应用数学和力学, 第 27 卷 第 9 期
2006 年 9 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 27, No. 9, Sep. 15, 2006

文章编号: 1000_0887(2006) 09_1101_07

Navier_Stokes 方程与 Euler 方程的稳定性比较*

施惟慧[1], 王曰朋[2,3], 沈 春[4]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;
2. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
3. 南京信息工程大学 数学系, 南京 210044;
4. 烟台师范学院 数学与信息学院, 山东烟台 264025)

(郭兴明推荐)

摘要: 比较了 Navier_Stokes 方程和 Euler 方程的稳定性; 并以它们的典型初值问题为例, 分析了 Navier_Stokes 方程和 Euler 方程稳定性不同的原因•

关 键 词: Navier_Stokes 方程; Euler 方程; 稳定方程; 奇异方程

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

流体力学中的 Navier_Stokes 方程和 Euler 方程分别用来描述粘性、不可压流体和无粘、不可压流体的运动状态• 从流体力学的观点来看, 这两类方程描写的运动流体都是不可压的, 其表现形式上的不同在于流体的粘性系数 ν 是否为零[1]• 但从数学角度来看, 它们之间却不仅是一个系数是否为零的差别: 既然它们都是偏微分方程, 因此首先必须回答的问题是: 这两个方程组的 $C^k(k \geqslant k_0$, k_0 是所论方程组的阶数) 稳定性是否相同? 之后, 还须讨论它们类似的典型定解问题的 C^k 适定性条件是否也相似等等问题• 上面提到的所谓 C^k 稳定方程, 就是至少有一个 C^k 定解问题是适定的方程[2]• 作为讨论的基础, 先叙述分层理论中的一个基本定理•

设 V, Z 是 C^∞ 微分流形, $\dim V = n \geqslant 2$, $\dim Z = m$, $D \subseteq J^{k_0}(V, Z)$ 是一个偏微分方程组, 并假设方程的参数函数均为无穷可微函数•

定理 D 是 C^∞ 稳定方程的充要条件是, 纤维空间

$$\rho:\quad E_{n-1,\,k_0-1}(D) \to W_{n-1,\,k_0-1}(V, Z)$$

的分层结果中, 它的 $(n-1,\ k_0-1)$ 阶横截层 $S^t_{3,\,k_0-1}(D)$ 不是空集

$$S^t_{n-1,\,k_0-1}(D) \neq \varnothing$$

* 收稿日期: 2005_10_21; 修订日期: 2006_05_27
基金项目: 国家自然科学基金“十五”(重大) 研究计划资助项目(90411006)
作者简介: 施惟慧(19—), 女, 北京人, 教授, 博士, 博士生导师;
王曰朋(1970—), 男, 山东惠民人, 博士(E_mail: eduwyp@163.com)•

(关于 $E_{l,k}(D)\subset E_{l,k}(V,Z)\subset G_l^*(TJ^k(V,Z))\times_{J^k(V,Z)}J^{k+1}(V,Z)$

和 $W_{l,k}(V,Z)=p_1(E_{l,k}(V,Z))\subseteq G_{l,k}^*(TJ^k(V,Z))$

的定义、性质以及定理的证明请参看文献[2]和文献[3])•

是否真的存在 C^k 不稳定方程呢?(即某个偏微分方程(组)不存在任何 C^k 适定的定解问题)如果回答是肯定的,那么我们就有理由说这个方程"不正常",或说这是一个奇异方程• 现给出奇异方程的定义如下

定义 设 D 是一个 k_0 阶偏微分方程组,并假设出现在方程组中的所有参数函数都属于 $C^k(k\geqslant k_0)$• 如果 D 所有的 $C^k(k\geqslant k_0)$ 定解问题都是不适定的,则称其为 C^k 奇异方程• C^k 奇异方程也称为 C^k 不稳定方程•

著名的 Navier_Stokes 方程是 $C^k(k\geqslant 2)$ 奇异方程中的一个典型[2,3]• 就是说,在 $C^k(k\geqslant 2)$ 函数类中,Navier_Stokes 方程所有的初、边值问题以及混合问题都是不适定的,而且这种不稳定性影响深远• 这确实令人沮丧! 但是,Euler 方程与 Navier_Stokes 方程则完全不同• 它是一个很好的稳定方程,在方程中的参数函数和初始(或边界)条件为解析的假设下,只要它们能满足一组并不苛刻的附加条件——适定的充要条件,则问题适定,如有必要还可以计算出此问题稳定的解析解•

