

一维 Burgers 方程和 KdV 方程的 广义有限谱方法*

詹杰民¹, 李毓湘²

(1. 中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275;

2. 香港理工大学 土木及结构工程系)

(王彪推荐)

摘要: 给出了高精度的广义有限谱方法. 为使方法在时间离散方面保持高精度, 采用了 Adams_Bashforth 预报格式和 Adams_Moulton 校正格式, 为了避免由 Korteweg_de Vries(KdV) 方程的弥散项引起的数值振荡, 给出了两种数值稳定器. 以 Legendre 多项式、Chebyshev 多项式和 Hermite 多项式为基函数作为例子, 给出的方法与具有分析解的 Burgers 方程的非线性对流扩散问题和 KdV 方程的单独波和双孤独波传播问题进行了比较, 结果非常吻合.

关键词: 特殊函数; 广义有限谱方法; 非线性波

中图分类号: O351.2; O24 **文献标识码:** A

引 言

1844 年 John Scott Russel 在苏格兰首先发现孤波, 但他的工作在 Joseph Boussinesq 出版论文前并没有引起关注^[1]. Boussinesq 最早用数学方程描述孤波现象^[1], 后来被称为 Korteweg_de Vries(KdV) 方程^[2]. KdV 型方程可以用于描述大量物理领域的现象, 并引起了众多学者的关注. Pego 等人^[3]研究了 KdV_Burgers 方程行波振荡不稳定性. Ge 等人^[4]通过结合交通中智能运输系统和推导改进的 KdV 方程提出了一种扩展的车辆跟踪模型. Zhang 等人^[5]基于格子 Boltzmann 方程单松弛形式推导了 KdV_Burgers 方程的格子 Boltzmann 模式. 他们模拟了 KdV_Burgers 方程的行波、孤波和激波解. Kaya^[6,7]针对 KdV 型方程提出了精度很高的新的分解方法, 方法选择了合适的微分算子, 可以是常微或偏微, 线性或非线性, 确定或随机.

与经典的差分法和有限元法相比较, 谱方法具有计算精度高、稳定性好、滤短波较彻底的突出优点. 然而, 传统的谱方法运算量和存储量均较大, 较小的电子计算机不易实现.

由于谱方法对小尺度问题有较好的分辨率, 谱元法在过去 20 年里得到了快速发展. Patera^[8]和他的同事们^[9]系统阐述了如何应用谱元法. Giraldo^[10]针对浅水方程提出了强和弱 La-

* 收稿日期: 2005_05-15; 修订日期: 2006-06-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272118); 教育部博士点专项基金资助项目(20020558013)

作者简介: 詹杰民(1963—), 男, 广东人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: + 86_20_8411130; Fax: + 86_20_84113291; E_mail: stszjm@zsu.edu.cn).

grange_Galerkin 谱元法。谱元法结合了谱方法和有限元法的优点。同时,也在一定程度上克服了传统的谱方法运算量和存储量大的缺点。

另一种能有效提高计算效率的谱展开方法是王建平^[11,12]提出的有限谱方法。他的谱方法是按节点而不是按区域进行离散,处理过程中使用了有限个节点和有限个基函数。与传统的谱元法相比较,有限谱方法的离散过程更接近有限差分法或多项式展开法。即在所研究节点的某个领域内,未知函数表示为 $N + 1$ 项“基函数”的和,其各阶导数值由该领域各节点的函数值确定。沈等人^[13]基于有限谱方法和解析离散法,提出一种新的高精度三点有限谱格式,由于格式点数少,方法是高效的。

以 Legendre 多项式、Chebyshev 多项式和 Hermite 多项式为代表的正交特殊函数或多项式具有精度高的特点。由它们作为基函数来构造广义 Fourier 级数或多项式,更能适应非周期和非线性的物理问题。本文结合有限谱思想,以 Burgers 方程和 KdV 方程为例,给出广义有限谱方法的基本思路。方法像传统有限谱方法那样,保持了有限差分法具有的灵活性,同时,由于使用了正交特殊函数或多项式,方法具有非常高的精度。

