

# 索结构的静力分析\*

黄 炎<sup>1</sup>, 兰伟仁<sup>2</sup>

(1. 国防科技大学 航天与材料工程学院, 长沙 410073;

2. 总参气象水文中心, 北京 100081)

(我刊原编委何福保推荐)

**摘要:** 根据柔索应变与位移的非线性几何关系以及自重作用与温度影响下的平衡方程, 采用 Euler 描述的坐标系统精确地求得了各点的位移和张力的—般解。由索结构静力问题建立的非线性代数方程组应用改进的 Powell 混合算法编制的高精度 DNEQNF 程序直接进行求解。在例题中计算了由 3 根索被—竖直弹簧支撑在一起的索结构, 并与其他学者用不同方法得到的结果进行对比。

**关键词:** 索结构; 非线性变形; 解析解; 位移; 张力

**中图分类号:** O343.5      **文献标识码:** A

## 引 言

索结构属于—类特殊的工程结构, 许多方法例如非线性有限元法<sup>[1~4]</sup>或弹性悬链线法<sup>[5~9]</sup>已用来进行分析。所有这些分析都是按照 Lagrange 描述的坐标系统并采用 Newton-Raphson 迭代算法, 计算过程麻烦。本文根据非线性变形理论按照 Euler 描述的坐标系统<sup>[10]</sup>求得了柔索悬链线的解析解。对非线性代数方程能够用 Fortran 中的 DNEQNF 程序<sup>[11]</sup>直接进行求解。

Fortran 的 IMSL 数值库中的程序 NEQNF 是在 MINPACK 中的子程序 HYBRID1 的基础上, 应用改进的 M. J. D. Powell 算法编制而成。Powell 算法是 Newton 算法的改进, 应用有限差分近似法计算 Jacobi 矩阵, 并采取措施控制比较大的步长或累积误差。因为程序中 Jacobi 矩阵的计算, 对于单精度来说, 并不精确, 以至于导致方程组的解远离于真正的根, 故在计算时采用高精度算法 DNEQNF。只要给定适当的初值, 利用 NEQNF 程序, 就可以得到比较理想的结果, 结果如下面的算例所示。

## 1 基本方程

考虑—弹性索的微段被拉伸在包括微段所在平面的竖直平面内, 如图 1 所示。索在变形

\* 收稿日期: 2005\_12\_16; 修订日期: 2006\_04\_30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872076)

作者简介: 黄炎(1924—), 男, 长沙人, 教授, 从事固体力学研究;

兰伟仁(1979—), 男, 黑龙江绥化人, 硕士, 助理工程师(联系人, Tel: + 86\_10\_66818386;

E-mail: lan\_wr@163.com)。

前为水平, 其中心线与  $x$  轴一致, 而  $z$  轴竖直在此平面内, 索的微段  $dx$  在变形后变为  $ds$ <sup>[10]</sup>

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}, \quad (1)$$

式中  $u$  和  $w$  分别为沿着  $x$  和  $z$  方向的位移。应变  $\varepsilon$  与位移的关系为

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} - 1. \quad (2)$$

取应力-应变关系为线性且包括温度膨胀时

为

$$F = EA(\varepsilon - \alpha T), \quad (3)$$

式中,  $F$  为索的张力,  $E$  为弹性模量,  $A$  为横截面面积,  $\alpha$  为热膨胀系数,  $T$  为温差。在自重作用下, 索的静力平衡方程为

$$\frac{d}{dx}(F \cos \theta) = 0, \quad \frac{d}{dx}(F \sin \theta) = q, \quad (4)$$

式中  $\theta$  为所在点的斜度,  $q$  为变形前索单位长的重量, 且

$$\cos \theta = \frac{1 + du/dx}{\sqrt{(1 + du/dx)^2 + (dw/dx)^2}}, \quad \sin \theta = \frac{dw/dx}{\sqrt{(1 + du/dx)^2 + (dw/dx)^2}}. \quad (5)$$