这两组表面上只因一个参数是否为0而有差别的方程,其稳定性却截然不同,究竟是什么原因造成的呢? 本文将回答这个问题,并将以典型定解问题为例说明• 以下所指方程的稳定性和定解问题的适定性都界定在 $C^k(k\geqslant k_0$, k_0 是所论方程的阶数)意义下•

1 已有的关于 Navier_Stokes 方程及 Euler 方程的主要结论

(本节使用的符号及有关定理证明请参看文献[2]至文献[4])

关于 Navier_Stokes 方程

Navier_Stokes 方程原型如下[1]

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F},$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,$$

未知函数是 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 和 p,即 $(u_1,u_2,u_3,p)\in Z=R^3\times R_+$, $(x,y,z,t)\in V=R^4$(或是被某个充分光滑的曲面包含的区域 $\Omega\subseteq R^4$), $(\rho,\nu)\in R_+^*\times R_+^*$ 是常数, $\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,F_3)$ 是时、空坐标的函数,并假设 $F_i\in C^k(k\geqslant 2)$• 将这个方程简记为 $D_{\mathrm{N\_S}}$•

注 考虑或不考虑能量守恒方程并不影响这个方程的不稳定性[2,3]• 另外,粘性系数 ν 和 $\boldsymbol{F}$ 还可假设为依赖于时、空坐标和未知函数,此时也不改变这个方程的不稳定性结论•

设 $\Sigma\subseteq V$ 是 V 的任何一个充分光滑的超曲面•

则有以下结论(定理和若干推论)[2,3]

1) $D_{\mathrm{N\_S}}$ 在 Σ 上的任何 $C^k(k\geqslant 2)$ 初、边值问题都是不适定的•

2) 考虑 $D_{\mathrm{N\_S}}$ 在超平面 $\{t=t_0\}\subseteq V$ 上的初值问题 C_t

$$u_i\mid_{t=t_0}=u_i^{(0)}(x,y,z),\qquad u_i^{(0)}\in C^k(k\geqslant 2),\qquad i=1,2,3,4•$$

C_t 存在 C^2 解(形式解)的一组必要条件是

$$\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial y}+\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial z}=0,$$

$$(\tilde{\varphi}_{4,0}^{(4)})^2+\sum_{i=1}^{4}(\varphi_{i,0}^{(4)})^2=0,$$

其中 $(\tilde{\varphi}_{4,0}^{(4)})^2$、$(\varphi_{i,0}^{(4)})^2$ 的表达式请见文献[2]•

3) 其它相关结论见文献[2]•

4) 以下给出 D_{N_S} 同一定解问题具有不唯一解的例子, 这是定解问题不适定的可能之一•

例 1 设 $\boldsymbol{F}=(t^2,0,xy)$• 可直接验证以下两组解析函数都是 D_{N_S} 的解, 它们之差不恒为 0, 并且在超平面 $\{t=0\}\subset V$ 上满足同样的定解条件

$$\boldsymbol{U}_{N\_S}^{(1)}:\begin{cases}u_1^{(1)}=\dfrac{1}{3}t^3,\\ u_2^{(1)}=0,\\ u_3^{(1)}=xyt-\dfrac{1}{15}yt^5,\\ p^{(1)}=p_0+p_1t+\dfrac{p_2}{2}t^2+\dfrac{p_3}{6}t^3,\end{cases}$$

$$\boldsymbol{U}_{N\_S}^{(2)}:\begin{cases}u_1^{(2)}=\dfrac{1}{3}t^3,\\ u_2^{(2)}=\dfrac{\nu^2}{6\rho}t^3,\\ u_3^{(2)}=xyt-\dfrac{\nu^2}{6\rho}t^3+\dfrac{t^5}{120}\left(\dfrac{4\nu^2}{\rho}x-8y\right)-\dfrac{\nu^2}{405\rho}t^9,\\ p^{(2)}=p_0+p_1t+\dfrac{\nu^2}{2}(y+z)t^2,\end{cases}$$