1 广义有限谱格式

假设未知量 $u(x)$ 可以用 $2N + 1$ 个正交基函数 $\phi_n(x)$ 表示:

$$u(\xi^i) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \phi_n(\xi^i), \quad (1)$$

其中 ξ^i 为局部坐标,定义如下:

$$\xi^i = l \frac{x_{i+j} - x_i}{N \Delta x}, \quad j = -N, -(N-1), \dots, 1, \dots, N-1, N, \quad (2)$$

x_i 为节点坐标 ($i = 0, 1, \dots, M$), Δx 为网格空间步长,参数 l 的值小于 1。靠近边界处的节点坐标可采用不同的向前或向后格式处理。为了得到 C_n^i , 方程(1)可改写为

$$\begin{bmatrix} \phi_0(\xi_{-N}^i) & \phi_1(\xi_{-N}^i) & \dots & \phi_{2N-1}(\xi_{-N}^i) & \phi_{2N}(\xi_{-N}^i) \\ \phi_0(\xi_{-N+1}^i) & \phi_1(\xi_{-N+1}^i) & \dots & \phi_{2N-1}(\xi_{-N+1}^i) & \phi_{2N}(\xi_{-N+1}^i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_0(\xi_{-1}^i) & \phi_1(\xi_{-1}^i) & \dots & \phi_{2N-1}(\xi_{-1}^i) & \phi_{2N}(\xi_{-1}^i) \\ \phi_0(\xi_0^i) & \phi_1(\xi_0^i) & \dots & \phi_{2N-1}(\xi_0^i) & \phi_{2N}(\xi_0^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^i \\ C_1^i \\ \vdots \\ C_{2N-1}^i \\ C_{2N}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x_{i-N}) \\ u(x_{i-N+1}) \\ \vdots \\ u(x_{i-N-1}) \\ u(x_{i-N}) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

系数 C_n^i 可以通过求解上述方程组得到。 $u(x)$ 的一阶导数是

$$u_x^i(x_{i+j}) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \frac{d}{dx} \phi_n(\xi^i), \quad (4)$$

$$u_{xx}^i(x_{i+j}) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \frac{d^2}{dx^2} \phi_n(\xi^i), \quad (5)$$

$$u_{xxx}^i(x_{i+j}) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \frac{d^3}{dx^3} \phi_n(\xi^i), \quad (6)$$

本文采用的正交基函数是 Legendre 多项式 $P_n(x)$ 、Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ 和 Hermite 多项式 $H_n(x)$ 。本节采用递推关系,使得描述更为简捷、清晰。

1.1 Legendre 有限谱格式

由于 $(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$, 因此

$$\frac{d}{dx}P_n(\xi^i) = \frac{l}{N\Delta x} \frac{n}{1-(\xi^i)^2} [P_{n-1}(\xi^i) - \xi^i P_n(\xi^i)] \quad (7)$$

利用 Legendre 方程, 我们有

$$\frac{d^2}{dx^2}P_n(\xi^i) = \left\{ \frac{l}{N\Delta x} \right\}^2 \frac{1}{1-(\xi^i)^2} [2\xi^i P'_n(\xi^i) - n(n-1)P_n(\xi^i)], \quad (8)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}P_n(\xi^i) = \left\{ \frac{l}{N\Delta x} \right\}^3 \frac{1}{1-(\xi^i)^2} [4\xi^i P''_n(\xi^i) - (n^2-n-2)P'_n(\xi^i)] \quad (9)$$

1.2 Chebyshev 有限谱格式

因为 $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, 所以

$$\frac{d}{dx}T_n(\xi^i) = \frac{nl}{N\Delta x} \frac{1}{\sqrt{1-(\xi^i)^2}} \sin(n\theta) \quad (10)$$

