

基于修正的 Magnus 方法的高振荡动力系统的数值积分方法*

李文成¹, 邓子辰^{2,3}, 黄永安²

(1. 西北工业大学 理学院 应用数学系, 西安 710072;

2. 西北工业大学 力学与土建学院 工程力学系, 西安 710072;

3. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

(岳珠峰推荐)

摘要: 基于建立于一般线性动力系统上的 Magnus 数值积分方法, 针对随时间而高频率振荡的二阶动力系统, 给出了有效的修正 Magnus 数值积分算法。首先, 将二阶动力系统重新表示为一阶系统的形式, 通过引进新变量进行参考坐标变换, 使动力系统的高振荡性质保留在新形式内; 进而基于局部线性化技术用修正的 Magnus 方法求解新形式下的系统方程; 最后, 通过一系列数值实验说明了文中方法的有效性。

关键词: 动力系统; 高振荡; Magnus 方法; Hamilton 系统

中图分类号: O322; O241 **文献标识码:** A

引言

考虑具有初值问题的二阶微分方程

$$\ddot{y} + g(t)y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad (1)$$

并且其解的振荡性态的时间尺度远小于积分区间。本文讨论这类高振荡动力系统的数值计算问题。高振荡动力系统广泛存在于许多领域, 不仅在诸如分子动力系统, 电路仿真系统, 柔性体系统等领域, 甚至振荡现象渗透于太空中卫星天线的折叠情形, 以及车辆悬轴导向系统的定位过程中。我们更感兴趣的问题是如何对形如式(1)的高振荡问题的模型方程进行有效的数值求解, 该问题是解决高振荡问题的首要条件。

高振荡微分方程的数值积分方法, 历来是微分方程的数值求解问题中, 最富有挑战性的难点问题之一。经典数值算法效果甚微, 这也激励人们探讨新颖而富有创造性的数值方法^[1,2]。最早采用大步长求解振荡问题始于 Gautschi^[3], 给出了形如 $\dot{y} + \omega^2 y = g(t, y)$ (其中 ω 为固定频率) 的微分方程的三角函数积分方法; 他的方法很快推广到形如: $\dot{y} + Ay = g(t, y)$,

* 收稿日期: 2005-08-16; 修订日期: 2006-04-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572119); 教育部新世纪优秀人才计划资助项目(NCET_04_0958); 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目

作者简介: 李文成(1978—), 男, 宁夏人, 博士(联系人, Tel: + 86_29_88495146; Fax: + 86_29_88460604; E-mail: wenchengli@nwpu.edu.cn)。

其中 A 为对称、半正定的常矩阵。García-Archilla, Sanz-Serna & Skeel^[4] 给出了 Mollified Impulse 方法, 而 Hochbruck & Lubich^[5] 研究了 Gautschi_型积分。最近, 基于 Magnus 方法^[6,7], Iserles 等人将研究推进到与时间相关的 $A(t)$ 情形, 发展了完全不同的方法来数值求解高振荡线性微分方程。基于 Iserles 的思想, 本文开展了以下工作: 首先在第 1 节给出一般线性微分方程的基于 Magnus 展式的数值逼近格式, 然后给出高振荡微分方程的修正 Magnus 积分方法; 第 2 节进一步基于 Cayley 变换, 高效地逼近指数映射, 同样得到有效的逼近高振荡微分方程数值积分格式; 第 3 节给出数值实验, 验证了本文所给方法对处理高振荡动力系统问题的有效性, 特别地, 考虑了 Hamilton 系统问题。最后是结论。

1 基于修正的 Magnus 方法的数值积分方法

1.1 Magnus 积分方法

首先考虑基于 Magnus 展式的线性动力系统的数值积分方法的基本思路。将式(1)写成向量形式:

$$\dot{y} = A(t)y(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

其中

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}.$$

我们知道, 上式(2)的解可以写为如下形式

$$y(t) = e^{\Omega(t)} y_0, \quad (3)$$

其中, Ω 满足如下方程:

$$\dot{\Omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \text{ad}^k_{\Omega} A, \quad t \geq t_0, \quad \Omega(t_0) = 0,$$

