文章编号: 1000_0887(2006) 12_1457_07

仿射非线性控制系统基于精确线性化下的多重子空间迭代解法*

徐自祥[1], 周德云[1], 邓子辰[2]

(1. 西北工业大学 电子信息学院, 西安 710072;
2. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072)

(钟万勰, 叶庆凯推荐)

摘要: 研究仿射非线性控制系统的最优控制问题• 基于微分几何理论, 在反馈精确线性化后, 利用计算结构力学与最优控制之间模拟关系, 沿用多重子结构法来解决线性化后的最优控制问题, 最终实现对原非线性系统的求解• 相比于经典的Taylor展开线性化方法, 减小了误差会随使用区域的扩大而扩大的弊端•

关 键 词: 仿射非线性系统; 精确线性化; 多重子结构; 最优控制
中图分类号: O231; TP273 文献标识码: A

引 言

多重子空间迭代法是计算结构力学中静力分析的方法• 已经证实, 计算结构力学与最优控制之间具有模拟关系[1], 都是基于变分原理• 这种模拟关系的基本思想是: 从数学意义上, 尽管子结构分析是静力学问题, 而LQ控制是从动力问题转化过来的, 但计算结构力学中的子结构链理论与最优控制中LQ控制理论在变分原理上取得一致, 是同一边值问题, 几乎是一一对应的, 故而求解方法可以相互借鉴• 这种模拟的本质是: LQ控制的状态向量对应于子结构链的位移向量; LQ控制的协态向量对应于子结构链的内力向量; LQ控制中代数Riccati方程的解对应于子结构理论中半无穷长子结构链的端部出口刚度阵和端部出口柔度阵• 这种模拟带来的优点是, 用空间坐标模拟时间坐标, 可以将动力问题转化为静力问题• 而结构力学历史悠久, 其静力分析方法众多而成熟, 如力法和位移法, 有限元和子结构法等• 这些行之有效的处理问题方法引入最优控制领域中对最优控制的许多问题的处理会起到积极的促进作用• 这里特别指出, 混合能法的多重子结构法特别适合于对最优控制问题的模拟, 这种基于多重子结构法的 2^N 类算法在用于Ricatti微分方程的求解中可以不涉及本征值问题, 同时在应用于离散时间或连续时间的代数Ricatti方程的求解中可以使本征问题的计算量大为减少• 利用计算结构

* 收稿日期: 2004_11_23; 修订日期: 2006_07_05
资金项目: 航空科学基金资助项目(2000CB080601); 十五国防重点预研项目资助项目(2002BK080602)
作者简介: 徐自祥(1972—), 男, 安徽人, 博士, 主要研究方向为控制理论、计算方法、运筹学等(联系人. TeL/Fax: +86_29_88494877; E_mail: xzxnpu@sina.com).

力学的方法来解决最优控制的问题，我国学者大连理工大学钟万勰及其研究组做了较多的工作。

对于非线性控制系统，由于其发生现象的复杂性，现有的理论远不象线性控制理论那样完善，也没有很好的计算方法和计算手段。目前通常的处理方法是用某种数学方法或数学变换把原问题化为线性问题后求解。所采取的途径有 Taylor 展开、二阶系统的相平面法、Liapunov 稳定性方法、输入输出稳定性方法、谐波平衡法等。近年来微分几何方法[2~4]已日益成为非线性系统研究中的重要手段之一，尤其是对仿射非线性系统。

文献[5~7]正是对非线性最优控制系统，在真实解轨道附近，通过 Taylor 展开并略去高价小量而转化为线性问题，再沿用计算结构力学与最优控制的模拟关系，在定义混合能的基础上，用结构力学中的子结构来模拟控制中的时段，从而用多重子结构中凝聚消元来实现时段的拼接，最终解决线性化后问题的设计。由于 Taylor 展开这种经典线性化方法的误差会随使用区域的扩大而扩大，同时它不适合用于需要控制精度高的系统，也不适用讨论状态远离平衡点的系统的控制。随着微分几何方法研究的深入，精确线性化方法已得到系统的发展。本文的目的是基于微分几何理论，对仿射非线性系统采取反馈精确线性化后，再沿用计算结构力学中的多重子结构方法来解决线性化后的最优控制问题，最终实现对原非线性系统的求解。

