文章编号: 1000_0887(2006) 10_1255_06

有限变形弹性圆杆中的孤波*

刘志芳, 张善元

(太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024)

(王银邦推荐)

摘要: 在同时引入横向惯性和横向剪切应变的情况下, 导出了有限变形弹性圆杆的非线性纵向波动方程, 方程中包含了二次和三次的非线性项以及由横向剪切与横向惯性导致的两种几何弥散效应• 借助 Mathematica 软件, 利用双曲正割函数的有限展开法, 对该方程和对应的截断的非线性方程进行求解, 得到了非线性波动方程的孤波解, 同时给出了这些解存在的必要条件•

关 键 词: 非线性波; 有限变形; 横向惯性; 横向剪切应变; 双曲正割函数

中图分类号: O347.4 文献标识码: A

引 言

等截面弹性直杆是应用上最重要的结构元件, 由初等理论给出的经典的弹性杆的线性波动方程仅适用于波长远大于截面半径的情况[1~3]• 为了改善初等理论的结果, Rayleigh(1945 年) 考虑了横向惯性, 提出了一种校正方案, 得到了第一模态在波数趋于零时的二阶近似• Love(1944 年) 基于能量的考虑, 导出了计及横向惯性的杆的运动方程• 实际上, 当压缩波沿杆纵向传播时, 由于 Poisson 效应, 将会伴随有横向运动, 横向运动不仅对杆的动能有贡献(Rayleigh_Love 杆) , 而且由于波剖面的不均匀性会产生横向剪切, 从而对应变能也有贡献• 本文同时考虑这两种横向效应产生的几何弥散, 并计及有限变形产生的几何非线性, 借助 Hamilton 变分原理导出了弹性杆的非线性纵向波动方程•

对非线性演化方程的定性分析和寻找其精确解占有很重要的地位• 近年来, 对于非线性演化方程, 发展了许多求解准确解的方法, 如 Weierstrass 椭圆函数法[4], 齐次平衡法[5], sine_cosine 方法[6,7], 非线性变换[8]和双曲正切和双曲余切的有限展开法[9]等• 本文主要关心应变孤波解及其存在条件, 因此试图直接利用双曲正割函数的有限展开, 对导出的非线性波动方程和对应的截断的非线性方程进行了求解• 结果表明, 这种方法是简单有效的, 对于求其它非线性方程孤波解也是适用的•

1 有限变形弹性杆的纵波方程

考虑一无限长、均匀的等截面圆杆, 其密度为 ρ, 半径为 R• 采用 Lagrange 物质描述, 并使

* 收稿日期: 2005_03_15; 修订日期: 2006_05_01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472076) ; 山西省青年科学基金项目(2006021005)
作者简介: 刘志芳(1971—) , 女, 山西原平人, 讲师, 博士(联系人. Tel: + 86_351_6534038; E_mail: fz_1@sohu. com)•

用圆柱坐标系(x, r, θ)，其中x沿杆的轴向，r和θ分别为径向和环向坐标，导出支配方程时做了如下基本假定：

1) 变形前的平截面在变形过程中始终保持平面；
2) 受载过程中杆处于轴对称压缩状态，环向位移$U_\theta = 0$，且$\partial/\partial\theta = 0$；
3) 计及横向Poisson效应，即径向位移为$U_r = -\nu r\partial U/\partial x$，此处$U = U_x$为纵向位移；
4) 考虑有限变形的影响，轴向应变_位移关系为$\varepsilon_x = \partial U/\partial x + 0.5(\partial U/\partial x)^2$，考虑到$U_r$是$U$的高阶量，取横向剪切应变为$\gamma = \partial U_r/\partial x = -\nu r\partial^2 U/\partial x^2$；
5) 应力应变关系为线性的，从而应变能密度是关于应变的二次函数•

基于以上假定，弹性杆单位长度的动能为纵向运动动能和横向运动动能两项之和，即

$$T = \int_0^R \frac{1}{2}\rho(2\pi r\mathrm{d}r)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \int_0^R \frac{1}{2}\rho(2\pi r\mathrm{d}r)\left(-\nu r\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho S\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{4}\rho S\nu^2 R^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2, \tag{1}$$

其中ρ为材料密度，ν为Poisson比，t为时间，$S = \pi R^2$为圆杆横截面面积，横向位移U不仅是t的函数，而且是轴向坐标x的函数• 于是有限变形弹性杆单位长度剪切应变能为

$$V_s = \frac{1}{4}\mu\nu^2 SR^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2, \tag{2}$$

此处，μ为材料的剪切模量• 由最后一条假定轴向应力σ_x和应变ε_x之间服从线性关系，即

$$\sigma_x = E\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right], \tag{3}$$

