

直角平面内圆孔对稳态 SH 波的散射^{*}

史文谱¹, 刘殿魁², 宋永涛³, 京莲³, 胡爱琴⁴

- (1. 烟台大学 机电学院, 山东 烟台 264005;
2. 哈尔滨工程大学 建筑工程学院, 哈尔滨 150001;
3. 烟台大学 光电学院, 山东 烟台 264005;
4. 烟台技术学院, 山东 烟台 264005)

(陈予恕、沈亚鹏推荐)

摘要: 利用复变函数方法和多极坐标移动技术, 研究了直角平面内圆孔在直边分布有反平面稳态载荷时的 SH 波散射问题。首先构造出不含有圆孔时满足边界应力条件的 Green 函数解; 其次提出直角平面内存在圆孔时满足边界应力自由条件的散射波解, 并利用叠加原理写出问题的位移总波场。借助于多极坐标移动技术和圆孔边界处应力自由条件, 列出求解散射波解中未知系数的无穷代数方程组, 在满足计算精度的前提下, 通过有限项截断进行求解。作为算例, 具体讨论了圆孔边界处的环向动应力随不同波数、圆孔位置及载荷分布位置和分布范围大小的变化情况, 算例结果说明了算法的有效实用性。

关键词: SH 波散射; 圆孔; 动应力; 直角平面; 多极坐标

中图分类号: O347.3 **文献标识码:** A

引 言

结构中存在缺陷或工艺性孔洞等各种形式的几何或物理性质的不连续性现象是不可避免的, 这种结构上局部的几何不连续性或者物性不连续性必然导致结构内位移和应力的重新分配。为了满足理论和工程上的需要, 几十年来人们在这方面做了大量的研究, 取得了许多有价值的成果^[1-20]。总起来看研究方法主要有两种, 一种是解析法, 另外一种数值法。其中解析法在理解物理现象、透视现象的本质方面有数值法不可比拟的优点, 但由于数学上的困难, 解析法在应用上仍然有其很大的局限; 而数值法在求解复杂边值问题方面不仅方法统一, 而且适用范围广, 但它在高频数值求解方面却有其一定的困难和局限性。SH 波散射作为弹性波散射问题中比较简单的模型, 尽管理论上已比较成熟, 但仍然有许多边值问题待解或没有很好解决。从文献来看人们在全空间或半空间问题上研究居多, 而有关直角平面空间内含有圆孔等异质体的 SH 波散射问题研究却不多见, 数值算例的情形更是少见。本文针对直角平面空间内圆孔对直边界上作用稳态反平面分布载荷时的动态响应问题进行了研究, 利用复变函数法和多极坐标系提出了满足直边界上应力自由条件且含有未知系数的散射波解, 并与预先构造

* 收稿日期: 2005-06-13; 修订日期: 2006-05-08

作者简介: 史文谱(1963—), 男, 山东烟台人, 副教授, 博士, 主要从事固体波动理论及应用研究(联系人, E-mail: swp666666@eyou.com)。

出的问题的 Green 函数解进行叠加得到问题的总波场,借助于圆孔处的应力自由边界条件和多极坐标移动技术列出求解未知系数的无穷代数方程组,在满足计算精度的基础上通过有限项截断进行了求解。具体讨论了圆孔边界处的环向动应力随波数、圆孔位置和载荷分布范围的变化情况,给出的算例结果表明本文方法是有效可行的。

1 数学模型及理论分析

均匀、各向同性的线弹性直角平面空间内存在一个半径为 R 的圆孔,其位置参数为 $(-d, h)$,建立坐标系 xOy 如图 1 所示。直角平面水平边界上 $(a-d, b-d)$ 范围内作用有 $\tau_0 e^{-i\omega t}$ 的反平面分布载荷。在略去时间因子 $e^{-i\omega t}$ 的情况下,介质内 SH 波位移场 u 满足如下 Helmholtz 方程:

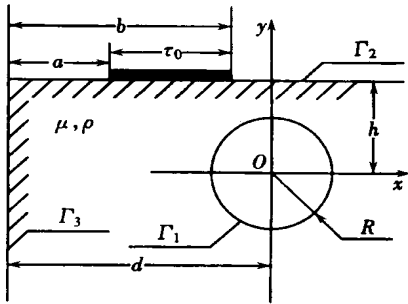


图 1 直角平面空间内圆孔对 SH 波的散射

直角坐标系下为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0; \quad (1)$$

极坐标系下为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u = 0. \quad (2)$$

若引进复数坐标 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, 考虑到如下 4 个偏微分公式:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = i \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2},$$