其中 p_0、p_1、p_2、p_3 是任意实常数•

从例 1 可观察到以下事实

1) 第一组解 $\boldsymbol{U}_{N\_S}^{(1)}$ 与方程中的两个参数(即粘性系数 ν 和密度 ρ) 无关, 但是, 它依赖于另外与方程无关的 4 个新参数(任意实常数) $p_i\ (i=0,1,2,3)$•

2) 第二组解 $\boldsymbol{U}_{N\_S}^{(2)}$ 不但与方程中的参数 (ν,ρ) 有关, 还依赖另外两个新参数(任意实常数) (p_0,p_1)•

事实上, 我们可以根据 Navier_Stokes 方程的拓扑构造和要求构造出同一不适定的定解问题的任意多组解(当然只是形式解)•

关于 Euler 方程

Euler 方程原型如下[1]

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{F},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,$$

其中未知函数是 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 和 p, 设 $(u_1,u_2,u_3,p)\in Z=R^3\times R_+$, 自变量 $(x,y,z,t)\in V=R^4$, 外力 $\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,F_3)$, $\rho>0$ 是常数, 并设 $F_i(x,y,z,t)\in C^\infty$, $i=1,2,3$• 将它简记为 D_E• 则有以下主要结论(定理及推论)[2,3]

1) D_E 是 C^∞ 稳定方程•

2) 考虑 D_E 在超平面 $\{t=t_0\}\subset V$ 上的初值问题 C_t

$$u_i\,|_{t=t_0}=u_i^{(0)}(x,y,z)\in C^k\qquad(k\geqslant 1),$$

则此初值问题不适定•

此外,这个初值问题存在 C^1 解(形式解)的一组必要条件是

$$\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial y}+\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial z}=0•$$

事实上, D_E 在 C^∞ 超曲面 $\Sigma:\{t=f(x,y,z)\}\subset V$ 上的初值问题

$$u_i\mid_\Sigma=u_i^{(0)}(x,y,z)\in C^\infty,$$

其适定的充分必要条件是初始曲面及初始函数必须满足下面的两个不等式

$$1-u_1\alpha_1-u_2\alpha_2-u_3\alpha_3\neq 0,$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\neq 0,$$

式中 $\left(\alpha_1=\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \alpha_2=\dfrac{\partial f}{\partial y},\ \alpha_3=\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ [2]•

3) D_E 在超平面 $\{t=0\}\subset V=R^4$ 上的初值问题不适定的例子•

例2 可直接验证以下两组函数都是 D_E 的解,它们在 $\{t=0\}$ 上满足同样的初始条件,并且它们之差不恒等于 0

$$U_E^{(1)}:\begin{cases}u_1^{(1)}=\dfrac{1}{3}t^3,\\ u_2^{(1)}=0,\\ u_3^{(1)}=xyt-\dfrac{1}{15}yt^5,\\ p^{(1)}=q_0+q_1t+\dfrac{q_2}{2}t^2+\dfrac{q_3}{6}t^3,\end{cases}$$

$$U_E^{(2)}:\begin{cases}u_1^{(2)}=\dfrac{1}{3}t^3,\\ u_2^{(2)}=-\dfrac{q}{6\rho}t^3,\\ u_3^{(2)}=xyt-\dfrac{q}{6\rho}t^3+\dfrac{t^5}{30}\left(\dfrac{q}{\rho}x-2y\right)-\dfrac{q}{405\rho}t^9,\\ p^{(2)}=q_0+q_1t+\dfrac{q}{2}(y+z)t^2,\end{cases}$$

$q_i,\ q\in R$ 是任意常数$(i=0,1,2,3)$•

比较例 1 和例 2 很容易看出,如果在相应的两组解中,下标相同的参数取相同的值,且 $q=\nu^2$, 那么它们就是相同的两组函数•

4) 其它结论见文献[2]•

2 Navier_Stokes 方程与 Euler 方程的稳定性比较

第 1 节中叙述的关于 Navier_Stokes 方程与 Euler 方程的一些基本结论,已经指出了它们的根本区别:在 C^k 函数类中,一个是不稳定方程而另一个则是稳定方程• 相关定理的证明是通过讨论所谓的"横截层" $S_{l,k}^t(D)$ 是否为空集来完成的•

** 对于 Navier_Stokes 方程 D_{N_S}, 它的横截层是空集 $S_{l,k}^t(D_{N\_S})=\varnothing(k\geqslant 2)$, 而对于 Euler 方程,则有 $S_{l,k}^t(D_E)\neq\varnothing(k\geqslant 1)$• 这就是 Navier_Stokes 方程与 Euler 方程的拓扑性质的根本区别•

(横截层的概念是分层理论的基本概念之一, 这一拓扑特性决定了所论方程的稳定性• 关于它的严格定义及其拓扑性质请参看文献[2]至文献[4])•

下面分析这两个方程在超平面 $\Sigma_0:\{t=0\}\subset R^4=V$ 上的初值问题不适定性的区别•

(i) 不适定性是否有希望好转?

