文章编号: 1000_0887(2006) 09_1108_09

紧形变的一个正则值*

J•M•索里阿诺

(塞维纳大学 数学学院 数学系, 塞维纳 41080 西班牙)

(郭兴明推荐)

摘要: 给出了在 K 上的任意两个 Banach 空间之间, Fredholm 映射在一个特定的开球中, 至少有一个共同值的充分条件• 结论的证明基于解析开拓法, 并具有可构造性•

关 键 词: 正则值; 解析开拓法; 连续相关定理; C_1_同伦; 真映射; 紧映射; Fredholm 映射; 拓扑补集; Sard_Smale 定理

中图分类号: O154.3 文献标识码: A

1 预备知识

令 X 和 Y 为两个 Banach 空间• 若 $u: U \subset X \to Y$ 是一个连续映射, 则求解方程

$$u(x) = y, \tag{1}$$

y 为定值且 $y \in Y$ 的一种方法是, 将方程(1) 嵌入一个连续统问题中

$$H(x, t) = y \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{2}$$

当 $t = 0$ 时, 方程(2) 很容易求解• 当 $t = 1$ 时, 方程(2) 变成方程(1)• 在对[0, 1] 中的所有 t, 方程(2) 都有连续解时, 则方程(1) 解得• 该方法相对于参数[1~ 24] 是连续的• 参数型 Sard_Smale 定理[25], pp. 832~ 833; [26] 给出了, 对于大部分参数值 t, 方程(2) 解的自然性和良好性条件• 即存在一个空间参数的稠密开子集, 对该子集的每一个参数 t, y 是 $H(\cdot, t)$ 的正则值•

本文将给出, 两个微分映射在一个特定开球中, 至少有一个共同值的充分条件的证明• 作者在其它论文[10~ 24] 中, 论述了在有限维和无限维合并中零点存在的充分条件• 在这里, 我们使用解析开拓法, 给出构型 R 上[25]、一个连通的并带有边界的 C^∞_ 一维 Banach 流形的存在性, 并给出了结果• 本文的关键是, 使用了连续相关定理[27, pp. 17~ 19]、Fredholm C^1 映射的性质[27]、参数型的 Sard_Smale 定理和 Banach 代数(Banach 的原理是指, 从 Banach 空间到自身的线性连续映射[28] 性质) 的一个推论•

我们简短地回顾一下要用到的定理和概念•

定理 1 (连续相关定理, 见文献[27], pp. 17~ 19) 若以下条件满足:

(ⅰ) P 是一个度量空间, 称为参数空间•

---

* 收稿日期: 2005_09_01; 修订日期: 2006_05_28
基金项目: G.G.E.S.基金资助项目(Pb 96- 1338- CO 2- 01); the Juta de Andalucia 基金资助项目
作者简介: J.M.索里阿诺, 教授, 博士(E_mail: soriano@ us.es)•
本文原文英文, 海治 译, 张禄坤 校

(ii) 对每一个 $p \in P$, 映射 T_p 满足下面假设:

1) $T_p: M \subseteq X \to M$, 即, M 是 T_p 到自身的映射·

2) M 是一个完备度量空间 (X, d) 中的一个非空闭集·

3) 对任意定值 $k \in [0, 1)$, T_p 是 k_收缩的·

(iii) 对一定值 $p_0 \in P$ 和任意值 $x \in M$, 有 $\lim_{p \to p_0} T_p(x) = T_{p_0}(x)$·

则对每一个 $p \in P$, 方程 $x_p = T_p x_p$ 正好有一个解, 其中 $x_p \in M$ 满足 $\lim_{p \to p_0} x_p = x_{p_0}$·

定义 1[27, p.53, p.173, pp.365~366] 此后本文中将假定 X 和 Y 是 $\mathbb{K}$ 上的 Banach 空间, 其中 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$·

当映射 $F: D(F) \subseteq X \to Y$, 对每个有界子集 $B \subset D(F)$, 始终是连续且像 $F(B)$ 为相对紧致的(即, 其闭包 $\overline{F(B)}$ 在 Y 中是紧致的), 则称 F 为紧映射·

每个紧子集 $K \subset Y$ 的前置像 $F^{-1}(K)$ 也是 $D(F)$ 的一个紧子集时, 称映射 F 为真映射·

若 $D(F)$ 开的, 则称 F 是一个 Fredholm 映射, 当且仅当 F 是一个 C^1_映射, 并对所有 $x \in D(F)$, 有 $F'(x): X \to Y$ 是一个 Fredholm 线性映射· 当 $L: X \to Y$ 是一个线性 Fredholm 映射, 则 L 是线性连续的, 且值 $\dim(\ker(L))$ 和 $\mathrm{codim}(R(L))$ 有限的· 因而, $\ker(L) = X_1$ 是一个 Banach 空间, 又因为 $\dim(X_1)$ 有限的, 所以 X_1 有拓扑补 X_2· 定义整数 $\mathrm{ind}(L) = \dim(\ker(L)) - \mathrm{codim}(R(L))$, 称其为 L 的指数, 其中 dim 表示维度、codim 表示余维度、ker 表示核函数、用 $R(L)$ 表示映射 L 的范围· 若对所有 $x \in D(F)$, $\mathrm{ind}F'(x)$ 为常数, 那么将该数称为 F 的指数, 并记为 $\mathrm{ind}(F)$·