则方程 (1) 有如下复数变量形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 u = 0; \quad (3)$$

相应的剪切应力,直角坐标系下为

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4)$$

极坐标系下为

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (5)$$

复数坐标系下为

$$\tau_{xz} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right], \quad \tau_{yz} = i \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right], \quad (6)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left[e^{i\theta} \frac{\partial u}{\partial z} + e^{-i\theta} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right], \quad \tau_{\theta z} = i \mu \left[e^{i\theta} \frac{\partial u}{\partial z} - e^{-i\theta} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right]. \quad (7)$$

其中: $k = \omega / V_S, V_S = \sqrt{\mu/\rho}$ 分别是波数和介质中的剪切波速; μ, ρ 分别是介质材料的剪切模量和质量体密度; ω 是激励圆周频率。介质中点的直角坐标为 (x, y) , 极坐标为 (r, θ) , 复数坐标为 (z, \bar{z}) , 它们之间存在关系: $r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \theta = \arctan(y/x); z = x + iy, \bar{z} = x - iy; z = r e^{i\theta}, \bar{z} = r e^{-i\theta}; i$ 是虚数单位, $i^2 = -1$ 。

问题的边界条件是

$$\Gamma_1: \tau_z = 0, \tag{8}$$

$$\Gamma_2: \tau_z = \begin{cases} \tau_0, & x \in (a-d, b-d), \\ 0, & x \notin (a-d, b-d), \end{cases} \tag{9}$$

$$\Gamma_3: \tau_{xz} = 0 \tag{10}$$

在直角坐标系 xOy 中, 当图 1 所示空间内不含有圆孔时, 考虑水平边界 Γ_2 上点源载荷 $\delta(z - z_0)$ 作用时的 Green 函数解可构造为

$$G^{(1)}(z, z; z_0, z_0) = [i/(2\mu)] [H_0^{(1)}(k|z - z_0|) + H_0^{(1)}(k|z + z_0 + 2d|)], \tag{11}$$

其中 $d > 0, \text{Im}(z_0) = h > 0, \text{Re}(z_0) \in (a-d, b-d), 0 \leq a < b$.

由于在边界 Γ_2 上的分布力 $f(z, t) = \tau_0 e^{-i\omega t}$ 的作用, 在不含有圆孔的介质内产生的位移场(其中略去时间因子)为

$$W^{(1)}(z, z) = \frac{i\tau_0}{2\mu} \int_{a-d}^{b-d} [H_0^{(1)}(k|z_{01}|) + H_0^{(1)}(k|z_{02}|)] dx_0, \tag{12}$$

其中, $z_{01} = z - (x_0 + ih), z_{02} = z + (x_0 - ih) + 2d, H_0^{(1)}(\cdot)$ 是 0 阶第一类 Hankel 函数.

在直角坐标系 xOy 中, 当图 1 所示空间内含有圆孔时, 考虑到圆孔的散射作用而产生的散射波应该满足介质空间两直角边上的应力自由条件, 它可以构造如下:

$$W^{(S)}(z, z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \left\{ H_n^{(1)}(k|z_1|) \left[\frac{z_1}{|z_1|} \right]^n + H_n^{(1)}(k|z_2|) \left[\frac{z_2}{|z_2|} \right]^{-n} + (-1)^n H_n^{(1)}(k|z_3|) \left[\frac{z_3}{|z_3|} \right]^{-n} + (-1)^n H_n^{(1)}(k|z_4|) \left[\frac{z_4}{|z_4|} \right]^n \right\}, \tag{13}$$

其中, $z_1 = z, z_2 = z - 2hi, z_3 = z + 2d, z_4 = z_3 - 2hi, H_n^{(1)}(\cdot)$ 是 n 阶第一类 Hankel 函数.

