文章编号: 1000_0887(2006) 12_1424_07
c 应用数学和力学编委会, ISSN 1000_0887

Krawtchouk 多项式零点的渐近展开及其误差限*

朱晓峰， 李秀淳

(北京印刷学院 基础部, 北京 102600)

(郭兴明推荐)

摘要: Krawtchouk 多项式在现代物理学中有着广泛应用· 基于 Li 和 Wong 的结果, 利用 Airy 函数改进了 Krawtchouk 多项式的渐近展开式, 而且得到了一个一致有效的渐近展开式· 进一步, 利用 Airy 函数零点的性质, 推导出了 Krawtchouk 多项式零点的渐近展开式, 并讨论了其相应的误差限· 同时还给出了 Krawtchouk 多项式和其零点的渐近性态, 它优于 Li 和 Wong 的结果·

关 键 词: Krawtchouk 多项式; 渐近展开; 零点; 误差限
中图分类号: O174 文献标识码: A

引 言

渐近分析是数值计算中的一个理论问题· 在渐近分析理论中, 关于正交多项式的研究是一个重要课题· Krawtchouk 多项式为

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{N-x}{n-k} \binom{x}{k} (-p)^{n-k} q^k,$$

(这里 $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$, $n \leqslant N$, N 为正整数), $\{K_n(x)\}$ 构成一组正交多项式系, 它在现代物理学中有着广泛应用· 近年来, 关于 Krawtchouk 多项式渐近性态的研究不断出现在一些重要的数学刊物中· Sharapudinov[1] 给出了当 $x = O(n^{1/2})$ 而 $n = O(N^{1/2})$ 时, 形如 $K_n(Np + \sqrt{2Npqx})$ 多项式渐近性态, 并给出了当 $n = O(N^{1/4})$ 时该多项式最小零点的渐近性态; Ismail 和 Simeonov[2] 给出了在 N/n 不变情况下 $K_n(x)$ 的渐近性态; 特别地, Li 和 Wong[3] 又给出了正交多项式 $K_n(x)$ 的一致有效的渐近展开式, 但没有给出该多项式零点的渐近性态· 本文基于文献[3], 研究 Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$ (其中 $\lambda = x/N$, $0 < \lambda < 1$) 零点的渐近性态, 给出了零点的渐近展开式和相应的误差限·

为了方便, 我们对下文的标记作些说明· 由文献[3] 中第 2 节可以得出, 当 $v < p, q$ 时,

* 收稿日期: 2005_03_10; 修订日期: 2006_04_17
资金项目: 北京市中青年骨干教师培养计划资助项目; 北京市教员委员会科技发展计划面上资助项目(KM200310015060)
作者简介: 朱晓峰(1964—), 男, 山东人, 教授, 硕士(联系人. Tel: + 86_10_60261158; Fax: + 86_10_60261160; E_mail: zhuxiaofeng@bigc.edu.cn).

$K_n(\lambda N)$ 零点应在区间$(\lambda_-, \lambda_+) \subset (0, 1)$内，其中 $\lambda_\pm$ 是使2个鞍点 $w_\pm(\lambda)$ 在两处相撞时的 λ 值，$\lambda_\pm$ 值为 $\lambda_\pm = (\sqrt{v} \pm \sqrt{\sigma(1-v)})^2/(1+\sigma)$，这里 $\sigma = p/q$•

下面我们讨论 Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$ 渐近性态•

1　Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$ 的渐近性态

在文献[3]中，式(5.14)、(5.18)给出了当 $n \to \infty$ 时 $K_n(\lambda N)$ 的渐近展开式及其误差限•

引理 1[3]　对于任意固定的 $v(0<v<1)$，Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$（其中 $\lambda = x/N$，$0<\lambda<1$）一致有效的渐近展开式为

$$K_n(\lambda N) = \frac{1}{n!}p^n\sigma^{-\lambda N}n^{n/2}e^{\gamma n}\left[V_n(\beta\sqrt{n})\sum_{l=0}^{m-1}\frac{a_l}{n^l} + \frac{1}{\sqrt{n}}V_n'(\beta\sqrt{n})\sum_{l=0}^{m-1}\frac{b_l}{n^l} + \varepsilon_m\right],$$