令 $\mathscr{F}(X, Y)$ 为所有线性 Fredholm 映射 $A: X \to Y$ 的集合, $\mathscr{L}(X, Y)$ 为所有线性连续映射 $L: X \to Y$ 的集合, $\mathrm{Isom}(X, Y)$ 为所有同构 $L: X \to Y$ 的集合·

令 $B(x_0, \rho)$ 为以 x_0 为中心、ρ 为半径的开球, $S(x_0, \rho)$ 为以 x_0 为中心、ρ 为半径的球面·

若 $u: X \to Y$ 是一个线性连续双射算子, 则其逆线性连续算子记为 u^{-1}

定理 2[28, p.23, p.24]

a) $\mathrm{Isom}(X, Y)$ 在 $\mathscr{L}(X, Y)$ 中为开的·

b) 映射 $\beta: \mathrm{Isom}(X, Y) \to \mathscr{L}(Y, X)$, $\beta(u) := u^{-1}$ 是连续的·

定理 3[27, p.296] 令 $g: D(g) \subset X \to Y$ 是一个紧映射, 其中 $a \in D(g)$· 若导数 $g'(a)$ 存在, 则 $g'(a) \in \mathscr{L}(X, Y)$ 也是一个紧映射·

定理 4[27, p.318] 令 $S \in \mathscr{F}(X, Y)$, 当 $C \in \mathscr{L}(X, Y)$ 连续, 且 C 是一个紧映射时, 摄动映射 $S + C$ 满足 $S + C \in \mathscr{F}(X, Y)$, 且 $\mathrm{ind}(S + C) = \mathrm{ind}(S)$·

定义 2[27, p.183, p.184] 令 $F: D(F) \subseteq X \to Y$· 若 B 为 $R(F)$ 的一个集合, 则 $F^{-1}(B)$ 是集合 B 的前置像(pre_image)· F 被称为点 x 的一个浸没(submersion), 当且仅当 F 是 x 邻域上的一个 C^1_映射, 若 $F'(x): X \to Y$ 是满射, 且零空间 $\ker F'(x)$ 将 X 分解为一个拓扑直和· 点 $x \in X$ 被称作 F 的一个正则点, 当且仅当 F 在点 x 处是一个浸没· 称点 $y \in Y$ 为 F 的一个正则值, 当且仅当前置像 $F^{-1}(y)$ 为空的或只含正则点时·

定理 5(参数型 Sard_Smale 定理[25, p.832, p.833])

(i) G, P 和 Z 是为图表(chart)空间 $\mathbb{K}$ 上的非空、可度量 C^∞_Banach 流形·

(ii) C^k_映射 $H: G \times P \to Z$ $(k \geqslant 1)$ 有一正则值 z·

(iii) 对每个参数 $p \in P$, 映射 $H(\cdot, p): G \to Z$ 是一个 Fredholm 映射, 对算子方程 $H(x, p)$

$= z$ 的每一个解$(x, p) \in G \times P$ 满足 $\operatorname{ind} H_x(x, p) < k$, 其中 $H_x(x, p)$ 为点 x 处 $H(\cdot, p): G \to Z$ 的切映射.

(iv) 在 P 上满足收敛 $p_n \to p\ (n \to \infty)$, 并对所有 n 满足 $H(x_n, p_n) = z$, 表明存在一个收敛数列 $x_n \to x\ (n \to \infty, x \in G)$.

则 P 有稠密开子集 P_0, 对每个参数 $p \in P_0$, z 为 $H(\cdot, p)$ 的一个正则值.

定理 6[29, p.61] 令 A 为度量空间 E 中的一个稠密集, 令 f 为从 A 到度量空间 E' 的一个映射. 在 A 中有一个与 f 一致连续的扩展映射 $f: E \to E'$ 的充要条件是, E' 中对每个 $x \in E$, 极限 $\lim_{y \to x,\, y \in A} f(y)$ 存在. 从而, 连续映射 f 是唯一的.

2 紧形变的一个正则值

若记 $u := f - g$, 则 u 有一个零值, 当且仅当 f 和 g 有一个共同值, 即有 $x \in X$ 和 $f(x) = g(x)$. 由此我们得到 f, g 项中的结果.

定理 7 令 $f, g: U \subseteq X \to Y$ 均为 C^1_映射, 其中 U 是一个开集.