## 2 公式推导

将(2)式代入(3)式, 连同(5)式一玻代入(4)式, 积分后可得

$$EA \left[ 1 + \frac{du}{dx} \right] \left[ 1 - \frac{1 + \alpha T}{\sqrt{(1 + du/dx)^2 + (dw/dx)^2}} \right] = C,$$

$$EA \frac{dw}{dx} \left[ 1 - \frac{1 + \alpha T}{\sqrt{(1 + du/dx)^2 + (dw/dx)^2}} \right] = qx + D.$$

由以上二式可以解得

$$\frac{du}{dx} = C \left[ \frac{1 + \alpha T}{\sqrt{C^2 + (qx + D)^2} + EA} \right] - 1, \quad (6a)$$

$$\frac{dw}{dx} = (qx + D) \left[ \frac{1 + \alpha T}{\sqrt{C^2 + (qx + D)^2} + EA} \right]. \quad (6b)$$

积分上式可得

$$u = \frac{1 + \alpha T}{q} C \lg \left[ \sqrt{C^2 + (qx + D)^2} + qx + D \right] + \left( \frac{C}{EA} - 1 \right) x + C', \quad (7a)$$

$$w = \frac{1 + \alpha T}{q} \sqrt{C^2 + (qx + D)^2} + \frac{qx^2 + 2Dx}{2EA} + D'. \quad (7b)$$

将(6)式代入(2)式, 然后再代入(3)式, 可得

$$F = \sqrt{C^2 + (qx + D)^2}. \quad (8)$$

将(6)式代入(5)式, 可得

$$\cos \theta = \frac{C}{\sqrt{C^2 + (qx + D)^2}}, \quad \sin \theta = \frac{qx + D}{\sqrt{C^2 + (qx + D)^2}}. \quad (9)$$

应用以上两式可分别求得张力的水平分力  $X$  和垂直分力  $Z$

$$X = C, \quad Z = qx + D. \quad (10)$$

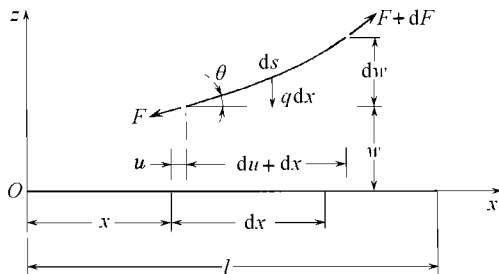


图 1 位移和张力

将(6)式代入(1)式,然后积分可得变形后索的长度

$$s = l(1 + \alpha T) + \frac{1}{2qEA} \left[ C^2 \lg \frac{\sqrt{C^2 + (qx + D)^2} + qx + D}{\sqrt{C^2 + D^2} + D} + (ql + D) \sqrt{C^2 + (qx + D)^2} - D \sqrt{C^2 + D^2} \right], \quad (11)$$

式中  $l$  和  $s$  分别为变形前后的索长。令  $dw/dx = 0$  代入(6b)式,得到最低点的位置在

$$x_f = -\frac{D}{q}. \quad (12)$$

将上式代入(7b)式,即为最低点的垂度  $f$

$$f = -\frac{1 + \alpha T}{q} C + \frac{D^2}{2qEA} - D'. \quad (13)$$

令  $dF/dx = 0$ , 并代入(8)式,可得张力极小值的位置如(12)式所示。将(12)式代入(8)式可得张力极小值  $F = C$ 。因此最大张力将在索的端点。

当索的左端固定,应有  $x = 0, u = 0$  和  $w = 0$ 。将这些条件代入(7)式,可得

$$C' = -\frac{1 + \alpha T}{q} C \lg(\sqrt{C^2 + D^2} + D), \quad D' = -\frac{1 + \alpha T}{q} \sqrt{C^2 + D^2}.$$

将以上两式代入(7)式和(13)式可得

$$u = \frac{1 + \alpha T}{q} C \lg \frac{\sqrt{C^2 + (qx + D)^2} + qx + D}{\sqrt{C^2 + D^2} + D} + \left( \frac{C}{EA} - 1 \right) x, \quad (14a)$$

$$w = \frac{1 + \alpha T}{q} \left[ \sqrt{C^2 + (qx + D)^2} - \sqrt{C^2 + D^2} \right] + \frac{qx^2 + 2Dx}{2EA}, \quad (14b)$$

$$f = \frac{1 + \alpha T}{q} \left[ \sqrt{C^2 + D^2} - C \right] + \frac{D^2}{2qEA}. \quad (15)$$