利用第一类 Chebyshev 方程, 有

$$\frac{d^2}{dx^2}T_n(\xi^i) = \left\{ \frac{l}{N\Delta x} \right\}^2 \frac{1}{1-(\xi^i)^2} [2\xi^i T'_n(\xi^i) - n^2 T_n(\xi^i)], \quad (11)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}T_n(\xi^i) = \left\{ \frac{l}{N\Delta x} \right\}^3 \frac{1}{1-(\xi^i)^2} [3\xi^i T''_n(\xi^i) - (n^2-1)T'_n(\xi^i)], \quad (12)$$

其中 $\theta^i = \arccos(\xi^i)$ 。

1.3 Hermite 有限谱格式

由递推关系

$$\frac{d}{dx}H_n(\xi^i) = \frac{2nl}{N\Delta x} H_n(\xi^i), \quad (14)$$

利用 Hermite 方程, 有

$$\frac{d^2}{dx^2}H_n(\xi^i) = \left\{ \frac{l}{N\Delta x} \right\}^2 [2\xi^i H'_n(\xi^i) - 2nH_n(\xi^i)], \quad (15)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}H_n(\xi^i) = \left\{ \frac{l}{N\Delta x} \right\}^3 [2\xi^i H''_n(\xi^i) - (2n-2)H'_n(\xi^i)] \quad (16)$$

2 KdV_Burgers 方程的数值格式

KdV_Burgers 方程(KdVB)的一般形式为

$$u_t + \varepsilon u u_x - \nu u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0, \quad (17)$$

其中 ε , ν 和 μ 是参数。方程(17)由 Su 和 Gardner(1969)导出^[14]。

2.1 空间离散

通过求解方程组(3), 可求得方程(1)的系数。对于多项式(1), 要求 $|\xi^i| \leq 1$ 。因为方程(1)不仅可以用于计算区域的内部, 而且可以用于边界, 因此 l 的值在边界处不大于 0.5。在计算中, 我们发现数值稳定性和精度基本不依赖于 l 的取值。我们取 $l = 0.48$ 。

由方程(3)求得系数 C_n^i 后, 方程(17)的扩散项可直接由方程(5)确定。由于三阶导数 u_{xxx} 的精度相对于自变量是降低的, 为了得到高精度和稳定性好的格式, 我们建议不直接采用方程(5), 而是对 u_{xxx} 采取如下的离散过程。即由 Taylor 展式, 有

$$u_{i \pm k} = u_i \pm k \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(k \Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{(k \Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(k \Delta x)^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \pm \frac{(k \Delta x)^5}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + O((\Delta x)^6), \quad (18)$$

$$u_{i+k} - u_{i-k} = 2k \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(k \Delta x)^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(k \Delta x)^5}{60} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + (O(\Delta x)^7), \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-1} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + (\Delta x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + O((\Delta x)^6). \quad (20)$$

从上述方程中消去五阶导数, 三阶导数可表示为

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i = \frac{1.5}{(\Delta x)^3} \left[5(u_{i+1} - u_{i-1}) - \Delta x \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-1} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1} \right] \right] + O((\Delta x)^4). \quad (21)$$

方程(21)中的一阶导数可以从 Legendre 多项式、Chebyshev 多项式和或 Hermite 多项式得到。将式(21)设计成由相邻点和一阶导数值来确定, 其目的是为了表达式在空间上紧凑, 方便方法的推广。

2.2 时间离散

用于本文的时间离散方法是 Li 和 Zhan^[15] 用于 Beji 和 Nadaoka^[16] 提出的改进型 Boussinesq 方程的时间离散方法。这里, 仅仅简要描述一下如何将方法推广到 KdVB 方程。在 $n+1$ 时刻, u 的值可用 Adams_Bashforth 显格式^[17, 18] 从它们在 $n, n-1$ 和 $n-2$ 时刻的值求得:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{12} \left[23 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n - 16 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n-1} + 5 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n-2} \right], \quad (22)$$

u^{n+1} 的预报值可以通过一个迭代过程来校正。 $(u_i^{k+1})_i$ 的值通过如下的 KdVB 方程的第 k 次迭代获得:

$$(u_i^{k+1})_i = -\mathcal{E}(u^k u_x^k)_i + \mathcal{V}(u_{xx}^k)_i - \mathcal{M}(u_{xxx}^k)_i, \quad (23)$$

