

# 谐和与随机噪声联合作用下 Duffing 振子的双峰稳态密度\*

戎海武<sup>1,2</sup>, 王向东<sup>1</sup>, 孟光<sup>2</sup>, 徐伟<sup>3</sup>, 方同<sup>3</sup>

(1. 佛山大学 数学系, 广东 佛山 528000;

2. 上海交通大学 振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030;

3. 西北工业大学 数学系, 西安 710072)

(张石生推荐)

**摘要:** 研究 Duffing 振子在谐和与随机噪声联合作用下系统响应的双峰稳态概率密度问题。用多尺度法分离了系统的快变项, 得到了系统慢变项满足的随机微分方程。用线性化方法求出了双峰稳态概率密度的表达式。数值模拟表明提出的方法是有效的。

**关键词:** Duffing 振子; 双峰稳态概率密度; 多尺度法; 线性化方法

**中图分类号:** O324      **文献标识码:** A

## 引 言

众所周知, Duffing 振子在确定性谐和激励下, 在一定的参数范围内, 系统可有 3 个稳态响应, 其中大的和小的稳定的, 而中间的是不稳定的。在窄带随机噪声作用下, Duffing 振子也有类似的现象, 即在一定的参数范围内, 系统响应的稳态概率密度是双峰的。这种现象已经引起了人们的注意, 朱位秋等<sup>[1]</sup>用数值模拟的方法研究了 Duffing 振子在窄带随机噪声作用下系统响应的双峰稳态概率密度、跳跃和分叉现象; 黄志龙等<sup>[2]</sup>用随机平均法和路径积分法研究了 Duffing 振子在确定性谐和与小强度随机噪声联合作用下系统响应的双峰稳态概率密度现象, 但没有给出双峰稳态概率密度的解析表达式; Wagner<sup>[3]</sup>应用摄动法求出了 Duffing 振子在确定性谐和与小强度随机噪声联合作用下系统响应的双峰稳态概率密度的近似表达式。本文则用多尺度法和线性化方法研究了 Duffing 振子在谐和与随机噪声联合作用下系统的响应问题, 在一定的参数范围内, 系统的响应有两种可能的运动状态, 即系统响应的稳态概率密度是双峰的, 本文求出了系统响应的双峰稳态概率密度的近似表达式。数值模拟表明本文提出的方法是有效的。

## 1 多尺度法

考虑如下受谐和与随机噪声联合作用的 Duffing 振子

\* 收稿日期: 2004\_09\_03; 修订日期: 2006\_08\_07

基金项目: 国家自然科学基金(重点)资助项目(10332030); 广东省自然科学基金资助项目(04011640)

作者简介: 戎海武(1966—), 男, 浙江宁波人, 教授(联系人。Tel: + 86\_757\_82988684; E-mail: ronghw@foshan.net)。

$$\ddot{u} + 2\beta\epsilon\dot{u} + \omega^2 u + \alpha u^3 = \epsilon[h \cos \Omega + \xi(t)], \quad (1)$$

式中  $\epsilon \ll 1$  为小参数,  $\beta, \omega, \alpha$  都是常数,  $\xi(t)$  是零均值的随机噪声项. 当  $\xi(t)$  是白噪声时, 类似的模型由 Wagner<sup>[3]</sup> 讨论过. 但是本文中,  $\xi(t)$  可以是白噪声也可以是其他调制噪声. 本文主要用多尺度法<sup>[4,5]</sup> 研究这种情形. 多尺度法已广泛应用于确定系统的研究中, 近些年来在随机系统中也有一些应用. 在随机外激的情形, Rajan 和 Davies<sup>[6]</sup>, Nayfeh 和 Serhan<sup>[7]</sup> 用多尺度法研究了单自由度非线性系统受随机外激时的响应; 本文作者<sup>[8,9]</sup> 则将多尺度法推广到非线性系统的随机参激情形和二自由度非线性随机系统中. 设系统(1)具有如下形式的解

$$u(t, \epsilon) = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (2)$$

式中  $T_0 = t, T_1 = \epsilon$  分别是快变项和慢变项.

