电层的方程得到全结构的控制方程。等参元不限制智能板侧面的几何边界形状、板的厚度和层数, 有广泛的应用领域。

关键词: 压电材料; 智能叠层板; 振动分析; Hamilton 等参元; 半解析法

中图分类号: O343.2; O176 **文献标识码:** A

引 言

Hamilton 正则方程的形式对经典力学的微分几何描述有着非常本质的意义^[1], 但这种理论以前很少在弹性力学中得到应用, 文献[2]至文献[4]首次把它引入到弹性力学中。作者在文献[2]至文献[4]的基础上研究了压电材料板的自由振动问题中^[5]。压电材料的正则方程和弹性材料的正则方程在形式上和特征上相似。两者的方程中包含了广义位移和广义应力。

压电材料与一般弹性材料或复合材料混合的叠层板(图 1)是一种常见的智能结构。从外表上看, 这种叠层板与复合材料叠层板有很多类似之处, 但由于压电层的存在使结构各种特性分析增加了难度: 例如, 两种材料的本构关系差别很大, 压电材料具有机电耦合效应; 结构的数学模型应满足力学量和电学量边界条件等。

文献[6]分析了压电材料多种有限元元素的特点和优劣。文献[7]在智能结构中扩展了分层理论的应用, 但是分层理论有一个难以克服的困难, 那就是控制方程的自由度数因层数的增加而增多。

本文推导了各向异性压电材料的 Hamilton 4 节点等参元的一般形式, 对智能叠层板、梁两类动力学问题进行了数值研究。

* 收稿日期: 2005_03_29; 修订日期: 2006_10_27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072038)

作者简介: 卿光辉(1968—), 男, 湖南人, 副教授, 博士(联系人, Tel: + 86_22_24092921; Fax: + 86_22_24092400; E_mail: Qingluke@126.com)。

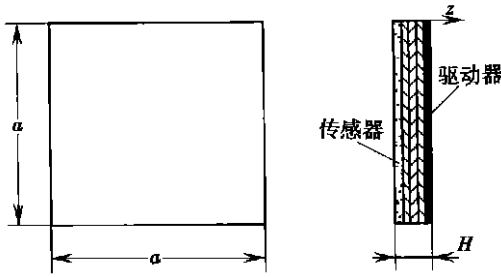


图1 智能板

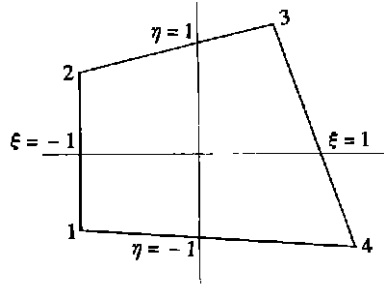


图2 等参元的局部坐标

1 Hamilton 等参元

设各向异性压电材料的本构方程^[7]

$$\sigma_i = C_{ij} \gamma_j - e_{ik} E_k, \quad D_i = e_{ij} \gamma_j + \epsilon_{ik} E_k, \quad (1)$$

其中 σ_i 是应力分量, D_i 电位移分量; γ_j 和 E_k 分别为应变和电场强度分量; C_{ij} 弹性刚度系数, ϵ_{ij} 介电常数; e_{ij} 是压电常数。

广义应变_位移关系为

$$\gamma_j = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad (2)$$

其中 u_i 为位移, ϕ 为标量电势。

压电材料在笛卡尔坐标系下的 H_R 混合变分原理^[5,8]:

$$\delta \Pi = \delta \iiint_V (P^T Q_{,z} - H) dV - \delta \iint_{S_u} T^T (Q - \bar{Q}) dS - \delta \iint_{S_\sigma} T^T Q dS, \quad (3)$$

其中 H 是 Hamilton 函数

$$H = -P^T ((G_1 Q) + \delta_{21}^T (G_2 Q)) + Q^T F + \frac{1}{2} P^T \delta_{11} P - \frac{1}{2} (G_2 Q)^T \delta_{22} (G_2 Q) - \frac{1}{2} \lambda$$