这里, $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 Bernoulli 函数, 并且有

$$\text{ad}^0_{\Omega} A = \Omega, \quad \text{ad}^k_{\Omega} A = [A, \text{ad}^{k-1}_{\Omega} A] = A \text{ad}^{k-1}_{\Omega} A - \text{ad}^{k-1}_{\Omega} A A.$$

式(3)中的 Ω 由所谓的 Magnus 展式给定:

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & \int_0^t A(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{\xi_1} [A(\xi_2), A(\xi_1)] d\xi_2 d\xi_1 + \\ & \frac{1}{12} \int_0^t \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} [A(\xi_3), [A(\xi_2), A(\xi_1)]] d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 + \\ & \frac{1}{4} \int_0^t \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} [[A(\xi_3), A(\xi_2)], A(\xi_1)] d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Magnus 展式原来主要作为量子力学系统的解的分析逼近。近来它被作为有效的数值积分工具, 也主要是因为它逼近解析解时, 严格将逼近解限定在同一空间, 可给出类似解析解的几何性质。为了离散逼近解(3), 必须截断无穷级数(4), 并将该积分数值求积。因此, 以步长 $h > 0$ 逼近 $y(t_{n+1}) = e^{\Omega_n(h)} y(t_n)$ 的 Magnus 数值格式的形式为

$$y(t_{n+1}) = e^{\Omega_n(h)} y(t_n), \quad (5)$$

$\Omega_n(h)$ 是 $\Omega_n(h)$ 的截断部分, 其中的积分由数值积分代替。

对于 Magnus 积分方法, 我们考虑给出它的一个基于 Gauss-Legendre 点的四阶方法。对于每一时间步 n , 定义

$$A_i = A(t_n + c_i h), \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

其中, $c_1 = 1/2 - \sqrt{3}/6$, $c_2 = 1/2 + \sqrt{3}/6$. 由于只考虑四阶 Magnus 方法(Magnus4), 所以 $y_{n+1} = e^{\Omega_n} y_n$, 其中的 Ω_n 为

$$\Omega_n = \frac{h}{2}(A_1 + A_2) - \frac{\sqrt{3}}{12} h^2 [A_1, A_2]. \tag{7}$$

1.2 修正的 Magnus 积分方法

下面考虑线性动力系统(2)的修正的 Magnus 积分方法, 该方法适宜于振荡问题的数值求解^[8,9]. 当时间由 t_n 推进到 $t_n + h$ 时, 令

$$y(t) = e^{(t-t_n)A(t_{n+1/2})} x(t), \quad t \geq t_n, \tag{8}$$

其中, $t_{n+1/2} = t_n + h/2$, 而函数 $x(t)$ 满足

$$\dot{x} = B(t)x, \quad t \geq t_n, \quad x(t_n) = y(t_n), \tag{9}$$

$$B(t) = e^{(t-t_n)A(t_{n+1/2})} [A(t) - A(t_{n+1/2})] e^{-(t-t_n)A(t_{n+1/2})}. \tag{10}$$

方程(9)可以由上节中 Magnus 积分方法离散, $x(t) = e^{\Omega_n(h)} y_n$, 从而得到全局逼近

$$y_{n+1} = e^{hA(t_{n+1/2})} e^{\Omega_n(h)} y_n, \quad n \in \mathbf{Z}_+. \tag{11}$$

由式(5)、(6)和(7)离散后, 可得到修正的 Magnus 积分格式(modified Magnus4).

该算法的基本思想是方程(2)的振荡性态很好地由常系数的线性方程: $\dot{y} = A(t_{n+1/2})y$ 所控制. 由(10)式可知矩阵 B 的第一个特性是 $B(t) = O(t - t_{n+1/2})$, 所以(11)式表示对解的高阶修正; 另外, 向量场 $B(t)$ 本身就是高振荡函数, 考虑到积分算子相对于微分算子更为光滑, (11)式的 Magnus 展式包含了该矢量重复积分和低阶的振幅, 因此, $B(t)$ 的高振荡特性被很好地得到控制.