而 u_i^{k+1} 可以由四阶 Adams_Moulton 校正格式得到:

$$(u_i^{n+1})^{k+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{24} \left\{ 9 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n+1} \right]^k + 19 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n - 5 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n-1} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n-2} \right\}, \quad (24)$$

其中, 当 $k=0$ 时 $[(\partial u / \partial t)_i^{n+1}]^0 = (\partial u / \partial t)_i^{n+1}$ 。

当 u 的两次叠代值之差的绝对值小于 10^{-8} , 一个时间步的叠代过程完成。

2.3 数值稳定器

到此为止, 似乎关于 KdVB 方程的数值方法已经完成。我们尝试用该方法来求解方程时发现, 当用它来求解 Burgers 方程时, 可以得到精确结果(见下1节), 然而, 如果用于 KdV 方程, 数值振荡非常强烈。因此, 我们发展了两种高精度的数值稳定器。

由方程(18), 可得

$$u_{i+k} + u_{i-k} = 2u_i + (k \Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(k \Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta x)^6, \quad (25)$$

消去二阶导数和四阶导数, 有

$$u_i = \frac{1}{20} [15(u_{i+1} + u_{i-1}) - 6(u_{i+2} + u_{i-2}) + (u_{i+3} + u_{i-3})] + O(\Delta x)^6. \quad (26)$$

上述方程在每一个迭代步用于区域内的奇点处 $i=5, 7, 9, \dots, M-4$, 其中 M 为节点数。

方程(26)虽然简洁, 但依赖周围节点数太多, 不便于推广到不规则区域, 因此本文发展另一种数值稳定器。利用方程(19), 一阶导数满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-1} = 2\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^3}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta x)^5. \tag{27}$$

由方程(25)得

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta x)^6. \tag{28}$$

从方程(27)和(28)中消去四阶导数,有

$$u_i^* = \frac{1}{8} \left[4(u_{i+1} + u_{i-1}) - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-1} \right) - 2(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \right] + O(\Delta x)^6. \tag{29}$$

若将方程(29)直接用于确定区域内 $u(x)$ 在奇点处 ($i = 5, 7, 9, \dots, M-4$) 的值, 计算过程仍然不稳定. 我们发现, 通过设计加权格式, 可以得到稳定解. 由于方程(24)和(29)对 $u(x)$ 而言都是高精度的, 我们建议

$$u(x) = \alpha_1 u^{k+1}(x) + \alpha_2 u^*(x), \tag{30}$$

其中, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $u^{k+1}(x)$ 和 $u^*(x)$ 分别由方程(24)和(29)求得, 计算中, 我们取 $\alpha_1 = 0.3$. 利用稳定器可以获得 KdV 方程的精确结果(见下1节).

3 数值结果

3.1 Burgers 方程

当 $\varepsilon = 1$ 和 $\mu = 0$, KdVB 方程(17)可以写成下列的 Burgers 方程

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0. \tag{31}$$

由于弥散项在上述方程中不出现, 数值稳定器在此情形下不需使用. 为了验证数值结果的准确性, 本文采用下列初始条件

$$u(x, 0) = \frac{\alpha + \beta + (\beta - \alpha)e^y}{1 + e^y}, \tag{32}$$

其中 $y = (\alpha/\nu)(x - \lambda)$, 而参数 α, β, λ 和 ν 为任意常数. 在上述初始条件下, 有精确解

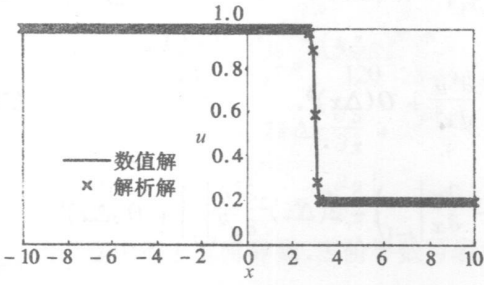
$$u(x, t) = \frac{\alpha + \beta + (\beta - \alpha)e^\zeta}{1 + e^\zeta}, \quad t \geq 0. \tag{33}$$