这样图 1 介质空间内满足两直角边应力条件的总波场为

$$W^{(T)}(z, z) = W^{(1)}(z, z) + W^{(S)}(z, z) \tag{14}$$

利用边界条件(8), 可以得到如下确定未知系数 $A_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的无穷代数方程组:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n \zeta_n = \xi \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned} \zeta_n = & \frac{k\mu}{2} \left\{ \left[H_{n-1}^{(1)}(k|z_1|) \left(\frac{z_1}{|z_1|} \right)^{n-1} - H_{n+1}^{(1)}(k|z_2|) \left(\frac{z_2}{|z_2|} \right)^{-n-1} - \right. \right. \\ & \left. \left. (-1)^n H_{n+1}^{(1)}(k|z_3|) \left(\frac{z_3}{|z_3|} \right)^{-n-1} + (-1)^n H_{n-1}^{(1)}(k|z_4|) \left(\frac{z_4}{|z_4|} \right)^n \right] e^{i\theta} + \right. \\ & \left. \left[-H_{n+1}^{(1)}(k|z_1|) \left(\frac{z_1}{|z_1|} \right)^{n+1} + H_{n-1}^{(1)}(k|z_2|) \left(\frac{z_2}{|z_2|} \right)^{-n+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. (-1)^n H_{n-1}^{(1)}(k|z_3|) \left(\frac{z_3}{|z_3|} \right)^{-n+1} - (-1)^n H_{n+1}^{(1)}(k|z_4|) \left(\frac{z_4}{|z_4|} \right)^n \right] e^{-i\theta} \right\}, \\ \xi = & \frac{i\tau_0 k}{4} \int_{a-d}^{b-d} \left\{ \left[H_1^{(1)}(k|z_{01}|) \left(\frac{z_{01}}{|z_{01}|} \right) + H_1^{(1)}(k|z_{02}|) \left(\frac{z_{02}}{|z_{02}|} \right) \right] e^{i\theta} + \right. \\ & \left. \left[H_1^{(1)}(k|z_{01}|) \left(\frac{z_{01}}{|z_{01}|} \right) + H_1^{(1)}(k|z_{02}|) \left(\frac{z_{02}}{|z_{02}|} \right) \right] e^{-i\theta} \right\} dx_0 \end{aligned}$$

为了求解方程(15), 可在方程(15)的两边乘以 $e^{-im\theta}$, 并在区间 $(-\pi, \pi)$ 上积分, 则有

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n \phi_{mn} = \eta_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (16)$$

其中

$$\phi_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_n e^{-im\theta} d\theta, \quad \eta_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \xi e^{-im\theta} d\theta.$$

(16) 式即是确定 $A_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的无穷代数方程组。

圆孔边界处的环向动应力集中系数(DSCF) γ 可以表达为

$$\gamma = |\tau_{\theta z} / \tau_0|, \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} = & \frac{ik\mu}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_n \left[H_{n-1}^{(1)}(k|z_1|) \left(\frac{z_1}{|z_1|} \right)^{n-1} - H_{n+1}^{(1)}(k|z_2|) \left(\frac{z_2}{|z_2|} \right)^{-n-1} - \right. \right. \\ & \left. \left. (-1)^n H_{n+1}^{(1)}(k|z_3|) \left(\frac{z_3}{|z_3|} \right)^{-n-1} + (-1)^n H_{n-1}^{(1)}(k|z_4|) \left(\frac{z_4}{|z_4|} \right)^{n-1} \right] e^{i\theta} - \right. \\ & \left. \left[-H_{n+1}^{(1)}(k|z_1|) \left(\frac{z_1}{|z_1|} \right)^{n+1} + H_{n-1}^{(1)}(k|z_2|) \left(\frac{z_2}{|z_2|} \right)^{-n+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. (-1)^n H_{n-1}^{(1)}(k|z_3|) \left(\frac{z_3}{|z_3|} \right)^{-n+1} - (-1)^n H_{n+1}^{(1)}(k|z_4|) \left(\frac{z_4}{|z_4|} \right)^{n+1} \right] e^{-i\theta} \right\} + \\ & \frac{\tau_0 k}{4} \int_{a-d}^{b-d} \left\{ \left[H_1^{(1)}(k|z_{01}|) \left(\frac{z_{01}}{|z_{01}|} \right) + H_1^{(1)}(k|z_{02}|) \left(\frac{z_{02}}{|z_{02}|} \right) \right] e^{i\theta} - \right. \\ & \left. \left[H_1^{(1)}(k|z_{01}|) \left(\frac{z_{01}}{|z_{01}|} \right) + H_1^{(1)}(k|z_{02}|) \left(\frac{z_{02}}{|z_{02}|} \right) \right] e^{-i\theta} \right\} dx_0. \end{aligned}$$