式中 G_1 、 G_2 是微分算子矩阵^[5], δ_j 是与材料的刚度、压电和介电系数相关的矩阵, 在下文中我们用 k_i 表示 δ_j 中的元素

$$P = [\alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_z \quad D_z]^T, \quad Q = [u \quad v \quad w \quad \phi]^T, \\ T = [T_x \quad T_y \quad T_z \quad T_q]^T, \quad F = [f_x \quad f_y \quad f_z \quad f_q]^T,$$

对于固有振动问题 $\lambda = \rho \omega^2 Q^T Q$; 对于动力响应问题 $\lambda = \rho (\partial Q^T / \partial t) (\partial Q / \partial t)$, ρ 是材料密度矩阵。

式(3)中被消去的平面内向量 $P_1 = [\alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_{xy} \quad D_x \quad D_y]^T$ 可用向量 P 和 Q 来表示

$$P_1 = \delta_{21} P + \delta_{22} (G_2 Q). \quad (4)$$

设等参元素(图2)各节点的变量的场函数和形函数为

$$\begin{cases} u = [N(x, y)] \{ u^e(z) \}, & v = [N(x, y)] \{ v^e(z) \}, \\ w = [N(x, y)] \{ w^e(z) \}, & \phi = [N(x, y)] \{ \phi^e(z) \}, \\ \alpha_x = [N(x, y)] \{ \sigma_{xz}^e(z) \}, & \alpha_y = [N(x, y)] \{ \sigma_{yz}^e(z) \}, \\ \alpha_z = [N(x, y)] \{ \sigma_z^e(z) \}, & D_z = [N(x, y)] \{ D_z^e(z) \}, \end{cases} \quad (5)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (6)$$

假设广义应力和广义位移边界满足 $T = \bar{T}$, $Q = \bar{Q}$, 将式(5)和式(6)代入式(3), 执行变

分, 并对加速度向量 \dot{Q} 实施 Wilson_θ 变换^[9], 在时间点 $t + \theta \Delta t$ 处, 则有控制方程

$$\iint \left[\begin{array}{cc} M^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^e \end{array} \right] |J| d\xi d\eta \frac{d}{dz} \left\{ \begin{array}{c} P^e(z) \\ Q^e(z) \end{array} \right\} = \iint \left[\begin{array}{cc} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} P^e(0) \\ Q^e(0) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} F^e \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} |J| d\xi d\eta, \quad (7)$$

其中 $P^e(z) = [\sigma_{xz}^e(z) \quad \sigma_{yz}^e(z) \quad \sigma_z^e(z) \quad D_z^e(z)]^T$,

$Q^e(z) = [u^e(z) \quad v^e(z) \quad w^e(z) \quad \phi^e(z)]^T$,

$$K_{11}^e = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} \\ A_{19} & A_{20} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \end{bmatrix}, \quad K_{12}^e = \begin{bmatrix} A_{11} + \theta & A_{12} & \mathbf{0} & A_{13} \\ A_{14} & A_{15} + \theta & \mathbf{0} & A_{16} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \theta & \mathbf{0} \\ A_{17} & A_{18} & \mathbf{0} & A_{19} \end{bmatrix},$$

K_{11}^e 中: $A_{11} = -k_{11}a - k_{13}b$, $A_{12} = -k_{16}a - k_{18}b$, $A_{13} = -k_{21}a - k_{23}b$,
 $A_{14} = -k_{26}a - k_{28}b$, $A_{15} = -k_{12}b - k_{13}a$, $A_{16} = -k_{17}b - k_{18}a$,
 $A_{17} = -k_{22}b - k_{23}a$, $A_{18} = -k_{27}b - k_{28}a$, $A_{19} = a$, $A_{20} = b$,
 $A_{21} = -k_{14}a - k_{15}b$, $A_{22} = -k_{19}a - k_{20}b$, $A_{23} = -k_{24}a - k_{25}b$,
 $A_{24} = -k_{29}a - k_{30}b$, $a = N^T(\alpha N)$, $b = N^T(\beta N)$;

