文章编号: 1000_0887(2006) 10_1235_08

一类大气演化方程组的 Cauchy 问题*

何卷雄[1], 何幼桦[2]

(1. 中国科学院 大气物理研究所 国际气候与环境科学中心, 北京 100029;
2. 上海大学 数学系, 上海 200444)

(李继彬推荐)

摘要: 在分层理论的框架下讨论一类大气演化方程组的 Cauchy 问题, 证明了: 1) 惯性力对一类大气演化方程组 Cauchy 问题的适定性判别标准没有影响; 2) 可压缩性对粘性大气方程组 Cauchy 问题的适定性判别标准没有影响, 但对无粘大气方程组, 可压缩性改变 Cauchy 问题适定性判别标准; 3) 所论方程组在 $t=0$ 超平面上的 Cauchy 问题均是不适定的, 并不受粘性和可压缩性的影响; 4) 可压无粘大气方程与运动静止初始条件构成的 Cauchy 问题是不适定的•

关 键 词: 适定性; 粘性; 可压缩性; 分层理论
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

拟线性偏微分方程初值问题的适定性指其是否存在稳定的唯一解• 对于构造数值天气预报模式、气候模式以及资料同化模式而言, 这是最为关键的问题• 一个不适定的模式在气象上毫无用处• 由于大气是旋转地球上的简单流体, 完全的大气方程组本质上不过是旋转坐标系下的 Landau_Lifschitz 方程• 由于 Landau_Lifschitz 方程过于复杂, 为了更为清晰地描述大气运动的特征, 许多人为的简化被引入, 诸如正压大气、斜压大气、地转、无粘性等等• 相应的简化方程在传统的泛函分析的观点下得到了广泛地研究• 例如, Oliger 和 Sundstrom(1978) 分析了气体 Euler 方程、浅水方程等的初边值问题[1]• 曾庆存(1979) , 穆穆(1986) 也对球面正压大气, 斜压大气以及准地转方程组等的适定性问题做了深入研究[2,3]• 海气耦合方程组也是过去几年的一个热点[4]•

除了泛函的观点以外, 还可运用其它的方法• 例如, 使用分层理论研究非线性偏微分方程组的拓扑学性质, 这使得明确非线性偏微分方程解空间结构以及适定定解问题的解析求解成为可能• 施惟慧和她的研究小组将这一理论系统地应用于流体力学和大气动力学之中[5]• 例如, 陈达段等(1996) 使用该理论探讨了一类粘性耗散系统的解空间结构和稳定性[6]• 何幼桦

* 收稿日期: 2003_09_02; 修订日期: 2006_03_24
资金项目: 国家自然科学基金资助项目(40233027) ; 国家自然科学基金重大研究计划全球变化及其区域响应面上项目(90411006)
作者简介: 何卷雄(1975—) , 男, 广西柳州人, 助理研究员, 博士(联系人. Tel: + 86_10_87345283; Fax: + 86_10_62562347; E_mail: hejx@ mail. iap. ac. cn) .

等(2000)讨论带 C^k 多项式的Navier_Stokes方程• 这一方程当 C^k 多项式写成Coriolis力的时候就成为一类不可压的粘性大气方程组[7]•

本文将运用分层理论分析一类大气演化方程组• 这一类方程组与一般流体力学方程组有着相似的结构•

1 方程组

除了引入3个新的变量以外, 本文使用的所有符号与文献[5]相同• 这3个新的变量是 $\boldsymbol{P}(x, u)$, π_1 和 π_2• $\boldsymbol{P}(x, u) = (P_1(x, u), P_2(x, u), P_3(x, u))$ 表示惯性力• π_1 表示大气的可压缩性, 当 π_1 为0时, 方程组无辐散; 当 π_1 为1时, 方程组是可压的• π_2 表示大气的粘性, 当 π_2 为0时, 方程组无粘性; 当 π_2 为1时, 方程组具有粘性• 值得注意的是在 π_2 为0的条件下, 我们保留了 $\mathrm{div}(\chi\nabla T)$ 项, 因为我们假定因粘性而耗散的动量全部转为大气内部的热量, 而大气内部仍然具有热传导能力• 保留 $\mathrm{div}(\chi\nabla T)$ 项和热耗散项比忽略这两项更符合运动的本身特性• 同时, 需要指出的是: 尽管大气是温度不高的低速流体, 我们并没有忽略了第二粘性系数• 这是因为如果略去第二粘性系数, 方程组将不满足连续介质力学的Cauchy第二定律(即角动量守恒定律), 这会引入虚假的角动量源和热源, 进而破坏了方程组内在协调性• 方程组具有以下形式:

$$
\begin{cases}
\pi_1 \dfrac{\mathrm{d}u_4}{\mathrm{d}t} + u_4 \dfrac{\partial u_l}{\partial x_l} = 0, \\[2ex]
u_4 \dfrac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \pi_2 \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i} - \dfrac{2}{3}\delta_{ik}\dfrac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)\right) + \\
\qquad\qquad \pi_2 \dfrac{\partial}{\partial x_i}\zeta\dfrac{\partial u_l}{\partial x_l} + F_i(x, t) + P_i(x, u), \\[2ex]
u_4 u_5 \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \mathrm{div}(\chi\nabla u_4) + \pi_2 \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i} - \dfrac{2}{3}\delta_{ik}\left(\dfrac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)\right)^2\right),
\end{cases}
$$

其中

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}•
$$

这里使用了Einstein指标求和, $i, k, l = 1, 2, 3$• 如果

$$
\begin{aligned}
P_1(x, u) &= 2(\Omega_3 u_2 - \Omega_2 u_3), \\
P_2(x, u) &= 2(\Omega_1 u_3 - \Omega_3 u_1), \\
P_3(x, u) &= 2(\Omega_2 u_1 - \Omega_1 u_2),
\end{aligned}
$$

其中 Ω_i 是 i 方向的地球自传角速度, $i = 1, 2, 3$• 因此, $\boldsymbol{P}(x, u)$ 表示Coriolis力•

设 $p_j^i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $p_{jk}^i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_k}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5; j, k = 1, 2, 3, 4$•

当 π_2 为1时, 使用Ehresmann局地坐标重写方程组为

$$
\begin{cases}
f_1: \pi_2(cp_{11}^1 + cp_{22}^1 + cp_{33}^1 + ap_{12}^2 + ap_{13}^3) + \Phi_1 = 0, \\
f_2: \pi_2(cp_{22}^2 + \eta p_{11}^2 + \eta p_{33}^2 + ap_{12}^1 + ap_{23}^3) + \Phi_2 = 0, \\
f_3: \pi_2(cp_{33}^3 + \eta p_{11}^3 + \eta p_{22}^3 + ap_{13}^1 + ap_{23}^2) + \Phi_3 = 0, \\
f_4: \chi(p_{11}^5 + p_{22}^5 + p_{33}^5) + \Phi_4 = 0, \\
f_5: \pi_1 u_4(p_1^1 + p_2^2 + p_3^3) + u_1 p_1^4 + u_2 p_2^4 + u_3 p_3^4 + p_4^4 = 0•
\end{cases}
\tag{1}
$$

当 π_2 为 0 时，方程组重写为

$$\begin{cases} f_1:\ u_4(u_1p_1^1+u_2p_2^1+u_3p_3^1)+p_1p_1^4+p_2p_1^5+\Phi_1'=0,\\ f_2:\ u_4(u_1p_1^2+u_2p_2^2+u_3p_3^2)+p_1p_2^4+p_2p_2^5+\Phi_2'=0,\\ f_3:\ u_4(u_1p_1^3+u_2p_2^3+u_3p_3^3)+p_1p_3^4+p_2p_3^5+\Phi_3'=0,\\ f_4:\ \chi(p_{11}^5+p_{22}^5+p_{33}^5)+\Phi_4'=0,\\ f_5:\ \pi_1u_4(p_1^1+p_2^2+p_3^3)+u_1p_1^4+u_2p_2^4+u_3p_3^4+p_4^4=0, \end{cases} \tag{2}$$

其中 Φ_1、Φ_2、Φ_3、Φ_4 和 Φ_4' 是 p_j^i、F_i 和 P_i 的算术组合，而 Φ_1'、Φ_2' 和 Φ_3' 是 F_i 和 P_i 的算术组合，c 和 a 具有与文献[5]同样的形式。