本文只对首次近似解  $u_0(T_0, T_1)$  进行讨论. 记  $D_0 = \partial/\partial T_0, D_1 = \partial/\partial T_1$ , 则有

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \epsilon D_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \dots, \quad (3)$$

将方程(2)、方程(3)代入方程(1)中, 并比较方程两边  $\epsilon$  同次幂的系数, 可得下列微分方程组

$$D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0, \quad (4)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\beta D_0 u_0 - \alpha u_0^3 + h \cos \Omega + \xi(t). \quad (5)$$

方程(4)的解为

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1) \exp(i\omega T_0) + cc, \quad (6)$$

式中  $cc$  表示前述各项的共轭,  $A(T_1)$  是响应的振幅. 将(2)式、(6)式两式代入(5)式可得

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2i\omega A' \exp(i\omega T_0) - 2i\omega\beta A \exp(i\omega T_0) - \alpha A^3 \exp(3i\omega T_0) - 3\alpha^2 A \exp(i\omega T_0) + \frac{h}{2} \exp[i(\omega T_0)] + cc + \xi \quad (7)$$

式中  $A', A$  分别表示  $A$  关于  $T_1$  的导数及共轭.

本文主要研究系统(1)的主共振响应即  $\Omega \approx \omega$  时的情形. 引入调谐参数  $\sigma, \Omega = \omega + \epsilon\sigma$ . 令(8)式右端中的奇异项为 0 可得

$$2i\omega A' + 2i\omega\beta A + 3\alpha A^2 A - \frac{h}{2} \exp(i\sigma T_1) - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \xi(T_0) \exp(-i\sigma T_0) dT_0 = 0. \quad (8)$$

将  $A$  表示成极坐标的形式

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) \exp[i\varphi(T_1)], \quad (9)$$

将(9)式代入(8)式并分离实部和虚部可得

$$\begin{cases} a' = -\beta a + \frac{h}{2\omega} \sin \eta + \xi_1, \\ a\eta' = \alpha a - \frac{3}{8} \alpha a^3 + \frac{h}{2\omega} \cos \eta + \xi_2, \end{cases} \quad (10)$$

式中  $\eta = \sigma T_1 - \varphi$ ,

$$\xi_1 = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \xi_S \sin \gamma d\gamma, \quad \xi_2 = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \xi_C \cos \gamma d\gamma, \quad \gamma = \Omega - \eta. \quad (11)$$

由(10)式解出  $a$  和  $\eta$  后, 可得方程(1)的首次近似解为

$$u = a(\epsilon) \cos(\Omega - \eta(\epsilon)) + O(\epsilon).$$

## 2 线性化方法

方程(10)很难精确求解, 可用近视方法求解. 设与确定性谐和激励  $h \cos \Omega$  相比, 随机项

$\xi(t)$  较小。首先讨论当  $\xi(t) = 0$  即受确定性谐和激励时 Duffing 系统的稳态响应, 当  $\xi(t) = 0$  时, 方程(10)变为

$$\begin{cases} a' = -\beta a + \frac{h}{2\omega} \sin \eta, \\ a\eta' = \alpha a - \frac{3}{8}\alpha\omega a^3 + \frac{h}{2\omega} \cos \eta. \end{cases} \quad (12)$$

对于稳态解  $a = a_0, \eta = \eta_0$ , 满足  $a' = 0, \eta' = 0$ , 于是方程(12)变为

$$\begin{cases} \beta a = \frac{h}{2\omega} \sin \eta, \\ -\alpha a + \frac{3}{8}\alpha\omega a^3 = \frac{h}{2\omega} \cos \eta. \end{cases} \quad (13)$$