(i) g 是一个紧映射, f 是一个指数为零的真 Fredholm 映射.

(ii) 在开球 $B(x_0, \rho) := B \subset U$ 中, 映射 f 有一个零点 x^*.

(iii) 零是映射 f 和 $H: U \times I \subseteq X \times \mathbb{R} \to Y$ 的一个正则值, 其中 $H(x, t) := f(x) - tg(x)$, 且 I 是一个 $[0, 1] \subset I$ 实数开区间.

(iv) 若 $(x, t) \in S(x_0, \rho) \times [0, 1]$, 则 $f(x) \neq tg(x)$.

则以下命题为真:

(a) f 和 g 在 B 中至少有一个共同值 x^{**}.

(b) $\mathbb{R}$ 上存在一个 C^∞ 一维连通的 Banach 流形, 具有边界 $(x^*, 0), (x^{**}, 1)$.

证明

(a) $\mathscr{L}(X, Y), \mathscr{L}(Y, X)$ 由它们各自的算子范数的拓扑给出. $X \times \mathbb{R}$ 由拓扑积给出.

(a1) 我们将在这里证明存在一个紧集 $V'' \subset U$ 包含所有 $x \in X$, 当 $(x, t) \in B \times [0, 1]$ 时, 使得 $H(x, t) = 0$. 我们还将证明 $[0, 1]$ 上存在一个稠密开子集 P_0, 对每个参数 $t \in P_0$, 零是 $H(\cdot, t)$ 的一个正则值, 这里我们用到 $B \times [0, 1]$ 作为使用定理 5 中 H 的子域.

因为 B, I 和 Y 是 Banach 空间 $\mathbb{K}$ 上的非空开集, 定理 5 的假设(i) 满足. 又因 H 是一个 C^1_映射且零是 H 的一个正则值, 定理 5 的假设(ii) 得到验证.

f 是一个指数零的 Fredholm 映射, 从而

$$f'(x) \in \mathscr{F}(X, Y) \text{ 和 } \operatorname{ind}(f'(x)) = 0, \qquad \forall x \in U.$$

由于 g 是一个紧映射, 并对任意 $x \in U$, 导函数 $g'(x)$ 存在, 由定理 3 知, $g'(x) \in \mathscr{L}(X, Y)$ 也是一个紧映射, 从而, 对任意 $(x, t) \in U \times I$, $tg'(x) \in \mathscr{L}(X, Y)$ 也是一个紧映射. 定理 4 表明, 对任意 $(x, t) \in U \times I$ 有 $H_x(x, t) \in \mathscr{F}(X, Y)$ 和 $\operatorname{ind} H_x(x, t) = 0$. 因此对方程 $H(x, t) = 0$ 的每个解 $(x, t) \in U \times I$, 映射 $H(\cdot, t): U \subseteq X \to Y$ 是一个指数为零的 Fredholm 映射. 又因为 U 和 Y 是开的, 导函数 $H_x(x, t)$ 代表 $H(\cdot, t): U \to Y$ 在点 x 处的切映射, 这正是定理 5 的假设(iii) 所要求的, 这样定理 5 的假设(iii) 得到验证.

为了验证满足定理 5 的假设(iv), 让我们首先证明存在一个紧集合 V'' 含任意 $x \in U$, 当 $(x, t) \in B \times [0, 1]$ 时有 $H(x, t) = 0$.

定义集合 $V := g(D)$, 其中

$$D := \left\{ x \in B : \exists\, t \in [0,1],\ x = x(t),\ 这样 f(x) = tg(x) \right\}$$

是非空有界集合· 因为 g 是一个紧映射, D 是一个有界集, 所以 V 是一个相对紧集合·

我们构造集合 $V' = \left\{ ty : t \in [0,1],\ y \in V \right\}$· V' 是 Y 中的一个紧集, 因此可把它写成 $V' = v(V \times [0,1])$, 其中 v 为连续映射

$$v : V \times [0,1] \subset Y \times [0,1] \to Y,\ v(y,t) = ty,$$

又 $V \times [0,1]$ 为拓扑积空间 $Y \times \mathrm{R}$ 中的一个紧集·

因为 f 是一个真映射, V' 是 Y 上的一个紧集, 因而, 有 f 下 V' 的前置像 $V'' = f^{-1}(V')$ 是 X 上的一个紧集, X 包含每个 x, 使得 $H(x,t) = 0,\ (x,t) \in B \times [0,1]$·

若 $[0,1]$ 上有极限 $t_n \to t\ (n \to \infty)$, 且对所有 n, 若 $H(x_n, t_n) = 0\ (x_n \in B)$, 则任意 x_n 属于紧集 V'', 并存在一个收敛子数列

$$(x_{n'})_{n' \geq 1},\ x_{n'} \to x \ 当\ n \to \infty,\ 且\ x \in V'' \cap B,$$

据此, 及假设(iv), 可知 $x \in B$, 定理 5 的假设(iv) 也得到验证·

综上所述, 存在一个 $[0,1]$ 的稠密开子集 P_0, 对每个参数 $t \in P_0$(在集合 B 中), 零是 $H(\cdot, t)$ 的一个正则值·