其误差限为

$$|\varepsilon_m| \leqslant \frac{P_m}{n^m}|V_n(\beta\sqrt{n})| + \frac{Q_m}{n^{m+1/2}}|V_n'(\beta\sqrt{n})|,$$

其中 β 与 γ 都由 λ 唯一确定，a_l、b_l 由文献[3]的式(5.12)、(5.13)确定，$V_n(x) = e^{x^2/2}U(-n-1/2, x)$，而 $U(a, x)$ 是抛物柱函数（见文献[4]）•

现在我们改进引理 1•　取 $m = 1$，由引理 1 则有

$$K_n(\lambda N) = \frac{1}{n!}p^n\sigma^{-\lambda N}n^{n/2}e^{\gamma n}\left[a_0V_n(\beta\sqrt{n}) + \frac{b_0}{\sqrt{n}}V_n'(\beta\sqrt{n}) + O(n^{-1})\right], \tag{1}$$

这里 $(a_0 + \beta b_0/2) \neq 0$•　我们分两种情况讨论 Krawtchouk 多项式的渐近展开•

（ⅰ）对于任意固定的 $v = (n/N) \in (0, q)$，由文献[4]的式(8.11)和(8.15)可得

$$U(-n-1/2, \beta\sqrt{n}) = \sqrt{2\pi}e^{-n/2}n^{n/2+1/6}[A_i(\mu^{4/3}\zeta) + \mu^{-8/3}B_0(\zeta)A_i'(\mu^{4/3}\zeta)][1+O(n^{-2})],$$

$$U'(-n-1/2, \beta\sqrt{n}) = \sqrt{2\pi}e^{-n/2}n^{n/2+1/3}[A_i'(\mu^{4/3}\zeta) + \mu^{-4/3}C_0(\zeta)A_i(\mu^{4/3}\zeta)][1+O(n^{-2})],$$

其中 A_i 是 Airy 函数，A_i' 是 Airy 函数的导函数，且 $\mu = \sqrt{2n+1}$，$2\zeta^{3/2}/3 = 0.5t\sqrt{t^2-1} - 0.5\ln(t+\sqrt{t^2-1})$，$t = \beta\sqrt{n/(2(2n+1))}$•　由此有

$$\begin{aligned}V_n(\beta\sqrt{n}) = {}& \sqrt{2\pi}e^{n(\beta^2/4-1/2)}n^{n/2+1/6}[A_i(\mu^{4/3}\zeta) + \\ & \mu^{-8/3}B_0(\zeta)A_i'(\mu^{4/3}\zeta)][1+O(n^{-2})],\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}V_n'(\beta\sqrt{n}) = {}& \frac{\beta}{2}\sqrt{2\pi}e^{n(\beta^2/4-1/2)}n^{n/2+1/6}[A_i(\mu^{4/3}\zeta) + \\ & \mu^{-8/3}B_0(\zeta)A_i'(\mu^{4/3}\zeta)][1+O(n^{-2})] + \\ & n^{-1/3}\sqrt{2\pi}e^{n(\beta^2/4-1/2)}n^{n/2+1/6}[A_i'(\mu^{4/3}\zeta) + \\ & \mu^{-4/3}C_0(\zeta)A_i(\mu^{4/3}\zeta)][1+O(n^{-2})]•\end{aligned} \tag{3}$$

由于 $B_0(\zeta)$ 和 $C_0(\zeta)$ 有界（见文献[4]），这样舍去式(2)、(3)中的 $\mu^{-8/3}B_0(\zeta)$ 与 $\mu^{-4/3}C_0(\zeta)$ 所在项后，并注意到 $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$，那末由式(1)可得

$$K_n(\lambda N) = p^n\sigma^{-\lambda N}n^{-1/3}e^{n(\beta^2/4+1/2+\gamma)}\left(a_0 + \frac{\beta}{2}b_0\right) \times$$

$$\left[A_i(\mu^{4/3}\zeta)+\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}n^{-1/3}A_i'(\mu^{4/3}\zeta)+O(n^{-1})\right]\cdot \tag{4}$$