2 数值算例及分析

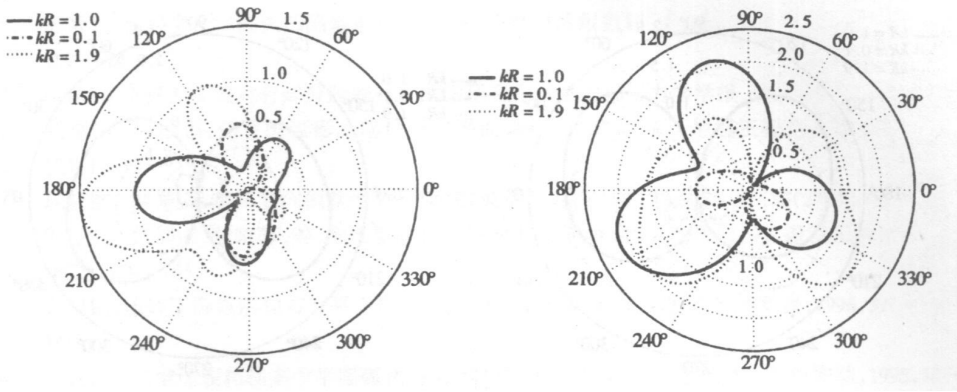
本文计算的算例是假设 $\tau_0 = 1.0 \text{ Pa/m}$, 无量纲波数分别为 $kR = 0.1, 1.0, 1.9$, 材料剪切模量为 $8.0 \times 10^4 \text{ Pa}$ 以及圆孔离直边界不同距离的情况下, 圆孔边界处环向动应力的变化情况, 以考察外部激励频率和介质边界对圆孔边界处动应力集中程度的影响。算例结果如图 2 ~ 4。

图 2 考虑了圆孔靠近两条直边界时载荷分布范围大小及不同无量纲波数 kR 对圆孔边界处环向动应力的影响情况。从图上可看出, 环向动应力的中高频反应强烈, 低频反应较小; 并且随着载荷分布范围增大, 相应的反应也随着增大, 这与实际情况是相符的。

图 3 考虑了当载荷分布范围大小、位置不变且圆孔中心远离两条直边界时, 圆孔边界处环向动应力随不同波数的变化情况。从图中可以看出, 低频反应最大, 次之是中频, 最后是高频, 但是数值都比较小, 并且远离距离越大, 数值越接近于零。

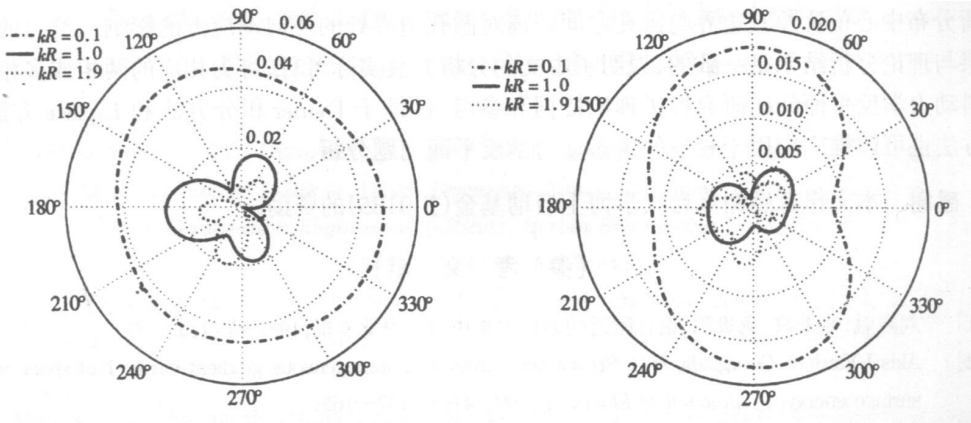
图 4 考虑了载荷分布在上边界, 且其分布中心恰在圆孔上方, 圆孔接近上边界时圆孔边界处环向动应力随不同波数、不同载荷分布范围大小时的变化情况。从图上可看出, 随着载荷分布范围增大, 环向动应力的中频反应增大, 高频反应减少, 低频反应数值不明显。并且环向动应力的分布表现出强烈的对称性, 说明介质的左边界对圆孔边界处的环向动应力已经没有影响。实际计算表明, 当 $d/R > 350$ 时, 这种影响即可达到忽略的程度。

从作者查看的大量文献来看, 由于没有现存可用结果比较以验证本文算法的有效性, 本文特别针对图 4 的两种载荷分布范围条件, 计算了半无限空间(即直角平面空间没有左边界