2 基于 Cayley 变换的高振荡动力系统的数值积分方法

由于计算 $x(t) = e^{\Omega_n(h)} y_n$ 的过程代价昂贵, 所以考虑按照 Iserles^[10] 的思想, 引用 Cayley 映射来近似逼近指数映射, 从而高效求解高振荡动力系统. 与式(3)类似, 方程(2)的解写为

$$y(t) = \text{cay}(\Omega(t)) y_0, \tag{12}$$

其中, $\text{cay}(\Omega(t)) = [I - \Omega(t)/2]^{-1} [I + \Omega(t)/2]$ 是矩阵 $\Omega(t)$ 的 Cayley 变换, 并且 $\Omega(t)$ 满足如下方程:

$$\dot{\Omega} = A - \frac{1}{2} [\Omega, A] - \frac{1}{4} \Omega A \Omega, \quad t \geq t_0, \quad \Omega(t_0) = \mathbf{0}. \tag{13}$$

注意到计算 Cayley 变换的代价要远小于计算矩阵函数的指数. 同样可以利用 Magnus 展式来求解式(13):

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & \int_0^t A(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{\xi_1} [A(\xi_2), A(\xi_1)] d\xi_2 d\xi_1 - \\ & \frac{1}{4} \int_0^t \left[\int_0^{\xi_1} A(\xi_2) d\xi_2 \right] A(\xi_1) \left[\int_0^{\xi_2} A(\xi_3) d\xi_3 \right] d\xi_1 + \\ & \frac{1}{4} \int_0^t \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} [[A(\xi_3), A(\xi_2)], A(\xi_1)] d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 + \dots \end{aligned} \tag{14}$$

类似的, 截断式(14)的无穷 Magnus 展式, 并且将积分数值求积来得到方程(2)的数值解. 从而 Cayley 数值格式为

$$y_{n+1} = \text{cay}(\Omega_n(h))y_n,$$

且 $h > 0$, $\Omega_n(h)$ 是 $\Omega_n(h)$ 的截断部分, 并且将积分数值求积.

这里, 给出基于 Cayley 变换的四阶方法来逼近 $y_{n+1} = \text{cay}(\Omega_n)y_n$, Ω_n 如下计算:

$$\Omega_n = hB + \frac{1}{12}h^2[B_1, B_0] - \frac{1}{12}h^3B_0^3, \quad (15)$$

其中, $B_0 = (A_1 + A_2)/2$, $B_1 = \sqrt{3}(A_2 - A_1)$, $A_i = A(t_n + c_i h)$, $i = 1, 2$ 且 $c_1 = 1/2 - \sqrt{3}/6$, $c_2 = 1/2 + \sqrt{3}/6$.

类似修正的 Magnus 积分方法, 考虑由时间 t_n 推进到 $t_n + h$ 时, 令

$$y(t) = e^{(t-t_n)A(t_n+1/2)}x(t), \quad t \geq t_n,$$

其中, 函数 $x(t)$ 满足方程 (9). 注意, 这里方程 (9) 由 Cayley 方法 (15) 来离散; 从而得到类似 (11) 的全局逼近解:

$$y_{n+1} = e^{hA(t_n+1/2)}\text{cay}(\Omega_n(h))y_n, \quad n \in \mathbf{Z}_+. \quad (16)$$

当 $x(t) = \text{cay}(\Omega_n(h))y_n$ 离散后, 得到修正的 Cayley 积分格式(modified Cayley4).

3 数值实验

下面通过选择不同的测试问题, 来验证本文的修正的 Magnus 方法及其基于 Cayley 变换的改进, 在处理高振荡动力系统时的有效性.