表 1 广义有限谱方法的准确性(均方根误差)

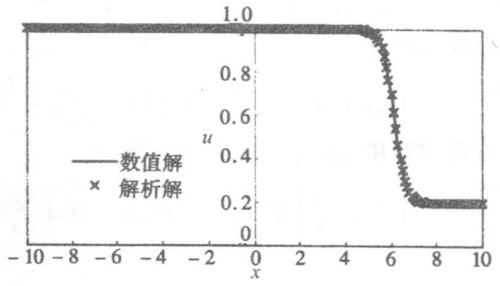
情况	方 法		
	Legendre 有限谱方法	Chebyshev 有限谱方法	Hemite 有限谱方法
Burgers 方程 ($\nu = 0.01$)	5.0×10^{-5}	5.0×10^{-5}	5.0×10^{-5}
Burgers 方程 ($\nu = 0.1$)	4.4×10^{-5}	4.4×10^{-5}	4.4×10^{-5}
KdV 方程 (单孤波)	稳定器(26)	8.1×10^{-5}	1.0×10^{-4}
	稳定器(30)	7.5×10^{-5}	1.23×10^{-4}
KdV 方程 (双孤波)	稳定器(26)	5.4×10^{-4}	5.6×10^{-4}
	稳定器(30)	7.7×10^{-4}	8.1×10^{-4}

其中 $\zeta = (\alpha/\nu)(x - \beta t - \lambda)$. 本文考虑两组参数. 一种是曲线斜率急变的情形, 参数为 $\alpha = 0.2, \beta = 0.3, \lambda = 0$ 和 $\nu = 0.01$. 一种是曲线斜率缓变的情形, 参数为 $\alpha = 0.4, \beta = 0.6, \lambda = 0.125$ 和 $\nu = 0.1$. 网格数为 $M = 401$ 而时间步长 $\Delta t = 0.001$. 求解区域为 $[-10, 10]$. 数值结果的准确性由表 1 所示. 可以看出, 3 种广义谱方法的数值结果与分析解完全一致, 数值结果之间几乎也没有差异. 图 1 中仅以 Legendre 有限谱方法的结果与分析解进行比较, 可

以看出两者完全一致• 再一次说明广义有限谱方法的准确性•



(a) $\alpha = 0.2, \beta = 0.3, \lambda = 0, \nu = 0.01$



(b) $\alpha = 0.4, \beta = 0.6, \lambda = 0.125, \nu = 0.1$

图 1 Burgers 方程的数值解与分析解 ($t = 10$)

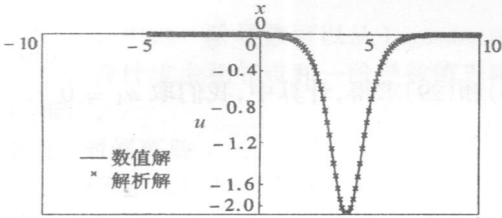


图 2 孤波的数值解与分析解 ($t = 1$)

3.2 Korteweg-de Vries 方程

当 $\nu = 0, \epsilon = -6$ 和 $\mu = 1$, KdVB 方程(17)可写为下列的 KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{34}$$

如果初始条件为 $u(x, 0) = -2\text{sech}^2(x)$, 则有如下的精确解

$$u(x, t) = -2\text{sech}^2(x - 4t) \tag{35}$$

节点数为 401, 求解区域为 $x \in [-5, 15]$, 时间步长为 $\Delta t = 0.00005$ •

由于方程中有弥散项, 计算中使用了两种数值稳定器• 从图 2 可知, 计算结果与分析解相当吻合• 从表 1 可以看出, 两种数值稳定器对计算结果的精度影响不大, 结果依然保持高精度•