由(13)式可得系统(1)的频率响应方程为

$$a^2 \left[ \beta^2 + \left[ \sigma - \frac{3\alpha}{8\omega} a^2 \right]^2 \right] = \frac{h^2}{4\omega^2}. \quad (14)$$

方程(14)对于  $a$  是6次方程, 考虑到  $a$  的非负性, 可知在一定的参数范围内系统可有3个解。通过稳定性分析可知其中中间的解是不稳定的, 只有大解和小解是稳定的, 物理上实现那个解取决于系统的初始值<sup>[4, 5]</sup>。

在以后的数值模拟中, 我们取系统的参数为

$$\alpha = 1, \beta = 0.3, \omega = 1, \varepsilon = 0.05, h = 2.$$

此时系统的频率响应曲线见图1。

下面讨论当  $\xi(t) \neq 0$  时, 随机扰动对系统稳态响应的影晌。由于与确定性谐和激励  $h \cos \Omega t$  相比, 随机项  $\xi(t)$  较小, 可用线性化方法求解, 令

$$a = a_0 + a_1, \eta = \eta_0 + \eta_1, \quad (15)$$

式中  $a_0, \eta_0$  为由(13)式、(14)式确定的受确定性谐和激励时系统的稳态响应的幅值和相位角,  $a_1, \eta_1$  为小扰动项, 将此式代入(10)式并忽略高阶项可得线性化方程

$$\begin{cases} a_1' = -\beta a_1 + \left[ \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 - \alpha a_0 \right] \eta_1 + \xi_1, \\ \eta_1' = \left[ \frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha}{8\omega} a_0 \right] a_1 - \beta \eta_1 + \frac{\xi_2}{a_0}. \end{cases} \quad (16)$$

方程(16)可以用模态分析法<sup>[10]</sup>求解, 令

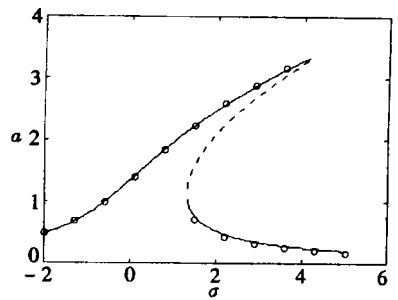
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ \frac{c_1(\lambda_1 + \beta)}{(3\alpha/8\omega)a_0^3 - \alpha a_0} & \frac{c_2(\lambda_2 + \beta)}{(3\alpha/8\omega)a_0^3 - \alpha a_0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

式中

$$c_k = \left[ \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 - \alpha a_0 \right] \left[ \frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha}{8\omega} a_0 \right] \sqrt{\left[ \left[ \frac{3\alpha}{8\omega} a_0^3 - \alpha a_0 \right] \left[ \frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha}{8\omega} a_0 \right] + (\lambda_k + \beta)^2 \right]}, \quad k = 1, 2,$$

$\lambda_1, \lambda_2$  是方程(16)系数矩阵的特征值。将(17)式代入(16)式, 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + f_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + f_2, \end{cases} \quad (18)$$



— 稳定解, - - - 不稳定解, ooo 数值解  
图1 系统(1)响应曲线 ( $\xi(t) = 0$ )

式中

$$f_k = \xi_1 + \frac{\lambda_k + \beta}{\sigma - (9\alpha/8\omega)a_0^2} \xi_2, \quad k = 1, 2 \quad (19)$$

从而可得  $x_1$  和  $x_2$  的一阶矩、二阶矩

$$\begin{cases} E[x_k] = 0, \\ E[x_k(t_1)x_l(t_2)] = \exp(\lambda t_1 + \lambda_2 t_2) \int_0^1 \int_0^2 \exp(-\lambda t_1 - \lambda_2 t_2) E[f_k(\tau_1)f_l(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2, \quad k, l = 1, 2; \end{cases} \quad (20)$$