3.1 高振荡动力系统

例 1 考虑 Airy 方程的初值问题:

$$\ddot{y} + ty = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1, \quad (17)$$

该方程的精确解为 $y(t) = \sqrt{t}[A_i(-t)B_i(0) - A_i(0)B_i(-t)]$, 其中 $A_i(z)$ 是 Airy 函数, $B_i(z)$ 是第二类 Airy 函数. 可以证明该问题的解的轨迹是有界函数, 振荡形态类似 $\sin t^{3/2}$, 其频率随时间增长, 这一点意味着长时间积分十分困难, 经典 Runge_Kutta 方法^[11]在长时间求解该类问题的困难也可以证实这一点. 图 1 依次给出了经典的四阶 Runge_Kutta 方法^[11], Magnus4, modified Magnus4 和 modified Cayley4 在 $[0, 100]$ 上以不同步长求解 Airy 方程 (17) 时数值解与精确解的误差, 而图 2 则给出了 $[0, 2000]$ 时的误差. 由图 1 和 2 可以看出, Magnus 类方法在不同时间尺度上的误差明显小于 Runge_Kutta 方法; 特别地, 由图 2 可知, 当长时间数值积分时, Runge_Kutta 方法失效了, 而 Magnus 类方法却具有明显的优势. 此外, 修正的 Magnus 方法和修正的 Cayley 方法相对 Magnus 积分方法来说, 误差有了很大程度的改进.

3.2 高振荡的 Hamilton 动力系统

数值积分高振荡的 Hamilton 系统问题, 诸如分子动力系统, 或者 Hamilton 偏微分方程问题等, 也是非常困难的事情. 这里, 我们只考虑带振荡解的线性 Hamilton 方程.

例 2 考虑 Mathieu 方程:

$$\ddot{z} + (\delta + \epsilon \cos(2t))z = 0, \quad (18)$$

它是 Hill 类方程. 这类方程在物理和工程问题中经常出现, 例如, 横向体受到周期纵向荷载的稳定性问题, 以及某些电力系统的激励作用等等. 它也是 Hamilton 系统问题

$$p = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q}, \quad \dot{q} = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial p}, \quad (19)$$

其中 $(p, q) = (y, \dot{y})$, 相当于弹性常数 $f(t) = \delta + \epsilon \cos(2t)$ 随时间变化的振子. 该系统的

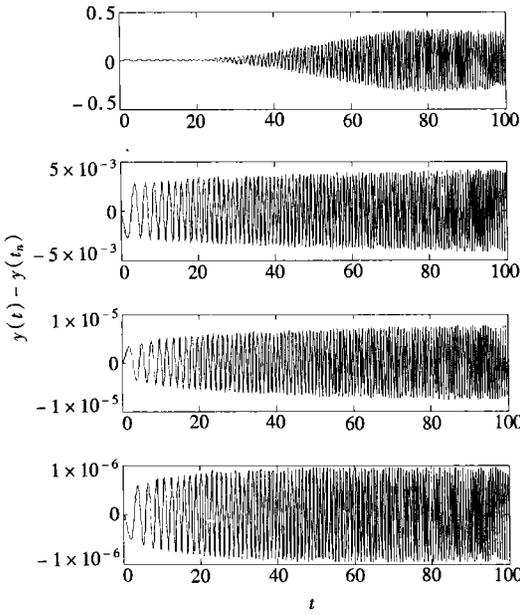


图 1a 数值解与精确解的误差(步长 $h = 1/8$)