K_{12}^e 中: $A_{11} = k_{31}a_a + k_{33}(a_b + b_a) + k_{40}b_b$, $A_{12} = k_{32}a_b + k_{33}a_a + k_{37}b_b + k_{40}b_a$,
 $A_{13} = k_{34}a_a + k_{35}a_b + k_{41}b_a + k_{42}b_b$, $A_{14} = k_{32}b_a + k_{37}b_b + k_{33}a_a + k_{40}a_b$,
 $A_{15} = k_{36}b_b + k_{37}(b_a + a_b) + k_{40}a_a$, $A_{16} = k_{38}b_a + k_{39}b_b + k_{41}a_a + k_{42}a_b$,
 $A_{17} = k_{34}a_a + k_{41}a_b + k_{35}b_a + k_{42}b_b$, $A_{18} = k_{38}a_b + k_{41}a_a + k_{39}b_b + k_{42}b_a$,
 $A_{19} = k_{43}a_a + k_{44}(a_b + b_a) + k_{45}b_b$, $a_a = (\alpha N^T)(\alpha N)$, $b_a = (\beta N^T)(\alpha N)$,
 $b_b = (\beta N^T)(\beta N)$, $a_b = (\alpha N^T)(\beta N)$, $\theta = \frac{6\rho b}{\theta^2 \Delta t^2}$;

$$K_{21}^e = \begin{bmatrix} k_1 \phi & k_2 \phi & k_3 \phi & k_4 \phi \\ k_2 \phi & k_5 \phi & k_6 \phi & k_7 \phi \\ k_3 \phi & k_6 \phi & k_8 \phi & k_9 \phi \\ k_4 \phi & k_7 \phi & k_9 \phi & k_{10} \phi \end{bmatrix},$$

$M^e = \text{diag}(\phi)$, $K_{22}^e = -[K_{11}^e]^T$, $F^e = -[N^T f_x^* \quad N^T f_y^* \quad N^T f_z^* \quad N^T f_q^*]^T$;

$f_x^* = f_x + \frac{6\rho}{\theta^2 \Delta t^2} u + \frac{6\rho}{\theta \Delta t} u_{\xi} + 2\theta \dot{u}$, $f_y^* = f_y + \frac{6\rho}{\theta^2 \Delta t^2} v + \frac{6\rho}{\theta \Delta t} v_{\xi} + 2\theta \dot{v}$,

$f_z^* = f_z + \frac{6\rho}{\theta^2 \Delta t^2} w + \frac{6\rho}{\theta \Delta t} w_{\xi} + 2\theta \dot{w}$, $f_q^* = f_q$.

$\phi = N^T N$ 是 4×4 矩阵, $\alpha = \partial/\partial x$ 和 $\beta = \partial/\partial y$ 是微分操作符, J 是雅可比矩阵; 各种常见边界条件的处理方法与文献[9]类似.

由各向异性压电材料等参元的一般形式可简单地得出各向同性材料、正交异性材料的等参元. 例如, 假设各向同性或正交异性的极化方向为 z 坐标, 则有 $k_i = 0$, $i = 2, 3, 4, 6, 7, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 44$. 如果是角铺设板, $k_i = 0$, $i = 3, 4, 6, 7, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 24, 25, 29, 30, 34, 35, 38, 39, 41, 42$.

2 数学模型

考虑一 n 层的智能板, 并把复合材料或弹性材料层也视为压电材料, 但压电系数 $e_j = 0$ 。对第 m 层的元素按有限元方法进行组装, 可获得其控制微分方程

$$\frac{dH_m(z)}{dz} = K_m H_m(0) + R_m(z), \tag{8}$$

式中略去了时间下标 $t + \theta\Delta t$, m 表示第 m 层。

式(8)的精确解为

$$H_m(z) = T_m(z) H_m(0) + R_m(z), \tag{9}$$

其中 $T_m(z) = e^{K_m \cdot z}$, $R_m(z) = \int_0^z e^{K_m(z-\tau)} R_m(\tau) d\tau$ 。

根据层间的连续关系有

$$H_j(z_j) = H_{j+1}(0) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n-1), \tag{10}$$

所以可得到下列 n 层板的迭代方程

$$H_n(z_n) = \left[\prod_{j=1}^n T_j \right] H_1(0) + \left[\prod_{j=2}^n T_j \right] R_1(z_1) + \left[\prod_{j=3}^n T_j \right] R_2(z_2) + \dots + R_n(z_n). \tag{11}$$