引理2 当 $n\to\infty$ 时, 若 $n^{2/3}(\lambda_+-\lambda)$ 有界, 则 $\mu^{4/3}\zeta$ 有界•

证明 由于 μ, ζ 可以展开为

$$\mu=\sqrt{2n}\left(1+\frac{1}{4n}-\frac{1}{32n^2}+\cdots\right),\quad \zeta=2^{1/3}(t-1)\left[1+\frac{1}{10}(t-1)+\cdots\right],$$

这里 $t-1=0.5(\beta-2)[1+O(n^{-1})]$, 从而有 $\zeta=-2^{-2/3}(2-\beta)[1+O(2-\beta)]$ 和

$$\mu^{4/3}\zeta=-n^{-2/3}(2-\beta)[1+O(n^{-1})+O(2-\beta)]\cdot \tag{5}$$

另外, 由文献[3] 的式(6.21)、(6.25) 和(6.27) 知

$$n^{2/3}(2-\beta)=\left(\frac{c_+}{v}\right)^{2/3}n^{2/3}(\lambda_+-\lambda)[1+O(n^{-2/3})], \tag{6}$$

其中 c_+ 和 r_0 为常数,

$$c_+=\frac{1}{(1-r_0)(\sigma+r_0)}(1+\sigma)^{3/2}(\sigma v)^{-1/2}r_0^{3/2},\quad r_0=\sqrt{\frac{\sigma v}{1-v}}\cdot \tag{7}$$

因此不难看出, $\mu^{4/3}\zeta$、$n^{2/3}(2-\beta)$ 和 $n^{2/3}(\lambda_+-\lambda)$ 的有界性相同• □

如果我们记 $a_+=n^{2/3}(\lambda_+-\lambda)=O(1)$, 则有

$$\lambda=\lambda_+-a_+n^{-2/3},\quad \mu^{4/3}\zeta=-a_+\left(\frac{c_+}{v}\right)^{2/3}[1+O(n^{-2/3})]\cdot$$

由引理2 知 $\mu^{4/3}\zeta$ 有界• 再利用 Taylor 公式, 则有

$$A_i(\mu^{4/3}\zeta)+\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}n^{-1/3}A_i'(\mu^{4/3}\zeta)=$$
$$A_i\left(\mu^{4/3}\zeta+\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}n^{-1/3}\right)+O(n^{-2/3}),$$

所以式(4) 可改写为

$$K_n(\lambda N)=p^n\sigma^{-\lambda N}n^{-1/3}e^{n(\beta^2/4+1/2+\gamma)}\left(a_0+\frac{\beta}{2}b_0\right)\times$$
$$\left[A_i\left(\mu^{4/3}\zeta+\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}n^{-1/3}\right)+O(n^{-2/3})\right]\cdot \tag{8}$$

我们来计算式(8) 中的 $b_0/(a_0+\beta b_0/2)$• 由文献[3] 的式(5.12) 与(5.13), 可知 $\Phi(z_-)=a_0+b_0z_-$• 而由文献[3] 的式(4.4) 以及 $\beta-2=O(n^{-2/3})$ 知 $z_-=(\beta-\sqrt{\beta^2-4})/2=\beta/2+O(n^{-1/3})$• 故有 $\Phi(z_-)=(a_0+\beta b_0/2)[1+O(n^{-1/3})]$, 从而

$$\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}=\frac{1}{\Phi(z_-)}\frac{\Phi(z_+)-\Phi(z_-)}{z_+-z_-}[1+O(n^{-1/3})]\cdot \tag{9}$$