### 3 索结构的计算

图2所示的例<sup>[5]</sup>为由3根索组成的三自由度结构被一竖直弹簧  $K = 1000$  支撑在一起,其端点可自由水平滚动。实线表示系统最终的平衡形态。所有数字均已统一单位。索仅承受重力。  $EA = 2.9 \times 10^5, T = 100, \alpha = 6.5 \times 10^{-6}$ , 作用在  $A$  点的水平力  $P = 1000$  沿方向  $y$ 。索的自重和长度为  $q_1 = 1, l_1 = 580, q_2 = q_3 = 2, l_2 = l_3 = 510$ 。

根据  $A'$  点位移的连续性条件和力的平衡条件以及假设  $B, C, D$  3点为局部坐标系原点,应有

$$u_n(l_n) = L_n - l_n, \quad w_n(l_n) = W_n + w_0, \quad n = 1, 2, 3, \quad (16)$$

$$\begin{cases} -\sum X_n(l_n) \cos \phi_n = 0, \\ P - \sum X_n(l_n) \sin \phi_n = 0, \\ -Kw_0 - \sum Z_n(l_n) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$L_n = \sqrt{U_n^2 + V_n^2}, \quad \cos \phi_n = \frac{U_n}{L_n}, \quad \sin \phi_n = \frac{V_n}{L_n},$$

$$U_1 = u_0 + 400, \quad U_2 = U_3 = u_0 - 400,$$

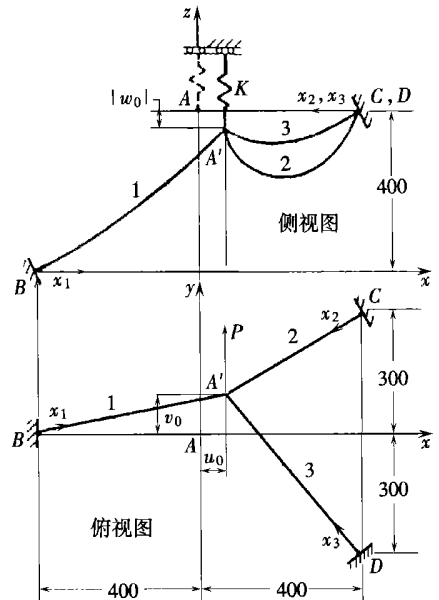


图2 索结构例题

$$V_1 = v_0, V_2 = v_0 - 300, V_3 = v_0 + 300,$$

$$W_1 = 400, W_2 = W_3 = 0,$$

式中  $u_0, v_0, w_0$  为在整体坐标系  $(x, y, z)$  中由  $A$  到  $A'$  的位移分量;  $u_n(l_n), w_n(l_n)$  为在局部坐标系中端点  $x_n = l_n$  的位移。由(10)和(14)式可得

$$X_n(l_n) = C_n, Z_n(l_n) = q_n l_n + D_n,$$

$$u_n(l_n) = \frac{1 + \alpha T}{q_n} C_n \lg \frac{\sqrt{C_n^2 + (q_n l_n + D_n)^2} + q_n l_n + D_n}{\sqrt{C_n^2 + D_n^2} + D_n} + l_n \left[ \frac{C_n}{EA} - 1 \right],$$

$$w_n(l_n) = \frac{1 + \alpha T}{q_n} \left[ \sqrt{C_n^2 + (q_n l_n + D_n)^2} - \sqrt{C_n^2 + D_n^2} \right] + l_n \frac{q_n l_n + 2D_n}{2EA}.$$

由这些方程式可以求得  $C_n, D_n, u_0, v_0$  和  $w_0$  的值。由点  $A$  到  $A'$  的位移分量 ( $u_0 = X_x, v_0 = X_y, w_0 = X_z$ ), 索的垂度以及每根索在整体坐标系  $(x, y, z)$  交点  $A'$  的张力分量分别见表 1、2 和 3, 并与其它文献做了比较。