式(11)是叠层板上下表面节点物理量的线性方程, 矩阵形式如下

$$\begin{Bmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_p \\ R_q \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

对于固有振动问题, 板上下表面的广义应力列向量为 0, $P(z) = P(0) = \mathbf{0}$, 等效载荷向量 $R_p = R_q = \mathbf{0}$, 因而从方程(12)可导出 $T_{12}Q(0) = \mathbf{0}$, 其非零解条件是

$$|T_{12}| = 0. \tag{13}$$

对于动力响应问题, 有下面的关系式

$$\begin{cases} P(z)_{t+\theta\Delta t} = T_{11}P(0)_{t+\theta\Delta t} + T_{12}Q(0)_{t+\theta\Delta t} + (R_p)_{t+\theta\Delta t}, \\ Q(z)_{t+\theta\Delta t} = T_{21}P(0)_{t+\theta\Delta t} + T_{22}Q(0)_{t+\theta\Delta t} + (R_q)_{t+\theta\Delta t}. \end{cases} \tag{14}$$

根据时刻 $t + \theta\Delta t$ 上下表面的已知条件可求得相应时刻上下表面的广义位移。通过方程(9)可求得板层间界面的广义位移和广义应力。

3 数值算例

例 1 考虑一 5 层的简支叠层板^[7](图 1), 板的宽度 $a/H = 4$, H 是总厚度。子层是复合材料层(Gr/Epoxy), 按[0/90/0]的形式铺设, 厚度均为 $0.276H$ 。上下层为压电材料(PZT_4), 厚度均为 $0.1H$, 设各层材料的单位密度为($\rho = 1 \text{ kg/m}^3$)。叠层板各材料的弹性常数, 压电常数和介电系数列于表 1。分析结果列于表 2 和图 3 至图 5。

为了验证瞬态响应的分析程序, 首先分析文献[10]中的例子。材料特性和几何参数: $E = 210 \text{ GPa/m}^2$, $\nu = 0.25$, $e_{ij} = 0$, $\epsilon_{11}/\epsilon_0 = 3.5$, $\epsilon_{22}/\epsilon_0 = \epsilon_{33}/\epsilon_0 = 3.0$, $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$; $h = 0.05 \text{ m}$, 板的长和宽 $a = b = 0.25 \text{ m}$, 板上表面作用均匀的阶跃压力: $q_0 = 100 \text{ kN/m}^2$ 。因为板较厚, 将板划分为 4 层进行计算, 平面内的网格为 4×4 。图 6 表明本文的结果较柔, 这正好说明了目前的结果是可接受的, 因为本文的等参元素中包含了应力项, 考虑了剪切效应, 而且厚

度方向是解析的。

表 1 材料的特性

PZT-4			Gr/Epoxy	
弹性常数 C	压电常数 $d_{ij}/(m/V)$	介电常数 ϵ	弹性常数 C	介电常数 ϵ
$E_{11} = E_{22} = 81.30 / \text{GPa}$	$d_{31} = -122.0E-12$	$\epsilon_{11}/\epsilon_0 = 1475$	$E_{11} = 132.38 / \text{GPa}$	$\epsilon_{11}/\epsilon_0 = 3.5$
$E_{33} = 64.5 / \text{GPa}$	$d_{32} = -122.0E-12$	$\epsilon_{22}/\epsilon_0 = 1475$	$E_{22} = E_{33} = 10.76 / \text{GPa}$	$\epsilon_{22}/\epsilon_0 = 3.0$
$G_{12} = 30.60 / \text{GPa}$	$d_{33} = 285.0E-12$	$\epsilon_{33}/\epsilon_0 = 1300$	$G_{12} = G_{13} = 5.65 / \text{GPa}$	$\epsilon_{33}/\epsilon_0 = 3.0$
$G_{23} = G_{13} = 25.60 / \text{GPa}$	$d_{24} = 0.0E-12$	/	$G_{23} = 3.61 / \text{GPa}$	/
$\nu_{12} = 0.33$	$d_{15} = 0.0E-12$	/	$\nu_{23} = 0.49$	/
$\nu_{23} = \nu_{13} = 0.43$	/	/	$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.24$	/