其中E为材料的弹性模量• 有限变形弹性杆单位长度应变能纵向压缩应变能由下式给出：

$$V_p = \int_0^\varepsilon\int_0^R \sigma(\varepsilon)2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{2}SE\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]^2 • \tag{4}$$

利用Hamilton变分原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} L\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}(T - V_s - V_p)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \tag{5}$$

其中

$$L = \frac{1}{2}\rho S\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{4}\rho S\nu^2 R^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2 - \frac{1}{4}\mu\nu^2 SR^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{1}{2}SE\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]^2 •$$

由经变分运算后的Euler方程可以得到有限变形弹性圆杆波导的纵波运动方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{1}{2\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[3E\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + E\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^3 + \rho\nu^2 R^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - \mu\nu^2 R^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\right] • \tag{6}$$

方程(6)是一个双非线性双弥散的波动方程，它同时包含了横向惯性和横向剪切两种几何弥散效应•

如果令$u = \partial U/\partial x$代入上式，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{3E}{2\rho}u^2 + \frac{E}{2\rho}u^3 + \frac{\nu^2 R^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right], \tag{7}$$

其中$c_0 = \sqrt{E/\rho}$，$c_1 = \sqrt{\mu/\rho}$分别为线性纵波波速和剪切波速• 方程(7)是关于轴向位移梯

度的含有双非线性双弥散的弹性圆杆的波动方程, 可以看出在纵波传播的同时伴随着有扰动的剪切波传播, 这是由横向 Poisson 效应引起的•

2 双曲正割函数展开法

考虑非线性波方程

$$N\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \cdots\right) = 0, \tag{8}$$

令它的行波解为

$$u = u(\xi), \quad \xi = k(x - ct), \tag{9}$$

其中 k 为波数, c 为波速• 将 $u(\xi)$ 展开为下列双曲正割函数 $\operatorname{sech}\xi$ 的级数

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} A_j \operatorname{sech}^j \xi, \tag{10}$$

它的最高阶数为

$$O(u(\xi)) = n• \tag{11}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \sum_{j=0}^{n} - jA_j \operatorname{sech}^j \xi \tanh \xi, \tag{12}$$

其中 A_j 是待定的常数• $\operatorname{sech}\xi$ 和 $\tanh\xi$ 有下列关系:

$$\operatorname{sech}^2\xi + \tanh^2\xi = 1• \tag{13}$$

由(12)式, 可以认为 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi$ 的最高阶数为

$$O\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right) = n + 1• \tag{14}$$

类似地, 有

$$O\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}\right) = n + 2, \quad O\left(u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right) = 2n + 1, \quad O(u^2) = 2n, \quad O(u^3) = 3n• \tag{15}$$

在(10)式中, n 的选择要求使得非线性波动方程中的最高阶导数项和最高阶非线性项的阶次平衡•

3 双非线性双弥散支配方程的准确解

将行波解(9)代入方程(7)有

$$(c^2 - c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left(\frac{3E}{2\rho}u^2\right) - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left(\frac{E}{2\rho}u^3\right) - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left[\frac{\nu^2 R^2}{2}(c^2 - c_1^2)k^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}\right] = 0• \tag{16}$$

上式(16) 关于 ξ 积分两次得

$$k^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 = N, \tag{17}$$

其中第 1 次积分常数取为 0, 式中 N 为第 2 次积分常数, 且

$$\beta_1 = -\frac{2(c^2 - c_0^2)}{\nu^2 R^2 (c^2 - c_1^2)}, \quad \beta_2 = \frac{3c_0^2}{\nu^2 R^2 (c^2 - c_1^2)}, \quad \beta_3 = \frac{c_0^2}{\nu^2 R^2 (c^2 - c_1^2)}• \tag{18}$$

将式(10)代入式(17)使其中的非线性项和最高阶导数项的阶次平衡, 可以得出 $n + 2 = 3n$, 即

$$n = 1, \tag{19}$$

于是方程(17) 有的解可取下列形式

$$u(\xi) = A_0 + A_1 \operatorname{sech}\xi, \tag{20}$$

其中 A_0、A_1 为待定常数, 式(20) 关于 ξ 微分两次, 得

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = -2A_1\operatorname{sech}^3\xi + A_1\operatorname{sech}\xi. \tag{21}$$