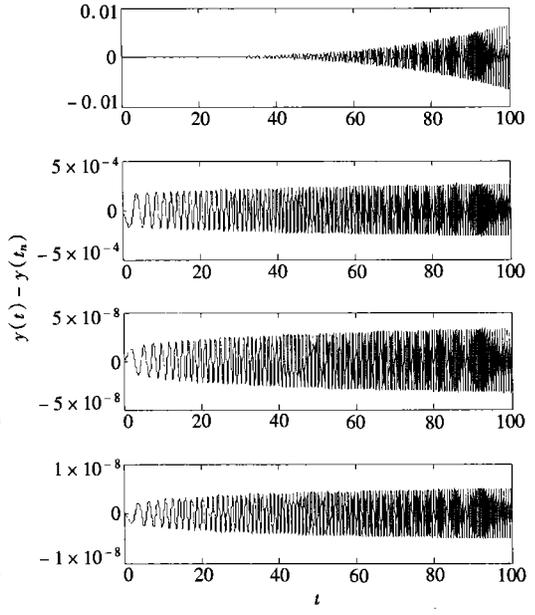


图 1b 数值解与精确解的误差(步长 $h = 1/32$)

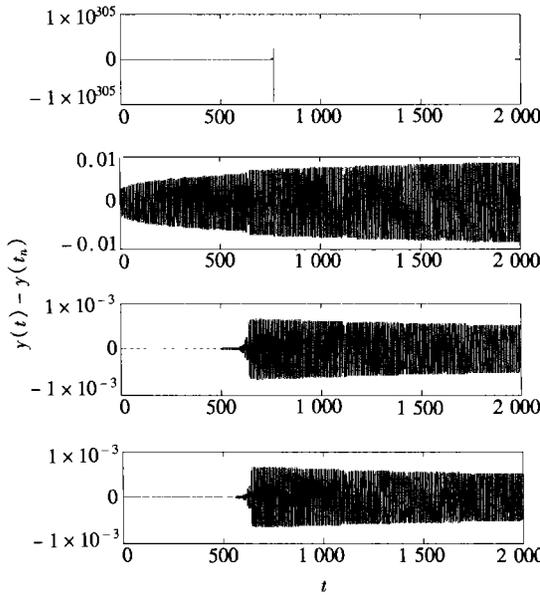


图 2a 数值解与精确解的误差(步长 $h = 1/8$)

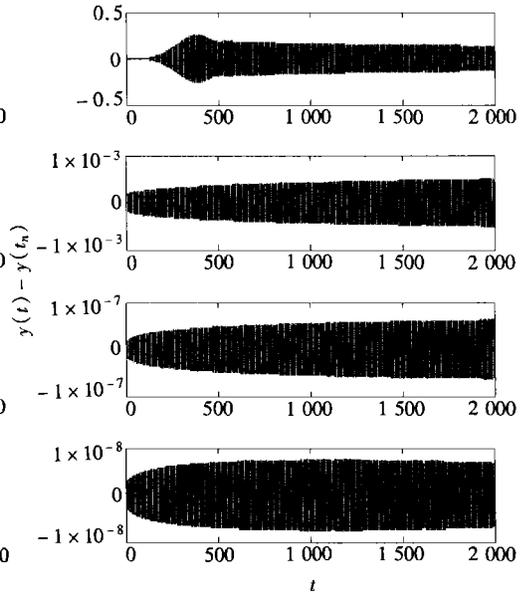


图 2b 数值解与精确解的误差(步长 $h = 1/32$)

Hamilton 能量函数为

$$H(p, q) = T(p) + V(q) \text{ 且 } T(p) = \frac{p^2}{2}, V(q) = \frac{f(t)q^2}{2}. \quad (20)$$

方程(18)的解由过渡曲线分离出稳定区域和不稳定区域, 这里分别选取两类不同的参数和初始值^[12]:

情况 1:

$$\delta = 1.000\ 499\ 968\ 748\ 047, \quad \varepsilon = 0.001, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \quad (21)$$

情况 2:

$$\begin{cases} \delta = 0.999\ 791\ 843\ 656\ 178, \quad \varepsilon = 0.001, \\ y(0) = -1.557\ 212\ 993\ 975\ 872, \quad y'(0) = 1 \end{cases} \quad (22)$$