表 2 智能板的基频 ($f_1 a/H \rho^{1/2} 10^3$) (kg/m)^{1/2}

	开路(目前的解)				闭路(目前的解)			
	8×8	14×14	20×20	精确解 ^[7]	8×8	14×14	20×20	精确解 ^[7]
网格	8×8	14×14	20×20	/	8×8	14×14	20×20	/
结果	150.69	147.68	146.46	145.38	150.69	147.68	146.46	145.34
误差 E/%	0.745				0.744			

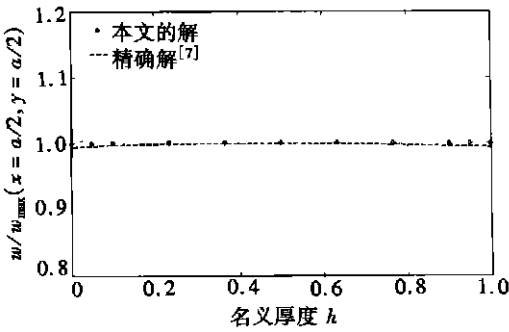


图 3 位移 w 沿厚度的变化

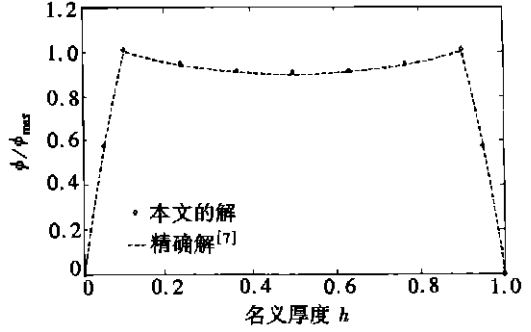


图 4 电势 ϕ 沿厚度的变化

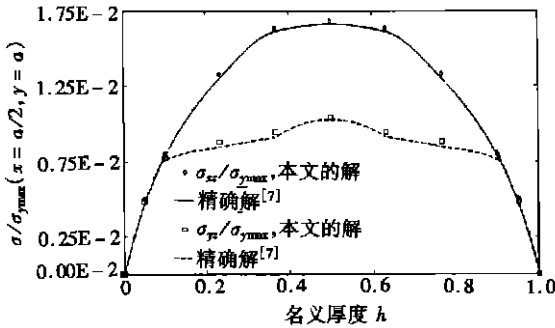


图 5 σ_{xz} 和 σ_{yz} 沿厚度的变化

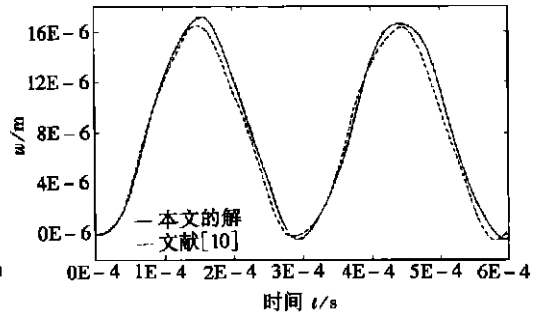


图 6 板中点位移

例 2 图 7(a) 是一端固支的智能梁^[11], Lim 和 Varandan^[11]用了 3 种元素对图 7(b) 所示的结构建立了细致的有限元模型: 压电块及其下面的梁采用 20 节点的块体元素(图 7(c)); 压电块附近区域采用 13 节点的五面体元素过渡(图 7(d)); 其它区域使用 9 节点的平面元素(图 7(e)). 该方法在数值结果的精度和时间消耗等方面很有优越性. 但是这种方法不宜处理厚板问题和图 7(a) 所示的叠层梁. 本文的平面等参元却能分析图 7 中的任意情形. 建立结构控