(a) $(b - a)/R = 1$ (b) $(b - a)/R = 5$

图 2 $h/R = d/R = 1.5, a = 0$ 时圆孔边界处环向动应力 τ_θ (Pa) 随不同无量纲波数 kR 的变化情况



(a) $h/R = d/R = 500$ (b) $h/R = d/R = 5000$

图 3 $a/R = 0, b/R = 5$ 时圆孔边界处环向动应力 τ_θ (Pa) 随不同无量纲波数 kR 的变化情况

的情况)内浅埋圆孔对该圆孔正上方边界上,对称圆孔作用的均布反平面稳态载荷的动态响应情况。发现所得结果与本文算法在 $d/R = 500$ 时的结果是完全一致的。进一步计算表明,当 $d/R > 350$ 时,直角平面左边界对圆孔边界处的环向动应力集中系数的影响已可以忽略了,即问题退化为半空间浅埋圆孔的相应问题。当然,按照本文算法还可类似讨论和计算其他不同情况时的结果。显然,若按照半空间浅埋圆孔问题处理,则半空间中的散射波解可写为如下形式,它能够预先满足半空间边界应力自由的条件:

$$W^{(S)}(z, z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \left\{ H_n^{(1)}(k|z_1|) \left[\frac{z_1}{|z_1|} \right]^n + H_n^{(1)}(k|z_2|) \left[\frac{z_2}{|z_2|} \right]^{-n} \right\}. \quad (18)$$

(18) 式中的 z_1, z_2 的定义同(13)式的注解。

3 结 论

本文采用复变函数法及多极坐标移动技术,讨论了直角平面区域内,圆孔对直边界上反平面局部分布稳态载荷的动态响应问题。具体探讨了不同无量纲波数、不同载荷分布范围大小、

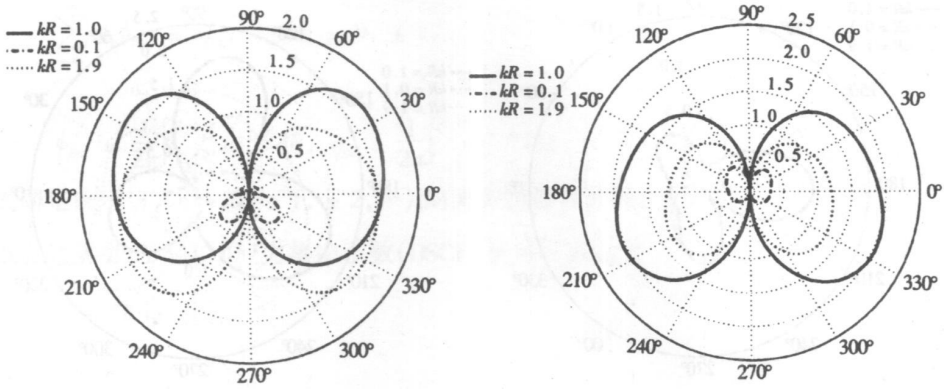
(a) $(b-a)/R = 5$ (b) $(b-a)/R = 25$

图4 $h/R = 1.5, d/R = 500$ 且载荷分布中心恰在圆孔正上方时圆孔边界处的环向动应力 τ_{θ} (Pa) 随不同波数 kR 的变化情况

载荷分布中心位置及直边界与圆孔之间距离对圆孔边界处的环向动应力的影响。给出的算例结果与理论分析结果是一致的,说明了本文的分析方法实际可行,可为相应的两相或多相复合材料动力学反平面问题研究提供理论依据和参考,借助于 Fourier 积分方法和 Laplace 方法,本文方法也可以推广应用于相应的瞬态动力学反平面问题分析。

感谢 本文作者感谢烟台大学博士启动基金(JX03B5)的资助。

[参 考 文 献]