通过对 π_1 和 π_2 的不同取值组合，我们得到 4 类大气方程组、粘性不可压(Navier_Stokes 方程，本文不包括这类方程)、粘性可压(具有惯性力作用的 Landau_Lifschitz 方程)、无粘不可压(具有惯性力作用的 Euler 方程)以及无粘可压方程。Landau_Lifschitz 方程和 Euler 方程在文献[5]中得到详尽的研究。在下 1 节中，我们将证明惯性力在分层理论的框架下不发挥作用，同时也将证明可压缩性对粘性大气方程 Cauchy 问题的适定条件没有影响。

首先讨论方程组的简单性。因为简单性是偏微分方程的一个重要性质，一个 l_简单 $(l\geqslant 1)$ 方程在解析函数类中将不存在任何适定的 Cauchy 问题[5]。

定理 1　无粘大气方程组是 0_简单的。

证明　我们需要证明对 $\forall k\geqslant 0$，当 $\pi_2=0$ 时无论 π_1 为 0 或 1，都有 $a_{k-1}^k(D_k')=D_{k-1}'$。对于 $k=0$，很明显

$$a_{k-1}^k(D_k')=D_{k-1}'.$$

对于 $k=1$，设 p_1^1、p_2^2、p_3^3、p_4^4 为未知的变量，相应的系数矩阵行列式为

$$|\boldsymbol{B}_1|=\chi u_4^3u_1u_2u_3\neq 0.$$

对于 $k=2$，$\beta=(x_1,x_2,x_3,x_4,u_1,\cdots,u_5,p_1^1,\cdots,p_{jl}^i,\cdots,p_{42}^5)\in J^2(V,Z)$，如果 $\beta\in D_2'$。准本方程由 f_1、f_2、f_3、f_4、$e_i(f_1)$、$e_i(f_2)$、$e_i(f_3)$、$e_i(f_4)$、f_5 组成。如果设 p_{1i}^1、p_{1i}^2、p_{1i}^3、p_{1i}^4、p_{1i}^5、p_1^1、p_2^2、p_3^3、p_4^4 $(i=1,2,3,4)$ 为未知的变量，系数矩阵为

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_2' & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2''\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{B}_2''=\boldsymbol{B}_1,\quad \boldsymbol{B}_2'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & 0 & 0 & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ 0 & \boldsymbol{A} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{A} & 0 & 0\\ \pi_1\boldsymbol{A} & 0 & 0 & \boldsymbol{A} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}u_4u_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & u_4u_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & u_4u_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & u_4u_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}p_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & p_1\end{pmatrix},$$

同时 C 对矩阵的秩没有影响。于是

$$|\boldsymbol{B}_2|=\chi u_4^{15}u_1^9u_2u_3(u_4u_1-\pi_1p_1)^4\neq 0.$$

一般地, 当 $k \geqslant 3$ 时, $a^{k-1}_{k-2}(D'_{k-1}) = D'_{k-2}$ 成立• 类似地, 设 $p^1_{1ii_1\cdots i_{k-2}}$、$p^2_{1ii_1\cdots i_{k-2}}$、$p^3_{1ii_1\cdots i_{k-2}}$、$p^4_{1ii_1\cdots i_{k-2}}$、$p^5_{1ii_1\cdots i_{k-2}}$ 为新的未知变量, 未知变量的系数矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 可分为两部分: $\boldsymbol{B}'_k$ 和 $\boldsymbol{B}''_k$• $\boldsymbol{B}'_k$ 对应于 D'_{k-2} 未知变量的系数, $\boldsymbol{B}''_k$ 对应于新的未知变量的系数• $*$ 是新的未知变量在 D'_{k-2} 的系数, 但它对 $\boldsymbol{B}_k$ 的秩没有影响•

$$\boldsymbol{B}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}'_k & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}''_k \end{pmatrix}_{r_k \times r_k},$$

其中

$$\boldsymbol{B}''_k = \boldsymbol{B}_{k-1}, \quad r_k = 4C^3_{k+2} + C^3_{k+1} + r_{k-1},$$

$$\boldsymbol{B}'_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{(k)} & 0 & 0 & \boldsymbol{B}^{(k)} & \boldsymbol{C}^{(k)} \\ 0 & \boldsymbol{A}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}^{(k)} & 0 & 0 \\ \pi_1 \boldsymbol{A}^{(k)} & 0 & 0 & \boldsymbol{A}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I}^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} u_4u_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & u_4u_1 \end{pmatrix}_{C^3_{k+2} \times C^3_{k+2}}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} p_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & p_1 \end{pmatrix}_{C^3_{k+2} \times C^3_{k+2}},$$

$$\boldsymbol{I}^{(k)} = \begin{pmatrix} \chi \\ \vdots \\ \chi \end{pmatrix}_{C^3_{k+2} \times 1},$$