制方程的具体方法见文献[12]•

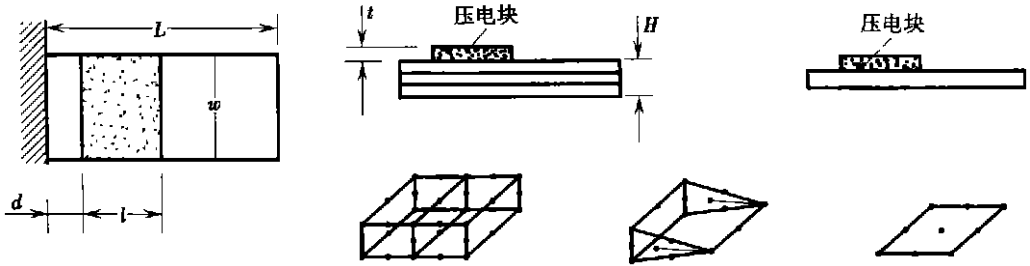


图 7 带有压电传感器的悬臂智能梁

表 3 材料的特性

PZT-4			Gr/Epoxy	
弹性常数 C_{ij}/GPa	压电常数 $e_{ij}/(\text{C}/\text{m}^2)$	介电常数 $\epsilon_{ij}/(\text{F}/\text{m})$	弹性常数 C_{ij}/GPa	介电常数 $\epsilon_{ij}/(\text{F}/\text{m})$
$C_{11} = C_{22} = 126.0$	$e_{31} = -6.5$	$\epsilon_{11} = 1.53\text{E}-8$	$C_{11} = C_{33} = 130.0$	$\epsilon_{11} = 3.1\text{E}-10$
$C_{33} = 118.0$	$e_{32} = -6.5$	$\epsilon_{22} = 1.53\text{E}-8$	$C_{22} = 120.0$	$\epsilon_{22} = 2.65\text{E}-10$
$C_{12} = 79.50$	$e_{33} = 23.3$	$\epsilon_{33} = 1.3\text{E}-8$	$C_{12} = 80.0$	$\epsilon_{33} = 2.65\text{E}-10$
$C_{23} = C_{13} = 84.10$	$e_{24} = e_{15} = 17$	/	$C_{13} = C_{23} = 80.0$	/
$C_{44} = 23.3$	/	/	$C_{44} = 24.2$	/
$C_{55} = C_{66} = 23.0$	/	/	$C_{55} = C_{66} = 24.2$	/

表 4 智能梁前二阶基频 (Hz)

网格	闭路				开路			
	12×1		24×1		12×1		24×1	
阶数	1	2	1	2	1	2	1	2
结果	10.21	40.12	9.92	38.48	10.23	40.13	9.92	38.49

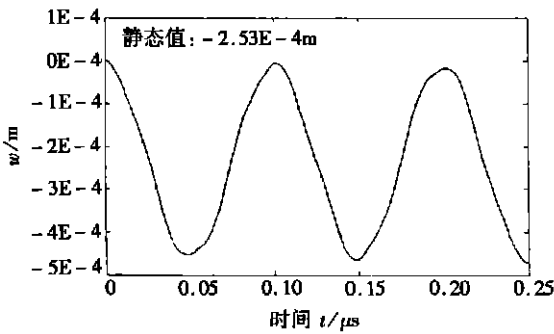


图 8 梁自由端的位移

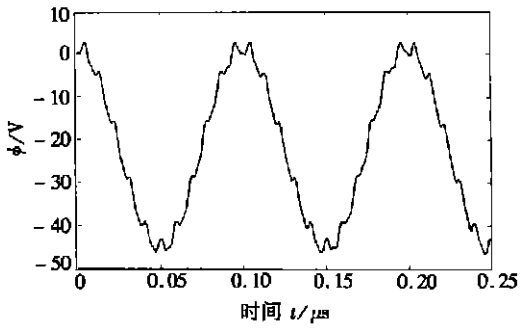


图 9 压电块上表面的电势

例 3 瞬态响应问题(图 7(a))• 设主体梁材料的密度 $\rho = 1\,600\text{ kg}/\text{m}^3$, 压电材料 (PZT_5H) 的密度 $\rho = 7\,500\text{ kg}/\text{m}^3$, 其它参数见表 3• 主体梁按[0/90/0] 的形式铺设, 每一层的厚度为 $0.03H$, 压电块的厚度为 $t = 0.1\text{ m}$, $H = 0.06\text{ m}$, $L = 3.6\text{ m}$, $d = 0.3\text{ m}$, $l = 0.9\text{ m}$, $w = 0.8\text{ m}$ •