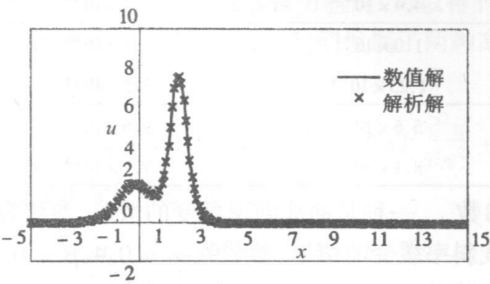
本文考虑的另一种形式的 KdV 方程为

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{36}$$

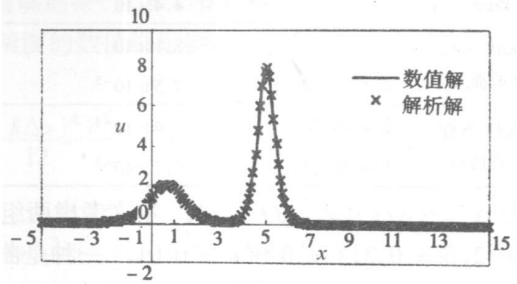
该方程通过分析方法和数值方法来研究^[19]• 如果初始条件为 $u(x, 0) = 6\text{sech}^2(x)$, 则有下列双孤独波解

$$u(x, t) = -12 \frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{[3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2} \tag{37}$$

网格节点数和求解区域不变, 时间步长 $\Delta t = 0.00005$ • 同样, 再次使用数值稳定器• 相对于单孤独波的例子而言, 3 种广义有限谱方法的计算精度有所降低, 但与 Li^[20]用半隐蛙跳格式的计算结果相比, 这里的误差是很小的(见图 3(d))•



(a) $t = 0.1$



(b) $t = 0.3$

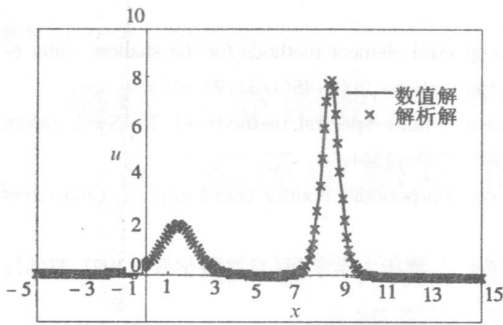
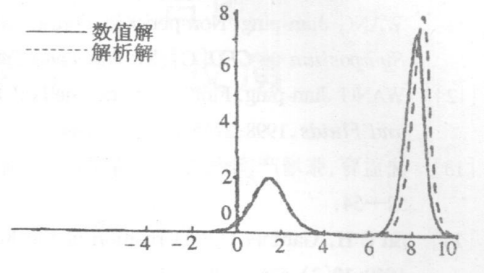
(c) $t = 0.5$ (d) $t = 0.5$ (引自 Li, 1995)^[20]

图3 双孤波的数值解与分析解

4 结 论

本文给出的广义有限谱方法具有高精度的优点,能很好地适应非线性对流扩散问题。虽然在应用于强非线性的孤独波问题时出现了强的数值震荡,但采用本文建议的数值稳定器可以在保持高精度的前提下解决震荡问题。方法可以推广到多维的数学物理问题。

感谢 作者感谢香港理工大学基金(A_PE28)的资助。

[参 考 文 献]