同时 $C^{(k)}$ 对矩阵的秩没有影响• 于是

$$|\boldsymbol{B}_k| = [\chi u_4^3 u_1^2 (u_4u_1 - \pi_1 p_1)]^{C^3_{k+2}} u_4^3 u_1 u_2 u_3 \neq 0•$$

我们可得到

$$a^k_{k-1}(D'_k) = D'_{k-1}•$$

于是对于 $\forall k \geqslant 0$, 无论 π_1 为 0 或 1, 都有 $a^k_{k-1}(D'_k) = D'_{k-1}$• 证毕•

2　Cauchy 问题

定理 2　Φ'_i 和 Φ_i 项, $i = 1, 2, 3, 4$, 对方程 Cauchy 问题的适定性没有影响•

证明　我们首先考虑方程组(1), 在下列初始条件下的广义 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}\,|_{t = g(x_1, x_2, x_3)} = \boldsymbol{u}^0(x_1, x_2, x_3), \\ \partial_t \boldsymbol{u}\,|_{t = g(x_1, x_2, x_3)} = \boldsymbol{u}^1(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是表示方程组的 5 个未知函数,

$$\partial_t \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_3}{\partial t}, \frac{\partial u_4}{\partial t}, \frac{\partial u_5}{\partial t}\right),$$

为未知函数关于 t 的一阶偏导数• $\boldsymbol{u}^0 = (u^0_1, u^0_2, u^0_3, u^0_4, u^0_5)$ 为超曲面 $t = g(x_1, x_2, x_3)$ 上的初始函数值, 而 $\boldsymbol{u}^1 = (u^1_1, u^1_2, u^1_3, u^1_4, u^1_5)$ 为超曲面上 $t = g(x_1, x_2, x_3)$ 上未知函数关于 t 的一阶偏导数值, 它们均为 (x_1, x_2, x_3) 的函数• 记

$$\partial_t \boldsymbol{u} = (p^1_4, p^2_4, p^3_4, p^4_4, p^5_4)•$$

我们在三维空间中任意一点 $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, g(x_1^0, x_2^0, x_3^0))$ 附近考虑局部问题, 由文献[5], 上述初值问题可表示成

$$\alpha^1_{-1}\circ\gamma_1=\sigma, \tag{4}$$

$$\gamma_1^*\omega=0, \qquad \forall\,\omega\in I_1(R^4, R^5), \tag{5}$$

$$\gamma_1(\Sigma)\subseteq D_1, \tag{6}$$

其中, Σ 是维数为 3 的 C^∞ 微分流形, σ、γ_1 分别是从 Σ 到 R^4 和 $J^1(R^4, R^5)$ 的 C^∞ 嵌入,

$$G(\xi_1, \xi_2, \xi_3)=g(x_1^0+\xi_1, x_2^0+\xi_2, x_3^0+\xi_3)-g(x_1^0, x_2^0, x_3^0),$$

满足 $G(\mathbf{0})=0$. 于是

$$\sigma(\xi)=(x_1^0+\xi_1, x_2^0+\xi_2, x_3^0+\xi_3, g(x_1^0, x_2^0, x_3^0)+G(\xi_1, \xi_2, \xi_3)),$$

$$\gamma_1(\xi)=(x_1^0+\xi_1, x_2^0+\xi_2, x_3^0+\xi_3, g(x_1^0, x_2^0, x_3^0)+G(\xi)+p_j^i(\xi)).$$

式(4)显然成立, 根据式(5), 我们有

$$p_j^i=u_i(j)-\delta_j p_4^i, \qquad j=1,2,3;\ i=1,2,3,4,5,$$

$$u_i(j)=\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j},\quad \delta_j=\frac{\partial G}{\partial \xi_j}, \qquad j=1,2,3.$$

再由式(6), 得到

$$\begin{aligned}\pi_1 u_4(\delta_1 p_4^1+\delta_2 p_4^2+\delta_3 p_4^3)+(u_1\delta_1+u_2\delta_2+u_3\delta_3-1)p_4^4={}\\ \pi_1 u_4(u_1(1)+u_2(2)+u_3(3))+u_1u_4(1)+u_2u_4(2)+u_3u_4(3).\end{aligned} \tag{7}$$

这是初始数据所应满足的相容性条件.