叠层梁前两阶固有频率列于表 4• 设在开路情况下, 梁自由端的阶跃载荷 $F_z = -100\text{ N}$ 作用, $\theta = 1.4$, $\Delta t = 1 \times 10^{-3}\text{ s}$ • 载荷作用点的位移和压电块上表面的电势见图 8 和图 9•

4 结 论

- 1) 用传统的有限元方法研究板壳问题时, 线性平面元或壳元局限于薄壁板壳或中厚板壳, 而本文的 Hamiltonian 等参元对板的厚度没有限制。
- 2) 由于传递关系的反复应用, 本文的方法在厚度方向是解析法, 最终的控制方程的未知量与结构层数和厚度无关。
- 3) 数值结果保证了所有材料层层间位移和横向应力的连续性。
- 4) 本文的等参元为侧面几何边界不规则的智能板的分析提供了理论基础。

感谢 本文作者感谢中国民用航空学院基金的资助(05YK07M)。

[参 考 文 献]

- [1] 冯康, 秦孟兆. Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法 [J]. 自然科学进展_国家重点实验室, 1990, 试刊(2): 110_120.
- [2] 钟万勰. 条形城平面弹性问题和哈密尔顿体系 [J]. 大连理工大学学报, 1991, 31(4): 373_384.
- [3] 唐立民. 弹性力学的混合方程和 Hamilton 正则方程 [J]. 计算结构力学及其应用, 1991, 8(4): 343_349.
- [4] 钟万勰. 弹性力学求解新体系 [M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995, 155_159.
- [5] 卿光辉, 邱家俊, 塔娜. 压电体的变分原理及叠层板的自由振动分析 [J]. 振动工程学报, 2004, 17(3): 285_290.
- [6] Benjeddou A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey [J]. Computers & Structures, 2000, 76(1): 347_363.
- [7] Saravanos D A, Heyliger P R, Hopkins D A. Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates [J]. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34(3): 359_378.
- [8] 唐立民, 褚致中, 王治国, 等. 混合状态 Hamiltonian 元的半解析解和叠层板的计算 [J]. 计算结构力学及其应用, 1992, 9(4): 347_360.
- [9] 邹贵平. 复合材料层合板壳的混合状态方程、Hamilton 正则方程及其半解析法 [D]. 博士论文. 大连: 大连理工大学, 1994, 11_240.
- [10] Reddy J N. Dynamic (transient) analysis of layered anisotropic composite material plates [J]. International Journal Numeric Method and Engineering, 1983, 19(2): 237_255.
- [11] Lim Y H, Varandan V. Finite element modeling of the transient response of MEMS sensors [J]. Smart Material and Structures, 1997, 6(1): 53_61.
- [12] 卿光辉, 邱家俊, 塔娜. 正则方程和整体加筋板的固有频率分析 [J]. 力学学报, 2004, 36(6): 749_756.

Hamiltonian Parametric Element and Semi_Analytical Solution for Smart Laminated Plates

QING Guang_hui¹, QIU Jia_jun², LIU Yan_hong¹

(1. Aeronautical Mechanics and Avionics Engineering College, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, P. R. China;

2. Department of Mechanics and Engineering Measurement, School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: Based on the Hellinger_Reissner (H_R) mixed variational principle for piezoelectric material, a unified 4_node Hamiltonian isoparametric element of anisotropy piezoelectric material was established. A new semi_analytical solution for the natural vibration of smart laminated plates and the transient response of the laminated cantilever with piezoelectric patch was presented. The major steps of mathematical model are as follows: the piezoelectric layer and host layer of laminated plate were considered as unattached three_dimensional bodies and discretized by the Hamiltonian isoparametric elements. The control equation of whole structure was derived by considering the compatibility of generalized displacements and generalized stresses on the interface between layers. There is no restriction for the side_face geometrical boundaries, the thickness and the number of layers of plate by the use of the present isoparametric element. The present method has a wide application a.

Key words: piezoelectric material; smart laminated plate; vibration analysis; Hamiltonian isoparametric element; semi_analytical solution