1 有限时间 LQ 控制问题的多重子空间迭代法[1]

1.1 Riccati 方程的建立

如线性时变系统的动力方程及初始条件为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{z}(t) + \Gamma(t)\boldsymbol{v}(t), \\ \boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{z}_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{z}(t)$ 是 n 维状态向量，$\boldsymbol{v}(t)$ 是 m 维控制向量。有如下的二次型性能指标函数

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{z}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{f}} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}}[\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{v}(t)]\mathrm{d}t, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}$ 是非负对称常阵，$\boldsymbol{Q}(t)$ 和 $\boldsymbol{R}(t)$ 分别为 $n \times n$ 维非负定对称阵和 $m \times m$ 维正定对称矩阵，末态时间 t_{f} 固定。

引入 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$，构造 Hamilton 函数可推得 LQ 控制的微分方程及边界条件的两点边值问题

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z} - \Gamma\boldsymbol{R}^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}\lambda = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{G}\lambda, \\ \dot{\lambda} = -\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\lambda, \quad \boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{z}_0, \quad \lambda_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{f}}; \end{cases} \tag{3}$$

相应的变分原理为

$$\delta J = \delta\left\{\int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}}[-\lambda^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{z}} - V_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{z}, \lambda)]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\boldsymbol{z}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{f}}\right\} = 0, \tag{4}$$

其中 $V_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{z}, \lambda) = \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\lambda - \lambda^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{z} - \frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}$ 为混合能密度。

连续时间下时段的消元。以两个时刻 t_a 和 t_b 定义时段，有 $0 \leqslant t_a < t_b \leqslant t_{\mathrm{f}}$，$\boldsymbol{z}_a = \boldsymbol{z}(t_a)$，$\lambda_b = \lambda(t_b)$。于是时段 (t_a, t_b) 上的混合能定义为

$$V(\boldsymbol{z}_a, \lambda_b) = \min_{\lambda}\max_{z}\left\{\int_{t_a}^{t_b}[\lambda^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{z}} + V_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{z}, \lambda)]\mathrm{d}t - (\lambda^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z})_{t=t_b}\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\lambda_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2\lambda_b - \lambda_b^{\mathrm{T}}\Phi_2\boldsymbol{z}_a - \frac{1}{2}\boldsymbol{z}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{z}_a, \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{Q}_2$、$\boldsymbol{G}_2$、Φ_2 与 t_a、t_b 有关•

通过分析混合能与混合能密度间的关系,可得到顺时间积分关系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial t_b} = \Phi_2\boldsymbol{Q}\Phi_2, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{G}_2}{\partial t_b} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}_2 + \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}_2, \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial t_b} = (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{Q})\Phi_2 \end{cases} \tag{6}$$

及逆时间积分关系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial t_a} = -(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2 + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{F} - \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_2), \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{G}_2}{\partial t_a} = -\Phi_2\boldsymbol{G}\Phi_2^{\mathrm{T}}, \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial t_a} = -\Phi_2(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_2); \end{cases} \tag{7}$$

边界条件都为

$$\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{0},\quad \Phi_2 = \boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{0},\qquad t_a = t_b \text{ 时}• \tag{8}$$

其式(6)之第2式和式(7)之第1式就是Riccati微分方程• 对定常系统, $\boldsymbol{Q}_2$、Φ_2、$\boldsymbol{G}_2$只与$t = t_b - t_a$有关,此时方程表为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2 + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{F} - \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_2, \tag{9a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}_2 + \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}_2, \tag{9b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{Q})\Phi_2 - \Phi_2(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_2)• \tag{9c}$$