提升 γ_1 得到 $\gamma_2\colon \Sigma\to J^2(R^4, R^5)$ (参见图 1), 它满足

$$\alpha^2_{-1}\circ\gamma_2=\sigma, \tag{8}$$

$$\gamma_2^*\omega=0, \qquad \forall\,\omega\in I_2(R^4, R^5), \tag{9}$$

$$\gamma_2(\Sigma)\subseteq D_2. \tag{10}$$

$$\begin{tikzcd}
 & J^k(R^4, R^5) \arrow[d, dotted] \\
 & J^2(R^4, R^5) \arrow[d, "\alpha^2_1"] \\
 & J^1(R^4, R^5) \arrow[d, "\alpha^1_{-1}"] \\
\Sigma \arrow[uuur, "\gamma_k"] \arrow[uur, "\gamma_2"] \arrow[ur, "\gamma_1"] \arrow[r, "\sigma"] & J^{-1}(R^4, R^5)=R^4
\end{tikzcd}$$

图 1

式(8)显然成立, 根据式(9), 我们有

$$\begin{aligned}p_{jk}^i &= p_k^i(j)-\delta_j p_{k4}^i=\\ &p_k^i(j)-\delta_j(p_4^i(k)-\delta_k p_{4^2}^i)=\\ &p_k^i(j)-\delta_j p_4^i(k)+\delta_j\delta_k p_{4^2}^i=\\ &p_j^i(k)-\delta_k p_4^i(j)+\delta_j\delta_k p_{4^2}^i,\\ &\qquad j,k=1,2,3;\ i=1,2,3,4,5,\end{aligned}$$

$$p_k^i(j)=\frac{\partial p_k^i}{\partial \xi_j},\quad \delta_j=\frac{\partial G}{\partial \xi_j}, \qquad j=1,2,3.$$

再由式(10), 得到

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{B}_2, \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} c\delta_1^2+\eta\delta_2^2+\eta\delta_3^2 & \alpha\delta_1\delta_2 & \alpha\delta_1\delta_3 & 0 & 0\\ \alpha\delta_2\delta_1 & \eta\delta_1^2+c\delta_2^2+\eta\delta_3^2 & \alpha\delta_2\delta_3 & 0 & 0\\ \alpha\delta_3\delta_1 & \alpha\delta_3\delta_2 & \eta\delta_1^2+\eta\delta_2^2+c\delta_3^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2\\ \pi_1u_4\delta_1 & \pi_1u_4\delta_2 & \pi_1u_4\delta_3 & u_1\delta_1+u_2\delta_2+u_3\delta_3-1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} p^1_{4^2} & p^2_{4^2} & p^3_{4^2} & p^4_{4^2} & p^5_{4^2} \end{pmatrix}',$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{\Phi_1}{\pi_2} - c(p^1_1(1) - \delta_1 p^1_4(1)) - \eta(p^1_2(2) - \delta_2 p^1_4(2)) - \eta(p^1_3(3) - \delta_3 p^1_4(3)) - \\ \alpha(p^1_2(2) - \delta_2 p^2_4(1)) - \alpha(p^3_1(3) - \delta_3 p^3_4(1)) \\ -\dfrac{\Phi_2}{\pi_2} - c(p^2_2(2) - \delta_2 p^2_4(2)) - \eta(p^2_1(1) - \delta_1 p^2_4(1)) - \eta(p^2_3(3) - \delta_3 p^2_4(3)) - \\ \alpha(p^1_1(2) - \delta_2 p^1_4(1)) - \alpha(p^3_2(3) - \delta_3 p^3_4(2)) \\ -\dfrac{\Phi_3}{\pi_2} - c(p^3_3(3) - \delta_3 p^3_4(3)) - \eta(p^3_1(1) - \delta_1 p^3_4(1)) - \eta(p^3_2(2) - \delta_2 p^3_4(2)) - \\ \alpha(p^1_1(3) - \delta_3 p^1_4(1)) - \alpha(p^2_2(3) - \delta_3 p^2_4(2)) \\ -\dfrac{\Phi_4}{\chi} - p^5_1(1) + \delta_1 p^5_4(1) - p^5_2(2) + \delta_2 p^5_4(2) - p^5_3(3) + \delta_3 p^5_4(3) \\ \pi_1(u_4(p^1_4(1) + p^2_4(2) + p^3_4(3)) + p^4_4(p^1_1 + p^2_2 + p^3_3)) + \\ u_1 p^4_4(1) + u_2 p^4_4(2) + u_3 p^4_4(3) + p^1_4 p^4_1 + p^2_4 p^4_2 + p^3_4 p^4_3 \end{pmatrix}.$$