它的精确解由充分小的时间步长近似逼近所得。图3依次给出了 Magnus4, modified Magnus4 和 modified Cayley4 在 $[0, 200\pi]$ 上以步长 $h = 1/8$ 用不同参数与初值求解 Mathieu 方程(19)时, 得到的数值解与精确解的误差, 其表现类似于前面的算例。此外, 在图4中给出上述方法的能量误差: $E_n = H(p_n, q_n) - H(p_0, q_0)$ 的对数值。注意, Magnus 类方法不属于通常的辛差分方法, 但是具有与辛差分方法类似能够近似保持 Hamilton 系统的能量守恒的性质。图4表明当上述方法应用到 Hamilton 系统(21)时具有长时间能量守恒的特点。但是当应用到非 Hamilton 系统(22)时, 尽管仍然具有很高近似精度(如图3)。但是能量不守恒。

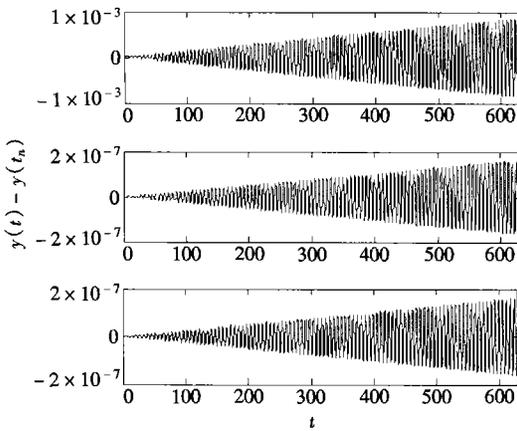


图3a 由(21)式得到的数值解与精确解的误差

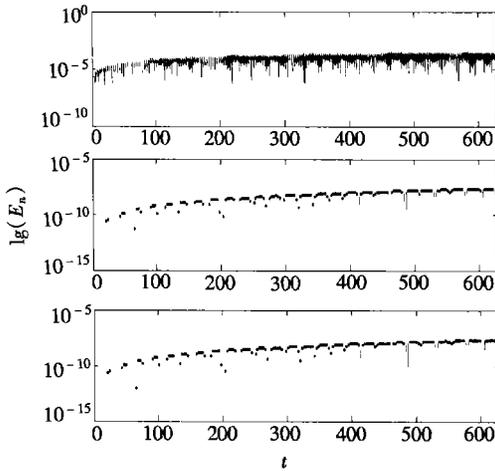


图4a 由(21)式得到的能量误差的对数值

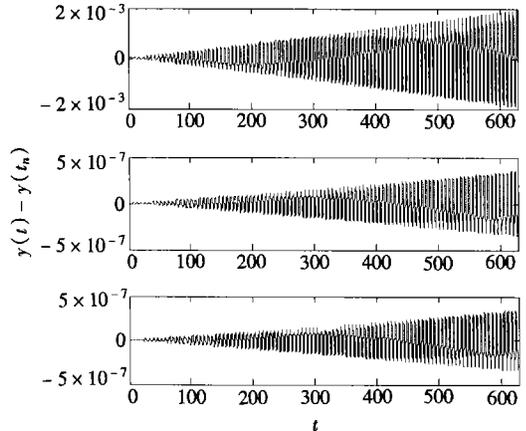


图3b 由(22)式得到的数值解与精确解的误差

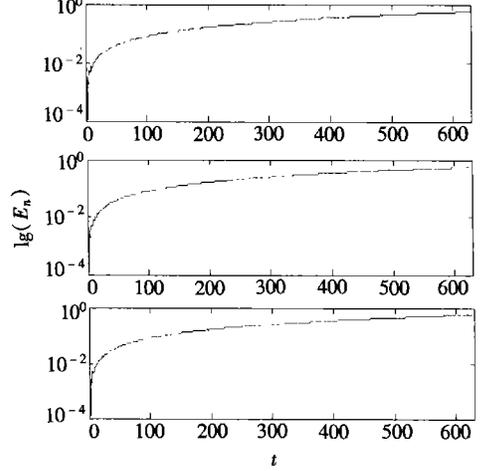


图4b 由(22)式得到能量误差的对数值

4 结 论

为了求解高振荡动力系统, 本文给出了基于将方程的解的表达式通过指数映射和 Cayley 映射来表示的数值方法。特别考虑了求解振荡问题的显式修正的 Magnus 方法, 同时也给出改进的基于 Cayley 变换的修正格式。此外, 给出一系列数值实验来表明该类算法优于 Runge_