1.2 求解有限时间的 Riccati 方程

为改善计算精度,选择较高次近似为初始状态•

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{Q}t + \boldsymbol{q}_2t^2 + \boldsymbol{q}_3t^3 + \cdots, \\ \boldsymbol{G}' = \boldsymbol{G}t + \boldsymbol{g}_2t^2 + \boldsymbol{g}_3t^3 + \cdots, \\ \Phi' = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{F}t + \varphi_2t^2 + \varphi_3t^3 + \cdots• \end{cases} \tag{10}$$

代入式(9),求出系数

$$\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}),\quad \boldsymbol{g}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}),\quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^2 - \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}),$$

$$\boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}((\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^2\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^2) + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}\right],$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^2\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^2) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}\right],$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^3 - \boldsymbol{G}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}) - \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}\right]•$$

选二阶近似,初态为

$$\begin{cases} Q' = \left[Q + \frac{1}{2}(F^{\mathrm{T}}Q + QF)\Delta t \right]\Delta t, \\ G' = \left[G + \frac{1}{2}(FG + GF^{\mathrm{T}})\Delta t \right]\Delta t, \\ \Phi' = \left[F + \frac{1}{2}(F^2 - GQ)\Delta t \right]\Delta t. \end{cases} \tag{11}$$

所用的迭代公式为

$$Q_2 = Q' + (I + \Phi')^{\mathrm{T}}(I + Q'G')^{-1}Q'(I + \Phi'), \tag{12a}$$

$$G_2 = G' + (I + \Phi')G'(I + Q'G')^{-1}(I + \Phi')^{\mathrm{T}}, \tag{12b}$$

$$\Phi_2 = \left[\Phi' - \frac{1}{2}G'Q' \right](I + Q'G')^{-\mathrm{T}} + (I + Q'G')^{-\mathrm{T}} \times \left[\Phi' - \frac{1}{2}G'Q' \right] + \Phi'(I + Q'G')^{-\mathrm{T}}\Phi'. \tag{12c}$$

边界条件的处理,是设想在 (t_f, ∞) 之间有一个半无穷长的时段,与 $(0, t_f)$ 段混合消元,即可得满足边界条件 $S = S_f$ 的解

$$S = Q_2 + \Phi_2^{\mathrm{T}}(S_f^{-1} + G_2)^{-1}\Phi_2. \tag{13}$$

2 仿射非线性控制系统的反馈精确线性化

对非线性系统,微分几何理论已有了较成熟的方法,讨论下列仿射非线性系统:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i = f(x) + g(x)u, \tag{14}$$

其中 x 定义在 n 维流形上;$f(x)$、$g(x)$ 是 n 维向量场,$g(x) = (g_1(x), \cdots, g_m(x))_{n\times m}$;$u$ 为控制.

系统在 x_0 点精确线性化问题有解的充要条件是矩阵 $[g(x_0), \mathrm{ad}_f g(x_0), \cdots, \mathrm{ad}_f^{n-1}g(x_0)]$ 的秩为 n 及分布 $D = \mathrm{span}\left\{ g(x), \mathrm{ad}_f g(x), \cdots, \mathrm{ad}_f^{n-2}g(x) \right\}$ 在 x_0 的某邻域内是非奇异对合的. 则存在内部坐标变换

$$z = \phi(x) = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)^{\mathrm{T}} = (h(x), L_f h(x), \cdots, L_f^{n-1}h(x))^{\mathrm{T}}, \tag{15}$$

其中 $h(x)$ 是由 $(\partial h/\partial x)\mathrm{ad}_f^k g(x) = 0\ (0 \leqslant k \leqslant n-2)$ 解出的光滑函数,而状态反馈变换 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$,$v$ 为新的输入,$\beta(x)$ 非奇异,

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^{n-1}h(x)}{L_g L_f^{n-1}h(x)}, \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1}h(x)}, \tag{16}$$

使原系统线性化为

$$\dot{z} = Az + Bv. \tag{17a}$$

假设此时目标泛函为

$$J(z, v) = \frac{1}{2}z_f^{\mathrm{T}}P_f z_f + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}[z^{\mathrm{T}}(t)Qz(t) + v^{\mathrm{T}}(t)Rv(t)]\mathrm{d}t, \tag{17b}$$