式中  $E[\quad]$  表示数学期望。

作为例子, 本文讨论两种  $\xi(t)$  的情形。第一种是具有随机幅值的正弦过程

$$\xi(t) = w_1(T_1)\cos \Omega - w_2(T_1)\sin \Omega, \quad (21)$$

式中  $w_1(T_1)$  和  $w_2(T_1)$  关于时间慢变的随机过程。方程(21)代表的很大一类的随机噪声, 如路面不平度和地震波等, 常用的通过二阶滤波器得到的高斯过程也可以用模型(21)表示<sup>[7]</sup>。

由方程(11)和方程(21), 有

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \xi \sin \gamma d\gamma = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} [w_1(T_1)\cos(\Omega(T_1) + \gamma) - \\ &w_2(T_1)\sin(\Omega(T_1) + \gamma)] \sin \gamma d\gamma = \\ &\frac{1}{2\omega} [w_1(T_1)\sin(\Omega(T_1)) + w_2(T_1)\cos(\Omega(T_1))], \end{aligned}$$

上面的积分中, 和慢变量  $T_1$  有关的项  $w_1(T_1)$ 、 $w_2(T_1)$ 、 $\Omega(T_1)$  都看作与  $\gamma$  无关的常数。同理可得

$$\xi_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi \cos \gamma d\gamma = \frac{1}{2\omega} [w_1(T_1)\cos(\Omega(T_1)) - w_2(T_1)\sin(\Omega(T_1))].$$

将上面2式代入(19)式可以将  $f_k$  写为

$$f_k(T_1) = \frac{1}{2\omega} \left[ \left[ \sin \Omega(T_1) + \frac{\lambda_k + \beta}{\sigma - (9\alpha/8\omega)a_0^2} \cos \Omega(T_1) \right] w_1(T_1) - \left[ \cos \Omega(T_1) + \frac{\lambda_k + \beta}{\sigma - (9\alpha/8\omega)a_0^2} \sin \Omega(T_1) \right] w_2(T_1) \right], \quad k = 1, 2 \quad (22)$$

由方程(17), 可得  $a_1$  的一阶矩、二阶矩

$$\begin{cases} E[a_1] = E[\eta_1] = 0, \\ E[a_1^2] = c_1^2 E[x_1^2] + 2c_1 c_2 E[x_1 x_2] + c_2^2 E[x_2^2]. \end{cases} \quad (23)$$

由方程(17), 可得统计矩  $E[\eta_1]$ 、 $E[\eta_1^2]$  和  $E[a_1 \eta_1]$ 。从而, 由(23)和(15)式, 可得

$$E[a] = a_0, \quad E[a^2] = E[a_1^2]. \quad (24)$$

当  $w_k(T_1)$  的具体形式给定后, 由方程(21)、方程(22)、方程(23)和方程(24), 可得  $a$  的一、二统计矩。

另一种情形是设  $\xi(t)$  为白噪声, 具有相关函数

$$R_\xi(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau), \quad (25)$$

则由方程(25)、方程(11)、方程(19)和方程(20), 可得

$$E[x_k] = 0, \quad E[x_k x_l] = -\frac{\pi S_0}{\omega^2(\lambda_k + \lambda_l)} \left[ 1 + \frac{(\lambda_k + \beta)(\lambda_l + \beta)}{a_0^2 \beta^2} \right], \quad k, l = 1, 2 \quad (26)$$

### 3 双峰稳态概率密度

当由(14)式确定的  $a_0$  只有一个解时, 对应的  $a$  的稳态概率密度为单峰的. 而当由(14)式确定的  $a_0$  有 2 个稳定的稳态解时, 对应的  $a$  的稳态概率密度为双峰的, 此时系统有两种可能的运动状态, 两种运动状态对应的稳态概率密度分别为正态分布  $N(a_1, Ea_1^2)$  和  $N(a_s, Ea_s^2)$ , 其中  $a_1$  和  $a_s$  分别表示由(14)式确定的大解和小解, 分别记正态分布  $N(a_1, Ea_1^2)$  和  $N(a_s, Ea_s^2)$  的概率密度函数为  $p_1(a)$  和  $p_s(a)$ . 下面我们讨论怎样由  $p_1(a)$  和  $p_s(a)$  构造出数值模拟中观测到的双峰稳态概率密度函数  $p(a)$ . 一个自然的想法就是设