在文献[3] 的式(5.4) 中, 令 $z\to z_\pm(w\to w_\pm)$ 可得

$$\Phi(z_\pm)=\left[\frac{v}{1-v}(1-w_\pm)(\sigma+w_\pm)\frac{z_\pm}{w_\pm}\frac{z_+-z_-}{w_+-w_-}\right]^{1/2}\cdot$$

于是式(9) 可写成

$$\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}=$$
$$\frac{1}{z_+-z_-}\left(\frac{z_+}{z_-}\right)^{1/2}\left(\frac{w_+}{w_-}\right)^{-1/2}\left[\frac{(1-w_+)(\sigma+w_+)}{(1-w_-)(\sigma+w_-)}\right]^{1/2}[1+O(n^{-1/3})]\cdot \tag{10}$$

由于文献[3]的式(4.4)以及 $n^{2/3}(2-\beta)=O(1)$, 可得 $z_{\pm}=(\beta\pm\sqrt{\beta^2-4})/2=1\pm\mathrm{i}(2-\beta)^{1/2}+O(n^{-2/3})$, 因此

$$\frac{1}{z_+-z_-}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{c_+}{v}\right)^{1/3}(a_+n^{-2/3})^{-1/2}[1+O(n^{-1/3})],$$

$$\left(\frac{z_+}{z_-}\right)^{1/2}=1+\mathrm{i}\left(\frac{c_+}{v}\right)^{-1/3}(a_+n^{-2/3})^{1/2}+O(n^{-2/3})\cdot$$

通过直接计算, 可以从文献[3]的式(6.23)得出

$$\left(\frac{w_+}{w_-}\right)^{-1/2}=1-\mathrm{i}\left(\frac{1+\sigma}{\sigma v}\right)^{1/2}r_0^{1/2}a_+^{1/2}n^{-1/3}+O(n^{-2/3}),$$

$$\left[\frac{(1-w_+)(\sigma+w_+)}{(1-w_-)(\sigma+w_-)}\right]^{1/2}=$$

$$1+\mathrm{i}\left(\frac{1+\sigma}{\sigma v}\right)^{1/2}r_0^{3/2}(a_0n^{-2/3})^{1/2}[(\sigma+r_0)^{-1}-(1-r_0)^{-1}]+O(n^{-2/3}),$$

因此

$$\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{c_+}{v}\right)^{-1/3}\frac{\sigma}{1-v}\frac{(pv)^{-1/2}r_0^{1/2}}{(1-r_0)(\sigma+r_0)}\right][1+O(n^{-1/3})]\cdot \tag{11}$$

于是式(8)中 A_i 可以写成

$$A_\mathrm{i}\left(\mu^{4/3}\zeta+\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}n^{-1/3}\right)=A_\mathrm{i}\left\{-n^{2/3}(\lambda_+-\lambda)\left(\frac{c_+}{v}\right)^{2/3}+\right.$$
$$\left.\frac{n^{-1/3}}{2}\left[1-\left(\frac{c_+}{v}\right)^{-1/3}\frac{\sigma}{1-v}\frac{(pv)^{-1/2}r_0^{1/2}}{(1-r_0)(\sigma+r_0)}\right]+O(n^{-2/3})\right\}\cdot \tag{12}$$

(ii) 对于任意固定的 $v=(n/N)\in(0,p)$, 类似地可以得到与(i)相似的结果, 推导过程略• 上述推导说明, 下列结论成立:

定理 1 (i) 对于任意固定的 $v=(n/N)\in(0,q)$, Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$(其中 $\lambda=x/N$, $0<\lambda<1$) 的一致渐近展开式为

$$K_n(\lambda N)=p^n\sigma^{-\lambda N}n^{-1/3}\mathrm{e}^{n(\beta^2/4+1/2+\gamma)}\left(a_0+\frac{\beta}{2}b_0\right)\times$$
$$\left[A_\mathrm{i}\left(\mu^{4/3}\zeta+\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}n^{-1/3}\right)+O(n^{-2/3})\right],$$