- [1] de Boussinesq J. Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal en communiquant au liquide continu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond[J]. J. Math Pures et Appliqu es, 1872, **17**(2): 55—108.
- [2] Korteweg D J, de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves[J]. Philosophical Magazine, 5th Series, 1895, **36**: 422—443.
- [3] Pego R L, Smereka P, Weinstein M I. Oscillatory instability of traveling waves for a KdV-Burgers equation[J]. Physica D, 1993, **67**(1/3): 45—65.
- [4] Ge H X, Dai S Q, Dong L Y, et al. Stabilization effect of traffic flow in an extended car following model based on an intelligent transportation system application[J]. Physical Review E, 2004, **70**(6): Art. No. 066134 Part 2.
- [5] Zhang C Y, Tan H L, Liu M R, et al. A lattice Boltzmann model and simulation of KdV-Burgers equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2004, **42**(2): 281—284.
- [6] Kaya D. On the solution of a Korteweg-de Vries like equation by the decomposition method[J]. International Journal of Computer Mathematics, 1999, **72**(4): 531—539.
- [7] Kaya D. Solitary wave solutions for compound KdV-type and compound KdV-Burgers-type equations with nonlinear terms of any order[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, **152**(3): 709—720.
- [8] Patera A T. A spectral element method for fluid dynamics_laminar_flow in a channel expansion[J]. Journal of Computational Physics, 1984, **54**(3): 468—488.
- [9] Ghaddar N K, Karniadakis G E, Patera A T. A conservative isoparametric spectral element method for forced convection: Application to fully developed flow in periodic geometries[J]. Numer Heat

- Transfer, 1986, **9**(3): 277—300.
- [10] Giraldo F X. Strong and weak Lagrange_Galerkin spectral element methods for the shallow water equations[J]. Computers and Mathematics With Applications, 2003, **45**(1/3): 97—121.
- [11] WANG Jian_ping. Non-periodic Fourier transform and finite spectral method[A]. In: Sixth Intere Symposium in CFD[C]. Nevada: Lake Tahoe, 1995, 1339—1344.
- [12] WANG Jian_ping. Finite spectral method based on non-periodic Fourier transform[J]. Computers and Fluids, 1998, **27**(5/6): 639—644.
- [13] 沈孟育, 张增产, 李海东. 高精度三点有限谱方法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1997, **37**(8): 52—54.
- [14] Su C H, Gardner C S. Derivation of the Korteweg_de Vries and Burgers equation[J]. J Math Phys, 1969, **10**(3): 536—539.
- [15] Li Y S, Zhan J M. Boussinesq_type model with boundary_fitted coordinate system[J]. Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering, ASCE, 2001, **127**(3): 152—160.
- [16] Beji S, Nadaoka K. A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth[J]. Ocean Engineering, 1996, **23**(8): 691—704.
- [17] Press W H, Flannery B P, Teukolsky S A, et al. Numerical Recipes [M]. New York: Cambridge University Press, 1989, 569—572.
- [18] Wei G, Kirby J T. Time_dependent numerical code for extended Boussinesq equations[J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, ASCE, 1995, **121**(5): 251—260.
- [19] Dodd R K, Eilbeck J C, Gibbon J D, et al. Solitons and Nonlinear Wave Equations [M]. New York: Academic Press, 1984.
- [20] Li P W. On the numerical study of the KdV equation by the semi_implicit and Leap_frog method[J]. Computer Physics Communications, 1995, **88**(2/3): 121—127.

Generalized Finite Spectral Method for 1D Burgers and KdV Equations

ZHAN Jie_min¹, LI Yok_sheung²

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University,
Guangzhou 510275, P. R. China;

2. Department of Civil & Structural Engineering, The Hong Kong Polytechnic
University, Hong Kong, P. R. China)

Abstract: A generalized finite spectral method is proposed. The method is of high_order accuracy. To attain high accuracy in time discretization, the fourth_order Adams_Bashforth_Moulton predictor and corrector scheme was used. To avoid numerical oscillations caused by the dispersion term in the KdV equation, two numerical techniques were introduced to improve the numerical stability. The Legendre, Chebyshev and Hermite polynomials were used as the basis functions. The proposed numerical scheme is validated by applications to the Burgers equation (nonlinear convection_diffusion problem) and KdV equation(single solitary and 2_solitary wave problems), where analytical solutions are available for comparison. Numerical results agree very well with the corresponding analytical solutions in all cases.

Key words: special orthogonal functions; generalized finite spectral method; nonlinear wave