表 1 由  $A$  到  $A'$  的位移分量

	$u_0(X_x)$	$v_0(X_y)$	$w_0(X_z)$
本文	26.471 5	41.138 5	- 2.874 5
文献[5]	26.473	41.135	- 2.874
文献[2]	26.02	37.58	- 2.94

表 2 索的垂度及其位置

索	2	3
$f_n$	104.16	39.31
$x_n$	257.07	259.94

表 3 在交点  $A'$  的张力分量

索		1(J)	2(1)	3(1)
$C_n \cos \phi_n$	本文	1 686.44	- 437.58	- 1 284.86
$x$	文献[5]	1 686.0	- 437.6	- 1 284.5
$C_n \sin \phi_n$	本文	162.68	- 303.25	1 140.57
$y$	文献[5]	162.6	- 303.3	1 140.2
$q_n l_n + D_n$	本文	1 868.55	505.86	500.11
$z$	文献[5]	1 868.1	505.9	500.1

由表 3 可以看出, 本文的结果精确地满足平衡方程(17) 且非常接近文献[5] 的结果, 证明方法的有效性与精度。

## 4 结 论

本文精确完整地用一般解析法来进行索结构的静力分析, 采用柔索在自重作用和温度改变下的一般解析解来求解, 其积分常数可以由索端条件来求解。对每一根索有 4 种积分常数, 其中每个端点有两个边界条件, 即位移分量  $u$  和  $w$ , 沿  $x$  和  $z$  方向力的分量  $X$  或  $Z$ 。在连接点则有位移的连续性条件和力的平衡条件。理论分析简单, 计算过程容易且便于工程实际应用。

### [参 考 文 献]

[1] 袁行飞, 董石麟. 二节点曲线索单元非线性分析[J]. 工程力学, 1999, 16(4): 59—64.  
 [2] 胡松, 何艳丽, 王肇民. 大挠度索结构的非线性有限元分析[J]. 工程力学, 2000, 17(2): 36—43.  
 [3] 杨孟刚, 陈政清. 两节点曲线索单元精细分析的非线性有限元方法[J]. 工程力学, 2003, 20(1): 42—47.  
 [4] 魏建东, 刘忠玉. 一种连续索滑移的处理方法[J]. 计算力学学报, 2003, 20(4): 495—499.

- [5] Peyrot A H, Goulois A M. Analysis of cable structures[J]. Computers and Structures, 1979, **10**(5): 805—813.
- [6] 聂建国, 陈必磊, 肖建春. 多跨连续长索在支座处存在滑移的非线性静力分析[J]. 计算力学学报, 2003, **20**(3): 320—324.
- [7] 王春江, 钱若军, 王人鹏. 一种用于单索求解的迭代算法[J]. 空间结构, 2004, **10**(1): 20—30.
- [8] Irvine H M. Cable Structures [M]. Cambridge: The MIT Press, 1981.
- [9] 魏建东, 刘忠玉. 四种不同形式的弹性悬索静力解答[J]. 空间结构, 2005, **11**(2): 42—45.
- [10] 黄炎, 唐国金. 薄壳非线性变形理论[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(6): 610—616.
- [11] More J, Burton G, Kenneth H. User, Guide for MINPACK\_1[R]. Argonne National Labs Report ANL Argonne Illinois, 1980.

## Static Analysis of Cable Structure

HUANG Yan<sup>1</sup>, LAN Wei-ren<sup>2</sup>

(1. College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, P. R. China;

2. Head General Staff Hydrometeorological Center, Beijing 100081, P. R. China)

**Abstract:** Based on the nonlinear geometric relation between strain and displacement for flexible cable, the equilibrium equation under self-weight and influence of temperature were established and an analytical solution of displacement and tension distribution defined in Eulerian coordinate system was accurately obtained. The nonlinear algebraic equations caused by cable structure were solved directly using the modified Powell hybrid algorithm with high precision routine DNEQNE of Fortran. For example, a cable structure consisting of three cables jointly supported by a vertical spring and all the other ends fixed was calculated and compared with various methods by other scholars.

**Key words:** cable structure; nonlinear deformation; analytical method; displacement; tension