$$p(a) = c_1 p_1(a) + c_s p_s(a), \quad c_1 + c_s = 1, \quad (27)$$

式中  $c_1$  和  $c_s$  为常数, 分别表示实现大的运动状态和小的运动状态的可能性. 对于  $c_1$  和  $c_s$  的求法, Wagner<sup>[3]</sup> 给出了一种算法, 即令  $c_1$  和  $c_s$  分别为当  $\xi(t) = 0$  受确定性谐和激励时系统实现大的稳态解和小的稳态解的可能性, 可用数值方法计算出. 例如, 当  $\xi(t) = 0, \sigma = 1.5$  时, 大解和小解的吸引域见图 2, 图中阴影部分表示大解的吸引域, 白色部分表示小解的吸引域, 可得  $c_1 = 0.747$ , 即黑色部分的面积占总面积的 74.7%.

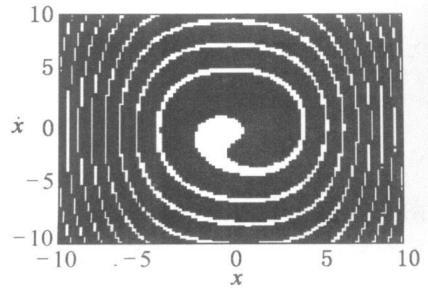


图 2 大解和小解的吸引域  
( $\sigma = 1.5, c_1 = 0.747$ )

$c_1$  随  $\sigma$  的变化情况见图 3, 从图 3 中可见, 当  $\sigma < 1.32$  时,  $c_1 = 1$ ; 当  $\sigma > 4.16$  时,  $c_1 = 0$ ; 而在双稳态解区域  $[1.32, 4.16]$  中,  $c_1$  随  $\sigma$  增大而减小.

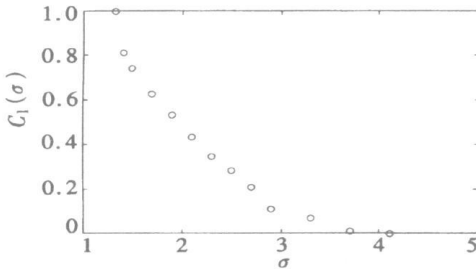
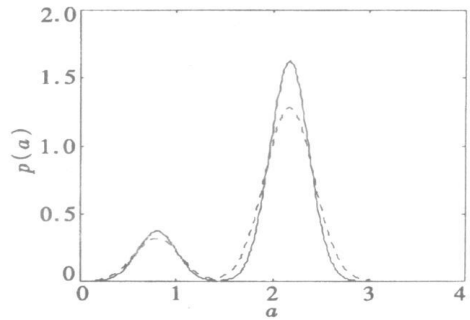


图 3  $c_1(\sigma)$



—— 理论解, - - - 数值解

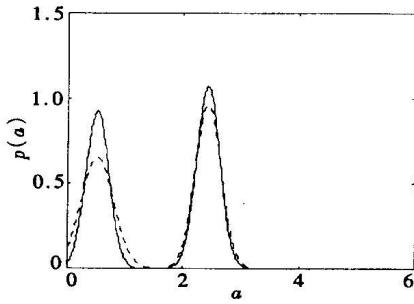
图 4 概率密度函数

( $\sigma = 1.4, c_1 = 0.814, S_0 = 0.002$ )

当  $\sigma = 1.4, 1.9, 2.7, S_0 = 0.002$  时, 相应的由(27)式给出的双峰稳态概率密度与数值模拟结果的比较见图 4~ 图 6. 将图 4~ 图 6 和文献[3]的结果进行比较, 虽然本文中研究的系统与文献[3]中不同, 但是双峰稳态概率密度的形状有些相似.