其中

$$A_\mathrm{i}\left(\mu^{4/3}\zeta+\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}n^{-1/3}\right)=A_\mathrm{i}\left\{-n^{2/3}(\lambda_+-\lambda)\left(\frac{c_+}{v}\right)^{2/3}+\right.$$
$$\left.\frac{n^{-1/3}}{2}\left[1-\left(\frac{c_+}{v}\right)^{-1/3}\frac{\sigma}{1-v}\frac{(pv)^{-1/2}r_0^{1/2}}{(1-r_0)(\sigma+r_0)}\right]\right\}+O(n^{-2/3});$$

(ii) 对于任意固定的 $v=(n/N)\in(0,p)$, Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$(其中 $\lambda=x/N$, $0<\lambda<1$) 的一致渐近展开式为

$$K_n(\lambda N)=(-1)^n p^n\sigma^{-\lambda N}n^{-1/3}\mathrm{e}^{n(\beta^2/4+1/2+\gamma)}\left(a_0+\frac{\beta}{2}b_0\right)\times$$
$$\left[A_\mathrm{i}\left(\mu^{4/3}\zeta+\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}n^{-1/3}\right)+O(n^{-2/3})\right],$$

其中

$$A_{\mathrm{i}}\left(\mu^{4/3}\zeta+\frac{b_0}{a_0+\beta b_0/2}n^{-1/3}\right)=A_{\mathrm{i}}\left\{-n^{2/3}(\lambda-\lambda_-)\left(\frac{c_-}{v}\right)^{2/3}-\frac{n^{-1/3}}{2}\left[1-\left(\frac{c_-}{v}\right)^{-1/3}\frac{\sigma}{1-v}\frac{(pv)^{-1/2}r_0^{1/2}}{(1+r_0)(\sigma-r_0)}\right]\right\}+O(n^{-2/3})\cdot$$

这里 β 与 γ 都由 λ 唯一确定, a_0、b_0 由文献[3]的式(5.12)、(5.13)确定•

定理 1 给出了Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$(其中 $\lambda=x/N$, $0<\lambda<1$) 的一个渐近展开式, 该展开式对于任意固定的 $v=(n/N)\in(0,q)$ 或 $(0,p)$ 是一致有效的• 下面我们利用该展开式讨论 Krawtchouk 多项式零点的渐近展开和相应误差限的问题•

2 Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$ 的零点渐近性态

先让我们看一个关于零点的常用结论•

引理 3[5] 设 $\Phi(t)$ 连续, $\Psi(t)$ 可微, 且 $\Phi(t)=\Psi(t)+\varepsilon(t)$, $\Psi(t)=0$• 如果存在 $\rho>0$, 使当 $|t-\phi|\leqslant\rho$ 时, 有

a) $r=\min|\Psi'(t)|>0$,

b) $E=\max|\varepsilon(t)|<\min\left\{|\Psi(\phi-\rho)|,|\Psi(\phi+\rho)|\right\}$,

则在点 $t=\phi$ 的邻域内存在 $\Phi(t)$ 的零点 φ, 满足

$$|\varphi-\phi|\leqslant\frac{E}{r}\cdot$$

利用该引理 3, 我们可以研究 Krawtchouk 多项式零点的渐近性态•

(i) 对于 $0<v<q$ 时, 将Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$ 的零点记为 $\lambda_{n,s}(s=1,2,\cdots,n)$, 并由大到小排列, 即有 $\lambda_{n,1}>\lambda_{n,2}>\cdots>\lambda_{n,n-1}>\lambda_{n,n}$• 令

$$f(\lambda)=p^{-n}\sigma^{\lambda N}n^{1/3}\mathrm{e}^{-n(\beta^2/4+1/2+\gamma)}\left(a_0+\frac{\beta}{2}b_0\right)^{-1}K_n(\lambda N),\tag{13}$$