(a2) 我们现在来证明, 若

$$(x,t) \in ((H^{-1}(0)) \cap (B \times P_0)),\ 则\ H_x(x,t) \in \mathrm{Isom}(X, Y)·$$

令 $(x,t) \in B \times P_0, H(x,t) = 0$· 因为零是 $H(\cdot, t)$ 的一个正则值, 因而, $H_x(x,t)$ 映射到 Y, 从而, $\mathrm{codim}(R(H_x(x,t))) = \dim Y/Y = 0$ 且 $\mathrm{ind}(H_x(x,t)) = \dim(\ker(H_x(x,t)))$· 进一步地, 由于 $\mathrm{ind}(H_x(x,t)) = 0$ 和 $\mathrm{ind}(H_x(x,t)) = \dim(\ker(H_x(x,t))) - \mathrm{codim}((R(H_x(x,t))) = 0$, 从而有

$$\dim(\ker(H_x(x,t))) = 0,$$

$H_x(x,t)$ 也是向内单射(injective)· 这样, $H_x(x,t)$ 是一个双向线性连续单射· 又因为 Y 是一个 Banach 空间, 线性逆映射 $H_x(x,t)^{-1}$ 是连续的, 即 $H_x(x,t)^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$, 这里 $H_x(x,t) \in \mathrm{Isom}(X, Y)$·

(a3) 我们现在来证明, 存在一个实数 $C > 0$, 使得

$$若\ (x,t) \in ((H^{-1}(0)) \cap (B \times P_0))\ 则\ \| H_x(x,t)^{-1} \| \leq C·$$

因为 H 是一个 C^1_映射, 映射 $H_x : U \times I \to \mathscr{L}(X, Y),\ (x,t) \mapsto H_x(x,t)$ 是连续的·

由(a2)节知, 若 $(x,t) \in ((H^{-1}(0)) \cap (B \times P_0))$, 则 $H_x(x,t) \in \mathrm{Isom}(X, Y)$·

定义集合 $A := H_x((H^{-1}(0)) \cap (B \times P_0)) \subset \mathrm{Isom}(X, Y)$·

由定理 2, 反向形成 $\beta : \mathrm{Isom}(X, Y) \to \mathscr{L}(Y, X),\ \beta(u) = u^{-1}$ 是一个连续映射, 紧接着, 约束(restriction)

$$\beta : A \to \mathscr{L}(Y, X),\ H_x(x,t) \mapsto H_x(x,t)^{-1}$$

是一个连续映射·

下面证明, β 有连续扩展映射 $\bar{\beta}$: 若 $H_x(x,t) \in A$, 则

$$\bar{\beta} : E \subset \mathscr{L}(X, Y) \to \mathscr{L}(Y, X),\ \bar{\beta}(H_x(x,t)) = \beta(H_x(x,t)), H_x(x,t) \in A,$$

其中 $$E := H_x((H^{-1}(0)) \cap (B \times [0,1])) = \left\{ H_x(x,t) : (x,t) \in ((H^{-1}(0)) \cap (B \times [0,1])) \right\}·$$

因为 $B \times P_0$ 是开的

$$((H^{-1}(0)) \cap (\overline{B \times P_0})) =$$

$$((H^{-1}(0))\cap(B\times[0,1]))\subset\overline{((H^{-1}(0))\cap(B\times P_0))},$$

从而

$$H_x((H^{-1}(0))\cap(B\times[0,1]))=E\subset H_x(\overline{(H^{-1}(0))\cap(B\times P_0)})\cdot$$

因为 H_x 连续的

$$H_x(\overline{(H^{-1}(0))\cap(B\times P_0)})\subset\overline{H_x((H^{-1}(0))\cap(B\times P_0))}=A,$$

所以 $E\subset A$• 因此, A 为度量空间 $E\subset\mathscr{L}(X,Y)$ 中的稠密集• 现在要用到定理6, 对任意 $\delta>0$, 若任意序列 $(H_x(x_n,t_n))_{n\geqslant1}\subset A$ 收敛于任意点 $H_x(v,w)\in E$, 经验证, 存在 $N\in\mathrm{N}$, 使得

$$\forall n,m\geqslant N\Rightarrow\|H_x(x_n,t_n)-H_x(x_m,t_m)\|<\delta\cdot$$

又因为 β 是一个连续映射, 则

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0:\ \|H_x(x_n,t_n)-H_x(x_m,t_m)\|<\delta\Rightarrow$$
$$\|\beta(H_x(x_n,t_n))-\beta(H_x(x_m,t_m))\|<\epsilon\cdot$$