将式(20) 和(21) 代入式(17), 借助 Mathematica, 可以得到

$$\begin{aligned}&(-2A_1k^2 + \beta_3A_1^2)\operatorname{sech}^3\xi + (\beta_2A_1^2 + 3\beta_3A_0A_1^2)\operatorname{sech}^2\xi + \\ &\quad (A_1k^2 + \beta_1A_1 + 2\beta_2A_0A_1 + 3\beta_3A_0^2A_1)\operatorname{sech}\xi + \\ &\quad (\beta_1A_0 + \beta_2A_0^2 + \beta_3A_0^3) = N.\end{aligned} \tag{22}$$

令式(22) 中 $\operatorname{sech}\xi$, $\operatorname{sech}^2\xi$, $\operatorname{sech}^3\xi$ 的系数为零, 得

$$-2A_1k^2 + \beta_3A_1^2 = 0, \tag{23}$$

$$A_1^2\beta_2 + 3\beta_3A_0A_1^2 = 0, \tag{24}$$

$$A_1k^2 + A_1\beta_1 + 2A_0A_1\beta_2 + 3A_0^2A_1\beta_3 = 0. \tag{25}$$

从式(23) ~ (25) 可以确定

$$A_0 = -\frac{\beta_2}{3\beta_3},\quad A_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{\beta_3}}k,\quad k^2 = \frac{\beta_2^2 - 3\beta_1\beta_3}{3\beta_3}. \tag{26}$$

显然它要求 $\beta_3 > 0$ 且 $\beta_2^2 - 3\beta_1\beta_3 > 0$, 将式(18) 代入式(26) 得

$$A_0 = -1,\quad A_1 = \pm\sqrt{\frac{2(c_0^2 + 2c^2)}{c_0^2}},\quad k = \pm\sqrt{\frac{c_0^2 + 2c^2}{\nu^2R^2(c^2 - c_1^2)}}. \tag{27}$$

把式(27) 代入式(20), 得到方程(17) 的孤波解如下

$$u(\xi) = A\operatorname{sech}\frac{(x - ct)}{\Lambda} - 1, \tag{28}$$

其中 A 为波幅, Λ 为波宽.

$$A = \pm\sqrt{\frac{2(c_0^2 + 2c^2)}{c_0^2}}, \tag{29}$$

$$\Lambda = \nu R\sqrt{\frac{c^2 - c_1^2}{c_0^2 + 2c^2}}, \tag{30}$$

显然当 $c > c_1$ 时, 解(28) 有效.

4 截断的非线性波动方程的孤波解

如果在轴向压缩应变能函数(4) 中略去轴向位移梯度的高阶项 $(\partial U/\partial x)^4$, 即方程(17) 中的 $\beta_3u^3 = 0$, 则方程(17) 简化为仅含二次非线性项的方程

$$k^2\frac{d^2u}{d\xi^2} + \beta_1u + \beta_2u^2 = N, \tag{31}$$

且系数 β_1、β_2 仍由式(18) 的前两式给出. 将式(10) 代入式(31) 使其中的非线性项和最高阶导数项的阶次平衡, 得 $n + 2 = 2n$, 即

$$n = 2. \tag{32}$$

方程(31) 的解可以写为

$$u(\xi) = A_0 + A_1\operatorname{sech}\xi + A_2\operatorname{sech}^2\xi, \tag{33}$$

其中 A_0、A_1、A_2 为待定常数, 式(33) 关于 ξ 微分两次, 得

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = -6A_2\operatorname{sech}^4\xi - 2A_1\operatorname{sech}^3\xi + 4A_2\operatorname{sech}^2\xi + A_1\operatorname{sech}\xi. \tag{34}$$

将式(33)和(34)代入式(31)式,借助Mathematica得

$$\begin{aligned}&(-6A_2k^2+\beta_2A_2^2)\operatorname{sech}^4\xi+(-2A_1k^2+2\beta_2A_1A_2)\operatorname{sech}^3\xi+\\&\quad[4A_2k^2+\beta_1A_2+\beta_2(2A_0A_2+A_1^2)]\operatorname{sech}^2\xi+\\&\quad(A_1k^2+\beta_1A_1+2\beta_2A_0A_1)\operatorname{sech}\xi+\\&\quad(\beta_1A_0+\beta_2A_0^2)=N.\end{aligned}\tag{35}$$

令式(35)中 $\operatorname{sech}\xi$、$\operatorname{sech}^2\xi$、$\operatorname{sech}^3\xi$、$\operatorname{sech}^4\xi$ 的系数为零,得

$$-6A_2k^2+\beta_2A_2^2=0,\tag{36}$$

$$-2A_1k^2+2A_1A_2\beta_2=0,\tag{37}$$

$$4A_2k^2+2A_0A_2\beta_2+\beta_1A_2+\beta_2A_1^2=0,\tag{38}$$

$$A_1k^2+\beta_1A_1+2\beta_2A_0A_1=0.\tag{39}$$

通过求解式(36)~(39)可得

$$A_0=-\frac{4k^2+\beta_1}{2\beta_2},\quad A_1=0,\quad A_2=\frac{6k^2}{\beta_2}.\tag{40}$$