- [1] 刘殿魁,盖秉政,陶贵源.论孔附近的动应力集中[J].力学学报,1981,特刊,65—77.
- [2] Akis I Vardoul, Georgiadis H G. SH surface waves in a homogeneous gradient elastic half space with surface energy[J]. Journal of Elasticity, 1997, 47(2): 147—165.
- [3] Emets V F, Kunets Ya I, Matus V V. Scattering of SH waves by an elastic thin walled rigidly supported inclusion[J]. Archive of Applied Mechanics, 2004, 73(11/12): 769—780.
- [4] 刘殿魁,刘宏伟. SH波散射与界面圆孔附近的动应力集中[J].力学学报,1998,30(5): 597—604.
- [5] 刘殿魁,许贻燕.各向异性介质中 SH波与多个半圆形凹陷地形的相互作用[J].力学学报,1993,25(1): 94—102.
- [6] 许贻燕,韩峰.平面 SH波在相邻多个半圆形凹陷地形上的散射[J].地震工程与工程震动,1992,12(2): 12—17.
- [7] 韩峰,刘殿魁.各向异性介质中 SH波对有衬砌的任意形半凹陷地形的散射[J].应用数学和力学,1997,18(8): 753—761.
- [8] 刘殿魁,田家勇. SH波对界面圆柱形弹性夹杂散射及动应力集中[J].爆炸与冲击,1991,9(2): 115—123.
- [9] 崔志刚,邹永超,刘殿魁. SH波对圆弧形凸起地形的散射[J].地震工程与工程振动,1998,18(4): 8—14.
- [10] 曹欣荣,宋天舒,刘殿魁.任意形状凸起地形对平面 SH波的散射[J].应用数学和力学,2001,22(9): 976—982.
- [11] 陈志刚,刘殿魁.带凹陷的弹性半空间表面作用反平面简谐线源载荷时的 Green 函数[J].哈尔滨工程大学学报,2002,23(4): 103—109.
- [12] 史守峡. SH波对结构表面上含有多个半圆形介质夹杂的散射[J].航空学报,2001,22(1): 19—23.

- [13] 房莹光. 相邻多个浅圆弧凹陷地形对平面 SH 波散射的级数解[J]. 应用数学和力学, 1995, 16(7): 615—624.
- [14] 汪越胜, 王铎. SH 波对有部分脱胶衬砌的圆形孔洞的散射[J]. 力学学报, 1994, 26(4): 462—469.
- [15] 袁晓铭, 廖振鹏. 任意圆弧形凸起地形对平面 SH 波的散射[J]. 地震工程与工程振动, 1996, 16(2): 1—13.
- [16] 袁晓铭, 廖振鹏. 圆弧型沉积盆地对平面 SH 波的散射[J]. 华南地震, 1995, 15(2): 1—8.
- [17] 梁建文, 张郁山, 顾晓鲁, 等. 圆弧型层状凹陷地形对平面 SH 波的散射[J]. 振动工程学报, 2003, 16(2): 158—165.
- [18] 袁晓铭. 地表下圆弧形加塞区平面散射对地面运动的影响[J]. 地球物理学报, 1996, 39(3): 373—381.
- [19] 房莹光. 二维地表相临多个半圆弧沟谷对 SH 波的散射[J]. 地震工程与工程振动, 1995, 15(1): 85—91.
- [20] 何钟怡, 樊洪明, 刘有军. SH 波绕界面孔的散射[J]. 力学学报, 2002, 34(1): 68—75.

Scattering of Circular Cavity in Right_Angular Planar Space to Steady SH_Wave

SHI Wen_pu¹, LIU Dian_kui², SONG Yong_tao³, CHU Jing_lian³, HU Ai_qin⁴

(1. Electromechanical Institute, Yantai University, Yantai, Shandong 264005, P. R. China;

2. Construction Engineering Institute, Harbin Engineering University,
Harbin 150001, P. R. China;

3. Photoelectrical Institute, Yantai University, Yantai, Shandong 264005, P. R. China;

4. Yantai Training College of High Mechanic, Yantai, Shandong 264005, P. R. China)

Abstract: Complex function method and multi_polar coordinate transformation technology are used here to study scattering of circular cavity in right_angular planar space to SH_wave with out_of_plane loading on the horizontal straight boundary. At first, Green function of right_angular planar space which has no circular cavity was constructed; then the scattering solution which satisfies the free stress conditions of the two right_angular boundaries with the circular cavity existing in the space was formulated, therefore, the total displacement field can be constructed using overlapping principle. An infinite algebraic equations of unknown coefficients existing in the scattering solution field can be gained using multi_polar coordinate and the free stress condition at the boundary of the circular cavity, it can be solved by using limit items in the infinite series which can give a high computation precision. An example was given to illustrate the variations of the tangential stress at the boundary of the circular cavity to different dimensionless wave numbers and the location of the circular cavity and the loading center and the distributing range of out_of_plane loading. The results of the example show the efficiency and the effectiveness of the method introduced here.

Key words: scattering of SH_wave; circular cavity; dynamic stress; right_angular planar space; multi_polar coordinate