因此 $(\beta(H_x(x_n,t_n)))_{n\geqslant1}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{L}(Y,X)$ 的一个 Cauchy 数列, 存在一个连续映射 $G\in\mathscr{L}(Y,X)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\beta(H_x(x_n,t_n))=G,$$

从而可得

$$\lim_{H_x(x,t)\to H_x(v,w),\,H_x(x,t)\in A}\beta(H_x(x,t))=G\cdot$$

根据定理 6, 连续扩展映射 $\beta: E\to\mathscr{L}(Y,X)$ 存在•

因为

$$\|\cdot\|\cdot\beta\cdot H_x:((H^{-1}(0))\cap((V''\cap B)\times[0,1]))\subset E\to\mathrm{R}$$

为紧集 $((H^{-1}(0))\cap((V''\cap B)\times[0,1]))$ 上的一个连续映射, 由 Weierstrass 定理, $\|\cdot\|\cdot\beta\cdot H_x$ 有一个最大值• 总结为, 若 $(x,t)\in((H^{-1}(0))\cap((V''\cap B)\times P_0))$, 则存在一个实数 $C>0$, 使得 $\|H_x(x,t)^{-1}\|\leqslant C$•

明显地, 若 $(x,t)\in((H^{-1}(0))\cap(B\times P_0))$, 则 $x\in V''$, 正如(a1) 节中所见到的, 从而我们能写成 $\|H_x(x,t)^{-1}\|\leqslant C$•

(a4) 假设 $(x_a,t_a)\in((H^{-1}(0))\cap(B\times P_0))$, 因而

从(a1) 节知道, $x_a\in V''$•

从(a2) 节知道, $H_x(x_a,t_a)\in\mathrm{Isom}(X,Y)$•

下面证明 $r_0>0$, $r>0$ 及关键连续映射的存在性

$$x(\cdot):[t_a-r_0,t_a+r_0]\cap[0,1]\to X,$$

该映射满足: $\|x(t)\|<r$, $H(x_a+x(t),t)=0$, $\forall t\in[t_a-r_0,t_a+r_0]\cap[0,1]$•

为此, 定义 $\phi(x,t):=H(x_a+x,t)$, $\forall x\in X$, 并对 x 求解下列方程

$$\phi(x,t)=0, \tag{3}$$

明显有 $\phi(0,t_a)=H(x_a,t_a)=0$, 对 $\phi_x(0,t_a)$, 需验证 $\phi_x(0,t_a)=H_x(x_a,t_a)$•

将方程(3) 变换为下列等价方程

$$H_x(x_a,t_a)^{-1}[H_x(x_a,t_a)(x)-\phi(x,t)]=x\cdot \tag{4}$$

根据方程(4) 定义以下两个映射

$$h(x,t):=H_x(x_a,t_a)(x)-\phi(x,t),\quad T_t(x):=H_x(x_a,t_a)^{-1}(h(x,t)),$$

其中 h 是一个 C^1_映射, 且

$$h(0, t_a) = 0. \tag{5}$$

方程(4)和以下"关键方程"等价

$$T_t(x) = x. \tag{6}$$

注意, T_t 中的下标 t 是一个指数而不是传统意义上的偏导数. 方程(3)可被改写为不动点方程(6), 这正是下面要研究的.

令 $x, x' \in B$; $t \in [0, 1]$, 从而 $|t - t_a|$, $\|x\|$, $\|x'\| < r$, $|t - t_a| < r_0$, 其中 r, r_0 将在后面取定.

因 $h_x(x, t) = H_x(x_a, t_a) - \psi_x(x, t)$, 所以

$$h_x(0, t_a) = 0. \tag{7}$$

从方程(7)及 $h_x: X \times [0, 1] \to \mathscr{L}(X, Y)$, 其中 $(x, t) \mapsto h_x(x, t)$ 是连续的, 根据 Taylor 定理可得

$$\begin{aligned} &\|h(x, t) - h(x', t)\| \leqslant \\ &\quad \sup\left\{\|h_x((x' + \theta(x - x'), t)\|: \theta \in [0, 1]\right\} \cdot \|x - x'\| = \\ &\quad o(1)\|x - x'\|, \qquad o(1) \to 0 \text{ 当 } r \to 0. \end{aligned} \tag{8}$$

现取 r 为定值, 使 $o(1) \leqslant 1/(2C)$, 构造非空闭集 $M := \left\{x \in X: \|x\| \leqslant r\right\}$.