显然, $\boldsymbol{p}_2$ 的存在唯一性完全由 $\boldsymbol{M}$ 的性质决定, 而与 $\boldsymbol{B}_2$ 无关. 进一步提升 γ_2, 得到一般的 γ_k, $k > 2$ (参见图 1), 我们有

$$\alpha^k_{-1} \circ \gamma_k = \sigma, \tag{12}$$

$$\gamma^*_k \omega = 0, \qquad \forall\, \omega \in I_k(R^4, R^5), \tag{13}$$

$$\gamma_k(\Sigma) \subseteq D_k. \tag{14}$$

类似地, 可以得到

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{B}_k. \tag{15}$$

注意到 $\boldsymbol{M}$ 与式(11) 中的 $\boldsymbol{M}$ 相同, 它与 k 无关, 且独立于 Φ_j, $j = 1, 2, 3, 4$. $\boldsymbol{B}_k$ 由 Φ_j, $j = 1, 2, 3, 4$ 和 $\boldsymbol{p}_l$, $l \leqslant k - 1$ 及其关于 ξ_i, $i = 1, 2, 3$ 的偏导数决定. 而 $\boldsymbol{p}_k = \begin{pmatrix} p^1_{4^k} & p^2_{4^k} & p^3_{4^k} & p^4_{4^k} & p^5_{4^k} \end{pmatrix}'$ 的存在唯一性仅仅由 $\boldsymbol{M}$ 的性质就可以决定, 而 $\boldsymbol{M}$ 的性质又完全决定了初始条件所对应的末方程是否能够落在横截层中, 由分层理论的基本定理[5], 这也决定了相应 Cauchy 问题的适定性. 所以 Φ_j, $j = 1, 2, 3, 4$ 项, 对方程组(1) 的 Cauchy 问题的适定性没有影响.

对于方程组(2), 考虑下列初始条件下的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}\,|_{t = g(x_1, x_2, x_3)} = \boldsymbol{u}^0(x_1, x_2, x_3), \\ \partial_t \boldsymbol{u}\,|_{t = g(x_1, x_2, x_3)} = \boldsymbol{u}^1(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \tag{16}$$

类似地可以得到 $\boldsymbol{p}_k = \begin{pmatrix} p^1_{4^k} & p^2_{4^k} & p^3_{4^k} & p^4_{4^k} & p^5_{4^k} \end{pmatrix}'$ $(k \geqslant 2)$ 应满足的线性方程组

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{B}_k, \tag{17}$$

其中

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} u_4\delta & 0 & 0 & p_1\delta_1 & p_2\delta_1 \\ 0 & u_4\delta & 0 & p_1\delta_2 & p_2\delta_2 \\ 0 & 0 & u_4\delta & p_1\delta_3 & p_2\delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 \\ \pi_1 u_4\delta_1 & \pi_1 u_4\delta_2 & \pi_1 u_4\delta_3 & \delta - 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\delta = u_1\delta_1 + u_2\delta_2 + u_3\delta_3$•

注意到 $\boldsymbol{M}$ 同样与 k 无关，且独立于 φ_j', $j = 1, 2, 3, 4$• $\boldsymbol{B}_k$ 由 φ_j', $j = 1, 2, 3, 4$ 和 $\boldsymbol{p}_l$, $l \leqslant k - 1$ 及其关于 ξ_i, $i = 1, 2, 3$ 的偏导数决定• 所以 φ_j', $j = 1, 2, 3, 4$ 项同样对方程组(2)的 Cauchy 问题的适定性没有影响• 证毕•