® 对于 Navier_Stokes 方程• 由于它不存在任何适定的定解问题, 因此无论怎样挑选超曲面 $\Sigma:\{t=f(x,y,z)\}\subset V$ 及未知函数在此超曲面上的初始值, 都无法使这类定解问题适定•

® 对于 Euler 方程• 根据这一类初值问题适定的充要条件

$$1-u_1^{(0)}\alpha_1-u_2^{(0)}\alpha_2-u_3^{(0)}\alpha_3\neq 0,$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\neq 0,$$

其中 $\alpha_1=\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \alpha_2=\dfrac{\partial f}{\partial y},\ \alpha_3=\dfrac{\partial f}{\partial z}$•

可知, 我们完全有可能对这一类问题所给的定解条件进行“修正”, 从而改变原有问题的不适定性• 比如以下修正就是可能方向之一•

设在超平面 $\Sigma_\varepsilon:\{t=\varepsilon\}\subset V(\varepsilon\in R^*)$ 上给出以下初始值

$$u_i\mid_{\Sigma_\varepsilon}=u_i^\varepsilon=0\qquad(i=1,2,3)•$$

则此定解问题是适定的(由于未知函数 p 的初始值与适定性条件无关, 因此可任意设置, 比如假设它是符合某个问题需要的解析函数)• 此外, 如果有需要, 我们还可以计算出这个问题稳定的解析解•

(ii) 例 1 与例 2 在适定性问题中表现出的不同性质

® 由于 Navier_Stokes 方程是不稳定方程, 因此不存在超曲面 Σ, 使得例 1 中的函数组在 Σ 上的限制与此超曲面一起, 构成一个适定的定解问题•

® Euler 方程的稳定性及定解问题的适定性条件, 提供了寻找合适的超曲面 Σ, 并使例 2 中的函数组在 Σ 上的限制与此超曲面一起, 构成一个适定的定解问题的可能与方法• 比如设

$$\Sigma:\{t=y\}\subset R^4,$$

$$u_1\mid_\Sigma=\frac{1}{3}y^3,\ u_2\mid_\Sigma=0,\ u_3\mid_\Sigma=xy^2-\frac{1}{15}y^6,\ p\mid_\Sigma=p_0•$$

则上述定解问题是适定的• 同时, 这组定解问题唯一、稳定的解析解就是 $U_{\mathrm{E}}^{(1)}$(即取 $q_i=0,\ i=1,2,3$ 时的解)•

对于 $U_{\mathrm{E}}^{(2)}$ 也可以重复上面的做法以达到同样的目的• 比如考虑一个简单情形: 在 $U_{\mathrm{E}}^{(2)}$ 中, 设 $q=0$, 并且将这时的 $U_{\mathrm{E}}^{(2)}$ 在超平面 $\Sigma:\{t=y\}\subset R^4$ 上的限制作为未知函数的初始值, 根据这一类初值问题适定的充要条件可知此问题适定• 当然, 这个定解问题唯一、稳定的解析解就是原来当 $q=0$ 时的 $U_{\mathrm{E}}^{(2)}$• 但是显然 $U_{\mathrm{E}}^{(1)}\neq U_{\mathrm{E}}^{(2)}$• 这个事实也说明: 一般情况下, 偏微分方程某个定解问题适定与否, 只规定函数类是不够的• 对于初始曲面和在其上初始值的设定, 在绝大多数情形下都必须满足另外的附加条件 ——即适定的充分必要条件• 到目前为止, 作者知道只有所谓的“Laplace 类型”的方程没有这类附加条件, 而原因就在于它的横截层“充满”了整个空间, 即

$$S_{l,k}^t(\mathrm{D})=W_{l,k}(V,Z)•$$

(这些问题的深入讨论请参看文献[2]至文献[4])•

(iii) 为什么 Euler 方程不能简单的看作是粘性系数 $\nu=0$ 或 $\nu\to 0$ 时的 Navier_Stokes 方

程?