从方程(5)和方程(8), 又因为 h 是一个连续映射, 得到

$$\begin{aligned} &\|h(x, t)\| \leqslant \|h(x, t) - h(0, t)\| + \|h(0, t)\| = \\ &\quad \frac{1}{2C}\|x\| + o'(1), \qquad x \in M, \ o'(1) \to 0 \text{ 当 } r_0' \to 0. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\|T_t(x)\| \leqslant \|H_x(x_a, t_a)^{-1}\| \, \|h(x, t)\| \leqslant \\ &\quad \|H_x(x_a, t_a)^{-1}\|\left(\frac{1}{2C}\|x\| + o'(1)\right), \\ &\qquad\qquad x \in M, \ o'(1) \to 0 \text{ 当 } r_0' \to 0. \end{aligned} \tag{9}$$

现取 r_0' 为定值, 使 $o'(1) \leqslant r/(2C)$, 构造集合

$$M' := \left\{t \in [0, 1]: |t - t_a| \leqslant \min\left\{r, r_0'\right\} = r_0\right\}.$$

由刚才定义的空间和映射, 我们来证明定理 1 的假设.

度量空间 $(M', |\cdot|)$ 为定理 1 假设(i)的参数空间, 下面验证 M 为非空闭集, X 为假设(ii)的完备度量空间.

从方程(9)知, 对任意定值 $t \in M'$, $\forall x \in M$

$$\|T_t(x)\| \leqslant \|H_x(x_a, t_a)^{-1}\|\left(\frac{1}{2C}\|x\| + o'(1)\right) \leqslant C\left(\frac{1}{2C}r + \frac{1}{2C}r\right) \leqslant r,$$

得到 $T_t(x) \in M$, $T_t: M \to M$. 即 T_t 将 Banach 空间 X 的非空闭集 M 映射到自身.

从方程(8)知, 对任意 $x_2, x_2' \in M$ 和任意 $t \in M'$

$$\begin{aligned} &\|T_t(x) - T_t(x')\| \leqslant \|H_x(x_a, t_a)^{-1}(h(x, t) - h(x', t))\| \leqslant \\ &\quad \|H_x(x_a, t_a)^{-1}\| \frac{1}{2C}\|x - x'\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\|, \end{aligned}$$

从而, 对任意定值 $t \in M'$, T_t 是半收缩的. 定理 1 的假设(ii)验证.

因对任意定值 $t_0 \in M'$ 和所有 $x \in M$,

$$\lim_{t\to t_0,\, t\in M'} T_t(x) = \lim_{t\to t_0,\, t\in M'} H_x(x_a, t_a)^{-1}(H_x(x_a, t_a)(x) - \psi(x, t)) =$$
$$H_x(x_a, t_a)^{-1}(H_x(x_a, t_a)(x) - \psi(x, t_0)) = T_{t_0}(x),$$

因此定理 1 的假设(iii) 也得到验证•

定理 1 表明, 对任意 $t \in M'$, T_t 有唯一不动点 $T_t(x) = x := x(t)$, 满足 $\lim_{t\to t_0,\, t_0\in M'} x(t) = x(t_0)$, 即 $x(\cdot)$ 是一个连续映射• 从而对每个 $t \in M'$, 只存在唯一的 $x(t) \in M$, 满足 $\psi(x(t), t) = 0$ 和 $H(x_a + x(t), t) = 0$, 并且

$$\lim_{t\to t_0,\, t,\, t_0\in M} H(x_a + x(t), t) = H(x_a + x(t_0), t_0) = 0•$$

(a5) 现在我们来证明 f 和 g 在开球 B 中至少有一共同值• 利用对(a4) 节进行有限次迭代, 为此, 需证明对每次迭代, 可选择相同的 r_0•

定义 $\varphi: V'' \times [0, 1] \times V'' \times [0, 1] \subset X \times [0, 1] \times X \times [0, 1] \to Y$,

$$\varphi(x_a, t_a; x, t) := H_x(x_a, t_a)(x) - H(x_a + x, t),$$

因 H 为 C^1_映射, φ 为拓扑积空间 $X \times [0, 1] \times X \times [0, 1]$ 的紧集 $V'' \times [0, 1] \times V'' \times [0, 1]$ 上的一个连续映射的合成• 从而, 对任意 $r > 0$, 存在 $\delta(r/(2C)) > 0$, 若

$$(x_a, t_a; x, t), (x_a', t_a'; x', t') \in$$
$$V'' \times [0, 1] \times V'' \times [0, 1],\ \|(x_a, t_a; x, t), (x_a', t_a'; x', t')\| < \delta\left(\frac{r}{2C}\right),$$

则 $\|\varphi(x_a, t_a; x, t) - \varphi(x_a', t_a'; x', t')\| \leqslant (r/(2C))$•

若将映射 φ 的定义域限制为 $(x_a, t_a) \in V'' \times P_0$, 这样 $H(x_a, t_a) = 0$, $x_a \in B$, 则得到曾在(a4) 节中讨论的映射 h, 即

$$h: ((H^{-1}(0)) \cap (V'' \times [0, 1])) \to Y,$$
$$h(x, t) = \varphi(x_a, t_a; x, t) = H_x(x_a, t_a)(x) - H(x_a + x, t)•$$