推论 1 方程组(1)与初始条件(3)构成的 Cauchy 问题适定的充要条件是

$$\begin{cases} \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 \neq 0, \\ u_1\delta_1 + u_2\delta_2 + u_3\delta_3 - 1 \neq 0, \\ (\alpha\delta_1\delta_3)^2((\alpha - c)\delta_2^2 - \eta(\delta_1^2 + \delta_3^2)) + (\alpha\delta_2\delta_3)^2((\alpha - c)\delta_1^2 - \\ \qquad \eta(\delta_2^2 + \delta_3^2)) + (c\delta_2^2 + \eta(\delta_1^2 + \delta_3^2) - \alpha(\delta_1\delta_2)^2)(c\delta_1^2 + \\ \qquad \eta(\delta_2^2 + \delta_3^2))(c\delta_3^2 + \eta(\delta_1^2 + \delta_2^2)) \neq 0, \end{cases} \tag{18}$$

方程组(2)与初始条件(16)构成的 Cauchy 问题适定的充要条件是

$$\begin{cases} \delta \neq 0, \\ \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 \neq 0, \\ p_1\pi_1(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) + \delta(1 - \delta) \neq 0, \end{cases} \tag{19}$$

其中 $\delta = u_1\delta_1 + u_2\delta_2 + u_3\delta_3$• 特别在 $t = 0$ 上给出初始条件，上述两个 Cauchy 问题均是不适定的• 因此，我们可以得到以下推论:

推论 2 大气方程组(1)和(2)在 $t = 0$ 超平面上构成的 Cauchy 问题均不适定，不受粘性和可压缩性的影响•

由于条件(19)中要求 $\delta = u_1\delta_1 + u_2\delta_2 + u_3\delta_3 \neq 0$，我们又得如下推论:

推论 3 当初始条件(16)中的大气运动是静止时，Cauchy 问题(2)、(16)是不适定的•

从上述推论还看到，当 π_1 为 0 时，方程组(1)的 Cauchy 问题的适定性条件并未受到影响，但方程组(2)的 Cauchy 问题的适定性条件则有了改变• 于是我们有下述定理:

定理 3 对于粘性大气，大气的可压缩性对方程组 Cauchy 问题的适定性没有影响•

3 结 论

通过上面的在分层理论的框架下的讨论，证明了：1) 惯性力对一类大气演化方程组 Cauchy 问题的适定性判别标准没有影响；2) 可压缩性对粘性大气方程组 Cauchy 问题的适定性判别标准没有影响，但对无粘大气方程组可压缩性改变了 Cauchy 问题适定性判别标准；3) 大气方程组在超平面上均是不适定的，不受粘性和可压缩性的影响；4) 可压无粘大气方程与运动静止初始条件构成的 Cauchy 问题是不适定的•

致谢 本文作者对黄思训教授和施惟慧教授表示衷心的谢意•

[参 考 文 献]

[1] Oliger J, Sundstrom A. Theoretical and practical aspects of some initial_boundary value problems in the field dynamics[J]. SIAM J Appl Math, 1978, **35**(3): 419—446.

[2] 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础[M]. 北京: 科学出版社, 1979.

[3] 穆穆. 广义涡度方程初边值问题的整体光滑解及其应用[J]. 中国科学, A 辑, 1986, **29**(11): 1153—1163.

[4] Temam Roger, WANG Shou_hong. Mathematical problems in meteorology and oceanography[J]. Bull

Amer Meteorol Soc, 2000, **81**(2): 319—321.

[5] 施惟慧, 陈达段, 何幼桦. 分层理论与非线性偏微分方程基础[M]. 上海: 上海大学出版社, 2001.

[6] 陈达段, 刘晓明, 施惟慧. 关于强迫耗散非线性系统的稳定性[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(6): 515—522.

[7] 何幼桦, 施惟慧. 带未知函数多项式附加项的 Navier_Stokes 方程的 C^k 不稳定性[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(12): 1301—1309.

On the Cauchy Problem of One Type of Atmosphere Evolution Equations

HE Juan_xiong[1], HE You_hua[2]

(1. ICCES, Institute of Atmospheric Physics, CAS, Beijing 100029, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China)

Abstract: One type of evolution atmosphere equations was discussed. It is found that according to the stratification theory, 1) the inertial force has no influence on the criterion of the well_posed Cauchy problem; 2) the compressibility plays no role on the well posed condition of the Cauchy problem of the viscid atmosphere equations, but changes the well posed condition of the viscid atmosphere equations; 3) this type of atmosphere evolution equations is ill_posed on the hyperplane $t = 0$ in spite of its compressibility and viscosity; 4) the Cauchy problem of compressible viscosity atmosphere with still initial motion is ill_posed.

Key words: well_posedness; viscosity; compressibility; stratification theory