事实上, 上述的分析已经说明了这个原因• 在偏微分方程的定性研究中, 不能期望在稳定方程和不稳定方程之间建立一种关系, 或说"谁是谁的极限情形", 由此期望从一个研究另一个• 事实上, 造成Navier_Stokes 方程不稳定其力学理论上的原因是流体的粘性与不可压假设的"匹配"• 而 Euler 方程的典型初值问题不适定的原因则是流体的不可压假设• 文献[5]已证明: 无粘、可压流体的 Euler 方程(等熵或绝热) 不但是 C^{∞} 稳定方程, 而且它的典型初值问题(即在超平面$\{t = 0\} \subset R^4$ 上的初值问题) 也是适定的•

至于上面谈到的对不适定问题的"修正", 当然只是一种数学处理手段• 如果实际问题不允许这样做, 那么剩下的就只有一条路可走: 修正连续方程, 即恢复流体的可压缩性假设• 这样就可保证 Euler 方程在超平面$\{t = 0\}$上的初值问题适定• 但是, 要改变 Navier_Stokes 方程的不稳定性却不是这么简单• 但有一点可以肯定, 恢复流体的可压缩性假设一定会使它从一个"坏"方程向"好"方程转变, 尽管这时的运动方程稍显复杂[1~3]•

3 几点注意

通过上面的分析, 可以看到

1) 不稳定的偏微分方程组可以存在具有最好光滑性的解析解•

2) 不适定问题可以存在解析解• 因此, 在对稳定偏微分方程组的某个定解问题求数值解之前, 应该先检验这个问题的适定性, 以保证后续工作的可靠性不受质疑•

3) 不适定问题的解称为形式解• 这种解在实际上毫无用处, 但是它们却在必要时可以帮助我们从反面说明一些重要问题(比如所论定解问题不适定), 而不用通过复杂的理论证明• 另外, 本文中出现的形式解都是多项式函数, 只是为了在说明问题时避开形式解以不明收敛性的级数出现, 而与其它附加条件无关(比如要求初始函数为速降或有界函数等等)• 换句话说, 对于Navier_Stokes 方程和 Euler 方程, 如果除了要求初始函数在 C^k 中, 还要求它们为有界(或速降), 上述关于稳定性的结果都不改变•

4) 偏微分方程的不稳定性导致的困难远超过稳定方程的某个定解问题不适定性给后续研究带来的麻烦•

在后续的论文中我们将深入讨论 Navier_Stokes 方程的奇异性质以及这种奇异性给应用研究带来的麻烦•

[参 考 文 献]

[1] Lifchitz L Landau_L. Mecanique des Fluids[M]. Moscow: Editions Mir, 1971.

[2] 施惟慧, 陈达段, 何幼桦. 分层理论与非线性偏微分方程基础[M]. 上海: 上海大学出版社, 2001.

[3] SHIH Wei_hui. Solutions Analytiques de Quelques Equations aux Derivees Partielles en Mecanique Des Fluids[M]. Paris: Hermann, 1992.

[4] Wilson D Trotman_L. Singularities of Maps and Applications to Differential Equations I, Shih W, Stratifications et Equations aux Derives Partielles[M]. Paris: Hermann, 1997.

[5] 王曰朋. 无粘、可压、绝热流体的 Euler 方程初、边值问题的适定性[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(7): 794—800.

Comparison of Stability Between Navier_Stokes and Euler Equations

SHI Wei_hui[1], WANG Yue_peng[2,3], SHEN Chun[4]
(1. Department of Mathematics, Shanghai University,
Shanghai 200444, P. R. China;
2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200072, P. R. China;
3. Department of Mathematics, Nanjing University of Information Science &Technology,
Nanjing 210044, P. R. China;
4. School of Mathematics and Information, Yantai Normal University,
Yantai, Shandong 264025, P. R. China)

Abstract: The stabilities about Navier_Stokes equation and Euler equation were brought into comparison; and by taking their typical initial value problem for example, the reason of leading to the difference in stability between Navier_Stokes and Euler equations was also analyzed.

Key words: Navier_Stokes equation; Euler equation; stable equation; singular equation