现将(a4) 节中的 r_0' 取为定值 $r_0' = \delta(r/(2C))$, r 则留在后面讨论•

另一方面, 映射 φ_x

$$\varphi_x: V'' \times [0, 1] \times V'' \times [0, 1] \to \mathscr{L}(X, Y),$$
$$\varphi_x(x_a, t_a; x, t) = H_x(x_a, t_a) - H_x(x_a + x, t)$$

是紧集 $V'' \times [0, 1] \times V'' \times [0, 1]$ 上一致连续的, 因而存在 $\delta(1/(2C)) > 0$, 使

$$\forall (x_a, t_a; x, t), (x_a', t_a'; x', t') \in V'' \times [0, 1] \times V'' \times [0, 1],$$
$$\|(x_a, t_a; x, t) - (x_a', t_a'; x', t')\| < \delta\left(\frac{1}{2C}\right) \Rightarrow$$
$$\|\varphi_x(x_a, t_a; x, t) - \varphi_x(x_a', t_a'; x', t')\| < \frac{1}{2C}•$$

可知, 映射 φ_x 就是(a4) 节中的映射 h_x, 当 $(x_a, t_a) \in ((H^{-1}(0) \cap (B \times P_0)$ 为定值: $h_x: V'' \times [0, 1] \to \mathscr{L}(X, Y)$,

$$h_x(x, t) = \varphi_x(x_a, t_a; x, t) = H_x(x_a, t_a) - H_x(x_a + x, t)•$$

取前面提到的 $r = \delta(1/(2C))$• 这样 r 和 r_0' 都已是定值, 通过(a4) 节中同样的方法, 取 $r_0 = \min\left\{r, r_0'\right\}$•

(a4) 节表明, 若 $H(x_a, t_a) = 0$, $(x_a, t_a) \in B \times P_0$, 则存在一个连续映射 $x(\cdot): [t_a - r_0, t_a + r_0] \cap [0, 1] \to X$ 满足

$$H(x_a + x(t), t) = 0,\ \forall t \in [t_a - r_0, t_a + r_0] \cap [0, 1]•$$

因为 $P_0 = [0, 1]$, 正如(a4) 节所做的, 将(x_a, t_a) 作为前一次的初始点, 将

$$(x_a + x(t_a + r_0), t_a + r_0), t_a + r_0 \in P_0,$$

作为后续的初始点, 重复(a4) 节的过程• 因为零是f 的一个正则值, 因此, $0 \in P_0$, 把第一次迭代的初始点取为$(x^*, 0) \in B \times [0, 1]$•

由于[0, 1]为紧集, 根据定理的假设(iv)的边界条件, 通过有限次迭代可得点 $(x^{**}, 1) \in B \times [0, 1]$, 并满足 $H(x^{**}, 1) = 0$•

(a6) 在前面的数节中, 我们隐含了构造一个在 R 上有边界$(x^*, 0)$, $(x^{**}, 1)$ 的 C^∞ 一维 Banach 流形, 这里给出 Banach 流形的图(atlas)集•

考虑前面提到的集合 M', 相对其在$[0, 1]$ 中的内部区域记为 U_a, 其中 $a \in \alpha$, α 是一个有限指数集• 再考虑集合 $x_a + M$, 其内部区域记为 V_a•

令拓扑积空间为

$$W := \left\{x \in X: \exists\, t \in U_a, a \in \alpha, \text{这样} H(x, t) \in 0, x \in V_a\right\} \times [0, 1]•$$

W 中的一个图为$(V_a \times U_a, \phi_a)$, $a \in \alpha$ 对, 其中 $V_a \times U_a$ 为W 中的开集, ϕ_a 为进入到半空间 $H\mathrm{R} = \left\{t \in \mathrm{R}, t \geqslant 0\right\}$ 的拓扑同胚 $\phi_a(x(t), t) = t$• 该图有下列性质

(i) 簇 $(V_a \times U_a)_{a \in \alpha}$ 覆盖 W•

(ii) 任意两个图 $(V_a \times U_a, \phi_a)$, $(V_b \times U_b, \phi_b)$ (其中 $a, b \in \alpha$) 是 C^∞_相容的, 因为若$(V_a \times U_a) \cap (V_b \times U_b) = \varphi$ 或若

$$\phi_b: \phi_\alpha^{-1}: \phi_a((V_a \times U_a) \cap (V_b \times U_b)) \to \phi_b((V_a \times U_a) \cap (V_b \times U_b)),$$

$$t \mapsto t + t_b - t_a = u,$$

$$\phi_a • \phi_b^{-1}: \phi_b((V_a \times U_a) \cap (V_b \times U_b)) \to \phi_a((V_a \times U_a) \cap (V_b \times U_b)),$$

$$u \mapsto u + t_a - t_b = t$$

都为 C^∞•

(iii) 所有图空间与 Banach 空间 R 的半空间 $H\mathrm{R}$ 等价•

因此 $(V_a \times U_a)_{a \in \alpha}$ 为构造在R 上有边界的 C^∞ 一维 Banach 流形• 进一步地, 根据映射 $x(•)$ 的连续性, 方程(3) 和方程(8) 的等价性及后继初始点的选择, 可以推导出 W 是一个连通集•

[参 考 文 献]

[1] Allgower E L. A Survey of Homotopy Methods for Smooth Mappings [M]. Allgower, Glashoff, Peitgen Eds, Berlin: Springer_Verlag, 1981, 2—29.