$$g(\lambda)=A_{\mathrm{i}}\left\{-n^{2/3}(\lambda_+-\lambda)\left(\frac{c_+}{v}\right)^{2/3}+\frac{n^{-1/3}}{2}\left[1-\left(\frac{c_+}{v}\right)^{-1/3}\frac{\sigma}{1-v}\frac{(pv)^{-1/2}r_0^{1/2}}{(1-r_0)(\sigma+r_0)}\right]\right\},\tag{14}$$

$$\varepsilon(\lambda)=O(n^{-2/3}),\tag{15}$$

则由定理 1, 有 $f(\lambda)=g(\lambda)+\varepsilon(\lambda)$• 显然, $f(\lambda)$ 的零点就是 $K_n(\lambda N)$ 的零点•

首先讨论 $g(\lambda)$ 的零点• 记 $b_s(s=1,2,\cdots)$ 是 $g(\lambda)$ 的零点, 即 $g(b_s)=0$; 又记 $a_s(s=1,2,\cdots)$ 为 Airy 函数的零点, 即 $A_{\mathrm{i}}(a_s)=0$, 不妨设 $\cdots<a_s<a_{s-1}<\cdots<a_2<a_1<0$; 由式(14) 我们得出 a_s 与 b_s 的关系

$$-n^{2/3}(\lambda_+-b_s)\left(\frac{c_+}{v}\right)^{2/3}+\frac{n^{-1/3}}{2}\left[1-\left(\frac{c_+}{v}\right)^{-1/3}\frac{\sigma}{1-v}\frac{(pv)^{-1/2}r_0^{1/2}}{(1-r_0)(\sigma+r_0)}\right]=a_s,$$

解出 b_s, 并注意到式(7), 便得

$$b_s=\lambda_++a_s\left(\frac{c_+}{v}\right)^{-2/3}n^{-2/3}+\frac{n^{-1}}{2}\left[\frac{v}{1-v}\frac{p}{r_0}-\left(\frac{c_+}{v}\right)^{-2/3}\right]\cdot$$

由引理 3, 存在 $f(\lambda)$ 的零点 $\lambda_{n,s}$, 有

$$\lambda_{n,s}=b_s+\delta_{n,s}=\lambda_++a_s\left(\frac{c_+}{v}\right)^{-2/3}n^{-2/3}+\frac{n^{-1}}{2}\left[\frac{v}{1-v}\frac{p}{r_0}-\left(\frac{c_+}{v}\right)^{-2/3}\right]+\delta_{n,s}\cdot$$

由式(14) 和(15), 得

$$|\varepsilon(\lambda)| \leqslant E n^{-2/3},$$

$$|g'(\lambda)| = \left| A_i'\left\{ -n^{2/3}(\lambda_+ - \lambda)\left(\frac{c_+}{v}\right)^{2/3} + \frac{n^{-1/3}}{2}\left[1 - \left(\frac{c_+}{v}\right)^{-1/3}\frac{\sigma}{1-v}\frac{(pv)^{-1/2} r_0^{1/2}}{(1-r_0)(\sigma + r_0)}\right]\right\}\right| n^{2/3}\left(\frac{c_+}{v}\right)^{2/3} \geqslant G n^{2/3},$$

其中 E 和 G 是常数• 则由引理 3, 有

$$|\delta_{n,s}| \leqslant \frac{E n^{-2/3}}{G n^{2/3}} = \frac{E}{G} n^{-4/3}•$$

(ii) 对于 $0 < v < p$ 时, 将 Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$ 的零点记为 $\lambda_{n,s}(s = 1, 2, \cdots, n)$, 并由小到大排列, 即有 $\lambda_{n,1} < \lambda_{n,2} < \cdots < \lambda_{n,n-1} < \lambda_{n,n}$• 类似地可以得到与(i)相似的结果, 推导过程略• 于是得出下列结论:

定理 2　(i) 对于任意固定的 $v = (n/N) \in (0, q)$, Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$(其中 $\lambda = x/N, 0 < \lambda < 1$) 零点 $\lambda_{n,s}$ 的渐近展开式为

$$\lambda_{n,s} = \lambda_+ + a_s\left(\frac{c_+}{v}\right)^{-2/3} n^{-2/3} + \frac{n^{-1}}{2}\left[\frac{v}{1-v}\frac{p}{r_0} - \left(\frac{c_+}{v}\right)^{-2/3}\right] + \delta_{n,s},$$

其误差限为

$$|\delta_{n,s}| \leqslant \frac{E n^{-2/3}}{G n^{2/3}} = \frac{E}{G} n^{-4/3};$$

(ii) 对于任意固定的 $v = (n/N) \in (0, p)$, Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$(其中 $\lambda = x/N$, $0 < \lambda < 1$) 零点 $\lambda_{n,s}$ 的渐近展开式为

$$\lambda_{n,s} = \lambda_- - a_s\left(\frac{c_-}{v}\right)^{-2/3} n^{-2/3} + \frac{n^{-1}}{2}\left[\frac{v}{1-v}\frac{p}{r_0} - \left(\frac{c_-}{v}\right)^{-2/3}\right] + \delta_{n,s},$$

其误差限为

$$|\delta_{n,s}| \leqslant \frac{E n^{-2/3}}{G n^{2/3}} = \frac{E}{G} n^{-4/3}•$$

这里 $s = 1, 2, \cdots, n$, E 和 G 与 E 和 G 都是常数•

定理 2 获得了 Krawtchouk 多项式零点的渐近性态, 给出了 Krawtchouk 多项式 $K_n(\lambda N)$(其中 $\lambda = x/N, 0 < \lambda < 1$) 零点的一个渐近展开式, 并得到了相应的误差限• 该误差限是 $O(n^{-4/3})$•

[参　考　文　献]

[1] Sharapudinov I I. Asymptotic properties of Krawtchouk polynomials[J]. Mat Zametki, 1988, **44**(5): 682—693; English translation, Math Notes, 1988, **44**(5): 855—862.

[2] Ismail M E H, Simeonov P. Strong asymptotics for Krawtchouk polynomials[J]. J Comput Appl Math, 1998, **100**(2): 121—144.

[3] Li X C, Wong R. A uniform asymptotic expansion for Krawtchouk polynomials[J]. Journal of Approximation Theory, 2000, **106**(1): 155—184.

[4] Olver F W J. Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large order [J]. J Res Nat Bur Standards Sect B, 1959, **63**(2): 131—169.

[5] Hethcote H W. Error bounds for asymptotic approximations of zeros of transcendental functions[J]. SIAM J Math Anal, 1970, **1**(2): 147—152.

[6] Ma E J, Zhu X F, Li X C. Asymptotic approximations of Jacobi polynomials and their zeros with error bounds[J]. Tsinghua Science and Technology, 2003, **8**(1): 71—78.
[7] 朱晓峰, 李秀淳. 关于 Jacobi 函数渐近性态[J]. 数学的实践与认识, 2005, **35**(4): 200—205.
[8] Zhu X F, Li X C. Asymptotic approximations of Jacobi polynomials and their zeros with error bounds [J]. Acta Mathematica Sinica, 2006, **22**(3): 729—740.

Asymptotic Expansions of Zeros for Krawtchouk Polynomials With Error Bounds

ZHU Xiao_feng, LI Xiu_chun
(Department of Basic Science, Beijing Institute of Graphic Communication,
Beijing 102600, P.R.China)

Abstract: Krawtchouk polynomials are frequently applied in modern physics. Based on the results which were educed by Li and Wong, the asymptotic expansions of Krawtchouk polynomials were improved by using Airy function, and the uniform asymptotic expansions were got. Furthermore, the asymptotic expansions of the zeros for Krawtchouk polynomials were again deduced by using the property of the zeros of Airy function, and their corresponding error bounds were discussed. The obtained results give the asymptotic property of Krawtchouk polynomials with their zeros, which are better than the results educed by Li and Wong.

Key words: Krawtchouk polynomial; asymptotic expansion; zero; error bounds