Kutta 方法和 Magnus 方法。进一步, 将考虑非齐次方程和非线性方程。一个可能的途径是利用 Lie 变换^[13] 将非线性方程转换为自治方程, 再在本文的方法的框架下可以恰当处理。

[参 考 文 献]

- [1] Petzold L R, Jay L O, Yen J. Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations [J]. *Acta Numerica*, 1997, **6**: 437—483.
- [2] Hairer E, Lubich C, Wanner G. *Geometric Numerical Integration [M]*. Ch XIII. Berlin: Springer Verlag, 2002.
- [3] Gautschi W. Numerical integration of ordinary differential equations based on trigonometric polynomials[J]. *Numer Math*, 1961, **3**(1): 381—397.
- [4] Garcia_Archilla B, Sanz_Serna J M, Skeel R D. Long_time_step methods for oscillatory differential equations[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1998, **20**(3): 930—963.
- [5] Hochbruck M, Lubich C. A Gautschi_type method for oscillatory second_order differential equations [J]. *Numer Math*, 1999, **83**(3): 403—426.
- [6] Iserles A, Nørsett S P. On the solution of linear differential equations in Lie groups[J]. *Philos Trans Roy Soc, Ser A*, 1999, **357**(1754): 983—1020.
- [7] Iserles A, Munthe_Kaas H Z, Nørsett S P, et al. Lie_group methods[J]. *Acta Numerica*, 2000, **9**: 215—365.
- [8] Iserles A. On the global error of discretization methods for highly_oscillatory ordinary differential equations[J]. *BIT*, 2002, **42**(3): 561—599.
- [9] Iserles A, Think globally, act locally: Solving highly_oscillatory ordinary differential equations[J]. *Appl Numer Anal*, 2002, **43**(1): 145—160.
- [10] Iserles A. On Cayley_transform methods for the discretization of Lie_group equations[J]. *Found Comput Maths*, 2001, **1**(2): 129—160.
- [11] Hairer E, Nørsett S P, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems [M]*. Berlin: Springer_Verlag, 1987.
- [12] Vigo_Aguiar J, Ferr ndiz J M. A general procedure for the adaptation of multistep algorithms to the integration of oscillatory problems[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1998, **35**(4): 1684—1708.
- [13] Zhang S, Deng Z. A simple and efficient fourth_order approximation solution for nonlinear dynamical systems[J]. *Mech Res Comm*, 2004, **31**(2): 221—228.

Efficient Numerical Integrators for Highly Oscillatory Dynamic Systems Based on Modified Magnus Integrator Method

LI Wen_cheng¹, DENG Zi_chen^{2,3}, HUANG Yong_an²

(1. School of Science, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710072, P. R. China;

2. School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwest
Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China;

3. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116023, P. R. China)

Abstract: Based on the Magnus integrator method established in linear dynamic systems, an efficiently improved modified Magnus integrator method is proposed for the second_order dynamic systems with time_dependent high frequencies. Firstly, the second_order dynamic system was reformulated as a system of the first_order and transferred the frame of reference by introducing new variables so that highly oscillatory behaviour is inherited from the entries in the meantime. Then the modified Magnus integrator method based on local linearization was appropriately designed for solving the above new form and some improved ones are also presented. Finally, numerical examples are presented and analyzed to show that the proposed methods appear to be quite adequate for integration for highly oscillatory dynamic systems including Hamiltonian systems problem with long time and effectiveness.

Key words: dynamic systems; highly oscillatory; Magnus integrator method; Hamiltonian systems