将式(40)代入式(33)得

$$u(\xi)=-\frac{4k^2+\beta_1}{2\beta_2}+\frac{6k^2}{\beta_2}\operatorname{sech}^2\xi.\tag{41}$$

如果令式(41)中的常数项为零,即 $k^2=-\beta_1/4$, (41)式变为

$$u(\xi)=-\frac{3\beta_1}{2\beta_2}\operatorname{sech}^2\xi.\tag{42}$$

显然式(42)是方程(31)的孤波解,它要求 $\beta_1<0$. 将式(18)代入式(42)得

$$u(\xi)=A\operatorname{sech}^2\frac{(x-ct)}{\Lambda},\tag{43}$$

其中 A 为波幅, Λ 为波宽.

$$A=\frac{c^2-c_0^2}{c_0^2},\tag{44}$$

$$\Lambda=\nu R\sqrt{\frac{2(c^2-c_1^2)}{c^2-c_0^2}},\tag{45}$$

当 $c>c_0$ 或者 $c<c_1$ 时, 式(43)成立.

5 结果与讨论

本文利用Hamilton变分原理,同时计及有限变形和横向Poisson效应,导出了圆杆波导的双非线性双弥散的波动方程. 由于横向惯性和横向剪切同时引入,使得圆杆波导中存在两种几何弥散. 非线性效应与弥散效应相互作用、相互抑制,使得圆杆波导中可能有稳定传播的冲击波和孤立波存在.

本文利用双曲正割的有限展开,得到了有限变形圆杆的双非线性双弥散的波动方程(三次非线性)及相应的截断方程(二次非线性)的精确行波解. 解的特征与非线性波动方程(17)中系数的符号有关,当 $\beta_3>0$ 且 $\beta_2^2-3\beta_1\beta_3>0$ 时,即当 $c>c_1$ 时孤波解存在. 对非线性相对较弱的截断方程给出了孤波解,它们的存在条件与 β_1 的符号有关,当 $\beta_1<0$,即要求 $c>c_0$ 或 $c<c_1$ 时,有孤立波解存在. 从求解过程可以看出,双曲正割函数的有限展开对于确定非线性方程的孤波解是简单可行的.

[参 考 文 献]

[1] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves[M]. New York: John Wiley & Sons, 1974.

[2] Bhatnager P L. Nonlinear Waves in One_Dimensional Dispersive System[M]. Oxford: Clarendon Press, 1979.

[3] 杨桂通, 张善元. 弹性动力学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1988.

[4] Porubov Alexei V, Velarde Manuel G. On nonlinear waves in an elastic solid[J]. C R Acad Sci Series Ⅱ b, 2000, **328**(2): 165—170.

[5] WANG Ming_liang. Solitary solutions for variant Boussinesq equations[J]. Physics Letter A, 1995, **199**(1): 169—172.

[6] YAN Chun_tao. A simple transformation for nonlinear waves[J]. Physics Letter A, 1996, **224**(1): 77—84.

[7] ZHENG Xue_dong, XIA Tie_cheng, ZHANG Hong_qing. New exact traveling wave solutions for compound KdV_Burgers equations in mathematical physics[J]. Applied Mathematics E_Notes, 2002, **2**(1): 45—50.

[8] 刘式适, 付遵涛, 刘式达, 等. 求某些非线性偏微分方程特解的一个简洁方法[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(3): 281—286.

[9] ZHANG Jie_fang. New solitary wave solution of the combined KdV and mKdV equation[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1998, **37**(5): 1541—1546.

Solitary Waves in Finite Deformation Elastic Circular Rod

LIU Zhi_fang, ZHANG Shan_yuan

(Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology,
Taiyuan 030024, P.R.China)

Abstract: A new nonlinear wave equation of a finite deformation elastic circular rod simultaneously introducing transverse inertia and shearing strain was derived by means of Hamilton principle. The nonlinear equation includes two nonlinear terms caused by finite deformation and double geometric dispersion effects caused by transverse inertia and transverse shearing strain. Nonlinear wave equation and corresponding truncated nonlinear wave equation were solved by the hyperbolic secant function finite expansion method. The solitary wave solutions of these nonlinear equations are obtained. The necessary condition of these solutions existence is given also.

Key words: nonlinear wave; finite deformation; transverse inertia; transverse shearing strain; hyperbolic secant function