其中 (A, B) 是可控的,Q 和 R 正定

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & \mathbf{0} & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1}. \tag{18}$$

如目标泛函是式(14)给出的 $J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$,亦可由 $\boldsymbol{x}=\Phi^{-1}(\boldsymbol{z})$ 和 $\boldsymbol{u}=\alpha(\boldsymbol{x})+\beta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$ 变换为 $\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 下的 $J(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v})$•

反馈线性化方法与在某一平衡点处略去Taylor展开式的二次及高于二次微分项的近似线性化是有本质区别的,适用于状态大范围变化的非线性系统,同时不会损失系统信息•

3 基于精确线性化下的子空间迭代及数值例

由线性最优控制理论可知,对有限时间线性二次型形式的最优控制问题(17),存在反馈最优解

$$\boldsymbol{v}^*=-\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{z}=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^*\boldsymbol{z},\quad \boldsymbol{K}^*=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^*,\tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{P}^*$ 是Riccati微分方程

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=-\dot{\boldsymbol{P}},\quad \boldsymbol{P}(t_{\mathrm{f}})=\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}\tag{20}$$

的解• 求解Riccati微分方程(20)涉及到求解两点边值问题(TPBV),而两点边值问题的求解是相当困难的• 目前出现了一些数值解法,然而每种方法都只能对特定的问题有效• 对线性系统(17),其形式与式(1)是一致的,这里 $\boldsymbol{P}$ 的求法可采用上述的子空间迭代算法• 这种利用混合能法的多重子结构法特别适合于对最优控制问题的模拟,这种基于多重子结构法的 2^N 类算法在用于Ricatti微分方程的求解中可以不涉及本征值问题• 进一步再由 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的变换关系 $\boldsymbol{u}=\alpha(\boldsymbol{x})+\beta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$, $\alpha(\boldsymbol{x})$ 和 $\beta(\boldsymbol{x})$ 的表达式连同式(19),故而即可得原非线性系统的控制律为

$$\boldsymbol{u}=-\frac{L_{\mathrm{f}}^{n}h(\boldsymbol{x})}{L_gL_{\mathrm{f}}^{n-1}h(\boldsymbol{x})}-\frac{\boldsymbol{K}^*\Phi(\boldsymbol{x})}{L_gL_{\mathrm{f}}^{n-1}h(\boldsymbol{x})}•\tag{21}$$

作为一个例子,考虑非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}x_3(1+x_2)\\ x_1\\ x_2(1+x_1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1+x_2\\ -x_3\end{pmatrix}\boldsymbol{u},\tag{22}$$

可验证矩阵 $[\boldsymbol{g}(0),\mathrm{ad}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{g}(0),\mathrm{ad}_{\mathrm{f}}^2\boldsymbol{g}(0)]$ 的秩为 $3=n$, $\boldsymbol{D}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{g}(0),\mathrm{ad}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{g}(0)\}$ 的秩为2,同时按 $(\partial h/\partial\boldsymbol{x})\mathrm{ad}_{\mathrm{f}}^k\boldsymbol{g}=\boldsymbol{0}$ 可找到一个 $h(\boldsymbol{x})=x_1$• 求出坐标变换

$$\boldsymbol{z}=\Phi(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}x_1\\ x_3(1+x_2)\\ x_1x_3+x_2(1+x_1)(1+x_2)\end{pmatrix},\tag{23}$$

则式(22)完全线性化为

$$\begin{cases}\dot{z}_1=z_2,\\ \dot{z}_2=z_3,\\ \dot{z}_3=v\end{cases},\quad \dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_{2\times2}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{3\times1}•\tag{24}$$

设此时目标泛函为

$$J=\frac{1}{2}\boldsymbol{z}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{f}}+\frac{1}{2}\int_0^{t_{\mathrm{f}}}[\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}(t)]\,\mathrm{d}t,$$