[2] Allgower E, Glashoff K, Peitgen H. Proceedings of the Conference on Numerical Solution of Nonlinear Equations [C]. Bremen, July 1980. Lecture Notes in Math [M]. 878. Berlin: Springer_Verlag, 1981.

[3] Allgower E L, Georg K. Numerical Continuation Methods [M]. Springer Series in Computational Mathematics 13, New York: Springer_Verlag, 1990.

[4] Alexander J C, York J A. Homotopy continuation method: numerically implementable topological procedures[J]. Trans Amer Math Soc, 1978, **242**: 271—284.

[5] Bernstein S, Sur la g n ralisation du probl me de Dirichlet I[J]. Math Anal, 1906, **62**: 253—278.

[6] Bernstein S. Sur la g n ralisation du probl me de Dirichlet Ⅱ[J]. Math Anal, 1910, **69**: 82—136.

[7] Garcia C B, Li T Y. On the Number of solutions to polynomial systems of non_linear equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1980, **17**: 540—546.

[8] Garcia C B, Zangwill W I. Determining all solutions to certain systems of non_linear equations[J].

Math Oper Res, 1979, **4**: 1—14.

[9] Leray L, Shauder J. Topologie et equations fonctionalles[J]. Ann Sci Ecole Norm Sup, 1934, **51**: 45—78.

[10] Soriano J M. Existence of zeros for bounded perturbations of proper mappings[J]. Appl Math Comput, 1999, **99**: 255—259.

[11] Soriano J M. Global minimum point of a convex function[J]. Appl Math Comput, 1993, **55**(2/3): 213—218.

[12] Soriano J M. Extremum points of a convex function[J]. Appl Math Comput, 1994, **80**: 1—6.

[13] Soriano J M. On the existence of zero points[J]. Appl Math Comput, 1996, **79**: 99—104.

[14] Soriano J M. On the number of zeros of a mapping[J]. Appl Math Comput, 1997, **88**: 287—291.

[15] Soriano J M. On the Bezout theorem real case[J]. Comm Appl Nonlinear Anal, 1995, **2**(4): 59—66.

[16] Soriano J M. On the Bezout theorem[J]. Comm Appl Ninlinear Anal, 1997, **4**(2): 59—66.

[17] Soriano J M. Mappings sharing a value on finite_dimensional spaces[J]. Appl Math Comput, 2000, **121**(2/3): 391—395.

[18] Soriano J M. Compact mappings and proper mappings between Banach spaces that share a value[J]. Math Balkanica, 2000, **14**(1/2): 161—166.

[19] Soriano J M. Zeros of compact perturbations of proper mappings[J]. Comm Appl Nonlinear Anal, 2000, **7**(4): 31—37.

[20] Soriano J M. A compactness condition[J]. Appl Math Comput, 2001, **124**(3): 397—402.

[21] Soriano J M. Open trajectories[J]. Appl Math Comput, 2001, **124**(2): 235—240.

[22] Soriano J M. On the existence of zero points of a continuous function[J]. Acta Math Sci, 2002, **22**(2): 171—177.

[23] 索里阿诺 J M. 具公共值 Fredholm 紧映射[J]. 应用数学和力学, , 2001, **22**(6): 609—612.

[24] Soriano J M, Angelov V G. A zero of a proper mapping[J]. Fixed Point Theory, 2003, **4**(1): 97—104.

[25] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications Ⅳ[M]. New York: Springer_Verlag, 1995.

[26] Smale S. An infinite_dimensional version of Sard' s theorem[J]. Amer J Math, 1965, **87**: 861—866.

[27] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications Ⅰ[M]. New York: Springer_Verlag, 1985.

[28] Cartan H. Differential Calculus[M]. Barcelona: Omega, 1978.

[29] Dieudonn J. Fundamentals of Modern Analysis[M]. Barcelona: Revert , 1966.

A Regular Value of a Compact Deformation

J. M. Soriano

(Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas,
Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, Sevilla 41080, Spain)

Abstract: Sufficient conditions were given to assert that between any two Banach spaces over K, Fredholm mappings share at least one value in a specific open ball. The proof of the result is constructive and is based upon continuation methods.

Key words: regualr value; continuation methods; continuous dependence theorem; C^1_ homotopy; proper mapping; compact mapping; fredholm mapping; topological complement; Sard_ Smale theorem