### 4 结 论

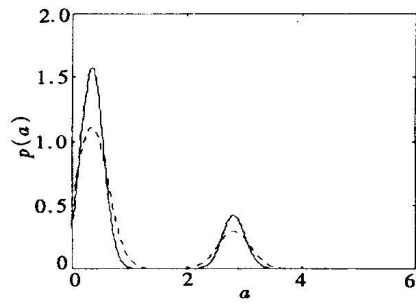
在一定的参数范围内, Duffing 振子在谐和与随机激励联合作用下有两种可能的运动状态,



——理论解, - - - 数值解

图5 概率密度函数

( $\sigma = 1.9, c_1 = 0.536, S_0 = 0.002$ )



——理论解, - - - 数值解

图6 概率密度函数

( $\sigma = 2.7, c_1 = 0.211, S_0 = 0.002$ )

系统响应的稳态概率密度是双峰的。用多尺度法分离了系统的快变项,得到了系统慢变项满足的随机微分方程。用线性化方法求出了双峰稳态概率密度的近似表达式。进一步的工作可研究系统的随机分岔和随机混沌。

### [参 考 文 献]

- [1] ZHU Wei\_qiu, Lu M Q, Wu Q T. Stochastic jump and bifurcation of a Duffing oscillator under narrow band excitation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, **165**(2): 285—304.
- [2] HUANG Zhi\_long, ZHU Wei\_qiu. Stochastic averaging of strongly nonlinear oscillators under combined harmonic and white noise excitations[J]. Journal of Sound and Vibrations, 2000, **238**(2): 233—256.
- [3] Wagner U V. On double crater like probability density functions of a Duffing oscillator subjected to harmonic and stochastic excitations[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, **28**(3): 243—255.
- [4] Nayfeh Ali H. Perturbation Methods[M]. New York: Wiley, 1973.
- [5] Nayfeh Ali H. Introduction to Perturbation Techniques[M]. New York: Wiley, 1981.
- [6] Rajan S, Davies H G. Multiple time scaling of the response of a Duffing oscillator to narrow band excitations[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, **123**(3): 497—506.
- [7] Nayfeh Ali H, Serhan S J. Response statistics of nonlinear systems to combined deterministic and random excitations[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1990, **25**(5): 493—509.
- [8] RONG Hai\_wu, XU Wei, FANG Tong. Principal response of Duffing oscillator to combined deterministic and narrow band random parametric excitation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, **210**(4): 483—515.
- [9] RONG Hai\_wu, XU Wei, WANG Xiang\_dong, et al. Response statistics of two degree of freedom nonlinear system to narrow band random excitation[J]. International Journal of Non Linear Mechanics, 2002, **37**(6): 1017—1028.
- [10] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1992.

# On Double Peak Probability Density Functions of a Duffing Oscillator to Combined Deterministic and Random Excitations

RONG Hai\_wu<sup>1,2</sup>, WANG Xiang\_dong<sup>1</sup>,  
MENG Guang<sup>2</sup>, XU Wei<sup>3</sup>, FANG Tong<sup>3</sup>

(1. Department of Mathematics, Foshan University, Guangdong 528000, P. R. China;

2. The State Key Laboratory of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030 P. R. China;

3. Department of Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072 P. R. China)

**Abstract:** The principal resonance of Duffing oscillator to combined deterministic and random external excitation is investigated. The random excitation was taken to be white noise or harmonic with separable random amplitude and phase. The method of multiple scales was used to determine the equations of modulation of amplitude and phase. The one peak probability density function of each of the two stable stationary solutions was calculated by the linearization method. These two one\_peak\_density functions were combined using the probability of realization of the two stable stationary solutions to obtain the double peak probability density function. The theoretical analyses are verified by numerical results.

**Key words:** Duffing oscillator; double peak probability density function; multiple scale method; linearization method