其中 $t_{\mathrm{f}}=3.0$, $\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}=\mathrm{diag}\{10.0\quad 10.0\quad 10.0\}$, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_{1\times1}$,

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&3&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则由子空间迭代算法解 Riccati 微分方程, 其 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{Q}$ 如上定义,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=-\dot{\boldsymbol{P}},\quad \boldsymbol{P}(t_{\mathrm{f}})=\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}\cdot$$

这里给出时间趋向无穷的结果

$$\boldsymbol{P}^{*}=\begin{pmatrix} 5.6433 & 3.8902 & 1.4142 \\ 3.8902 & 7.6175 & 3.2833 \\ 1.4142 & 3.2833 & 2.7508 \end{pmatrix},$$

进而 $\boldsymbol{K}^{*}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{*}=(1.4142\quad 3.2833\quad 2.7508)$，从而最优控制律

$$\boldsymbol{u}=-\frac{L_{\mathrm{f}}^{3}h(\boldsymbol{x})}{L_{g}L_{\mathrm{f}}^{2}h(\boldsymbol{x})}-\frac{\boldsymbol{K}^{*}\phi(\boldsymbol{x})}{L_{g}L_{\mathrm{f}}^{2}h(\boldsymbol{x})}, \tag{25}$$

其中各量定义如前•

4 结 束 语

对于非线性控制系统，由于其发生现象的复杂性，目前还没有很好的计算方法和计算手段• 多重子空间迭代法是计算结构力学中静力分析的方法• 出于计算结构力学与最优控制之间模拟关系, 子空间迭代法较多应用于解决 LQ 最优控制问题及 Riccati 方程的求解, 具有减少计算量和不涉及本征值问题等优点•

本文基于微分几何理论, 对仿射非线性系统采取反馈精确线性化后, 再沿用多重子结构方法来解决线性化后的最优控制问题• 相比于经典的在真实解轨道附近通过 Taylor 展开线性化方法, 减小了误差会随使用区域扩大及不适合远离平衡点条件的缺陷, 同时又体现了计算结构力学方法的长处•

[参 考 文 献]

[1] 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993.

[2] 史小平, 许天舒. 两类不确定非线性系统的最优控制[J]. 电机与控制学报, 2000, **4**(4): 223—226.

[3] Cheng D, Tarn T J, Isidori A. Global external linearization of nonlinear system via feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1985, **39**(8): 808—811.

[4] 周雪松, 马幼捷. 非线性控制理论几何结构原理的基本概念[J]. 青岛大学学报, 1997, **12**(1): 23—28.

[5] DENG Zi_chen. The optimal solution of the constrained nonlinear control system[J]. Computers & Structures, 1994, **53**(5): 1115—1121.

[6] 邓子辰. 混合能消元法在受约束非线性控制系统中的应用[J]. 工程力学, 1994, **11**(1): 124—132.

[7] 邓子辰. 多重子结构法在非线性控制系统中的应用[J]. 力学学报, 1994, **24**(2): 239—246.

[8] 钟万勰. 代数黎卡提方程的求解与辛子空间迭代法[J]. 上海力学, 1994, **15**(2): 1—11.

[9] 冯纯伯. 非线性控制系统分析与设计[M]. 北京: 电子工业出版社, 2001.

Exact Linearization Based Multiple_Subspace Iterative Resolution to Affine Nonlinear Control System

XU Zi_xiang[1], ZHOU De_yun[1], DENG Zi_chen[2]

(1. School of Electronics and Information, Northwestern Politechnical University, Xi'an 710072, P.R.China;

(2. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Politechnical University, Xi'an 710072P.R. China)

Abstract: To the optimal control problem of affine nonlinear system, based on differential geometry theory, feedback precise linearization was used. Then starting from the simulative relationship between computational structural mechanics and optimal control, multiple_substructure method was induced to solve the optimal control problem which was linearized. And finally the solution to the original nonlinear system was found. Compared with the classical linearizational method of Taylor expansion, this one diminishes the abuse of error expansion with the enlargement of used region.

Key words: affine nonlinear system; precise linearization; multiple_substructure; optimal control