

# 带刚性限位的双层隔振系统的 离散随机模型\*

贺 华<sup>1</sup>, 冯 奇<sup>1</sup>, 沈荣瀛<sup>2</sup>, 汪 玉<sup>3</sup>

(1. 同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092;  
2. 上海交通大学 振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030;  
3. 海军论证中心, 北京 100073)  
(我刊原编委张景绘推荐)

**摘要:** 研究由多刚体组成的带刚性限位的双层隔振系统, 对其冲击后受到周期性外激励和低强度噪声扰动共同作用下可能会产生的碰撞进行了分析。基于单向约束多体动力学理论, 导出了此隔振系统的最大 Poincaré 映射, 建立了其冲击后的零次近似随机离散模型和一次近似随机离散模型。通过对一 MTU 公司的柴油机隔振系统冲击作用后振动响应的调查指出, 由于可能发生间歇性碰撞, 该系统呈现复杂的非线性特性。零次近似模型和一次近似模型有较大的区别, 低强度的噪声也会对系统产生较大的影响。得到的结果对如何正确设计带刚性限位的双层隔振系统提供了理论参考依据。

**关键词:** Poincaré 映射; 随机 vibro\_impact 系统; 双层隔振  
**中图分类号:** O324      **文献标识码:** A

## 引 言

对于双层隔振系统, 为防止上层机器设备在冲击作用下振幅过大, 常采用在两层隔振系统间加限位器来限制其位移。在冲击条件下, 上层设备与限位器可能发生碰撞振动, 从而有可能导致破坏。这类问题属于 vibro\_impact 系统<sup>[1]</sup>, 它是非光滑研究领域的一个热点问题, 研究此类问题的一个有效方法是从全局动力学的角度建立其离散模型。Brogliato<sup>[2]</sup>指出两次碰撞间具有光滑性质的系统可以通过碰撞 Poincaré 映射来建立其离散模型。为了研究随机混沌, Kapitaniak<sup>[3]</sup>提出了平均 Poincaré 映射, 冯奇等<sup>[4]</sup>在此基础上, 针对有噪声扰动的 vibro\_impact 问题提出了平均碰撞 Poincaré 映射。

本文针对一个带刚性限位的双层隔振系统, 采用带单向约束的多体动力学理论建立了最大碰撞 Poincaré 映射。通过对一个 MTU 公司柴油机双层隔振系统实例进行了冲击后振动分析, 指出低强度噪声对零次模型和一次模型的影响, 并对零次模型和一次模型进行了比较, 研

\* 收稿日期: 2004\_09\_14; 修订日期: 2006\_06\_08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072040)

作者简介: 贺华(1975—), 女, 陕西人, 博士(E-mail: yeahehua@sina.com);

冯奇(联系人, Tel: + 86\_21\_65982792; E-mail: fengqi@mail.tongji.edu.cn)。

究结果揭示了其可能发生的复杂的非线性运动

### 1 运动方程

设双层隔振系统由两个刚体和几十个隔振器、限位器组成, 这可用图 1 所示的模型来表示。并认为每个刚体具有 6 个自由度, 隔振器简化为三向弹簧, 刚体间的相对运动受到限位器的限制。刚体的位移可用向量  $X = [r_1 \ \theta_1 \ r_2 \ \theta_2]^T$  描述。

根据带单向约束的多体动力学理论, 系统的运动方程如下

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX + DW = \Pi + F, \tag{1}$$

$$g_{Ni} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

$$g_{Ni}^+ = -\varepsilon g_{Ni}^-, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

式中,  $M$  是质量矩阵,  $K$  是刚度矩阵,  $C = \alpha M + \beta K$  是阻尼矩阵,  $DW$  为陀螺力项,  $\Pi$  为连体基和惯性基间坐标转换产生的二次项,  $F$  是外激励列向量。  $g_{Ni}$  为第  $i$  个限位器的间隙。

方程 (1) 是自由相的光滑常微分运动方程, 不等式 (2) 定义了位形空间, 方程 (3) 是常用的碰撞条件, 给出了碰撞点速度在碰撞前后的关系。上标 “-” 和 “+” 分别表示碰撞前与碰撞后。  $\varepsilon$  是碰撞恢复系数。

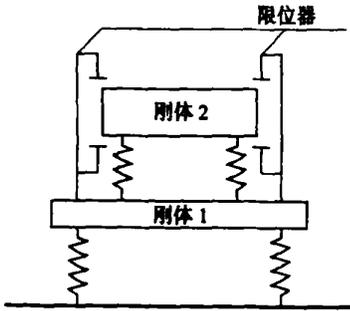


图 1 带刚性限位的双层隔振系统模型

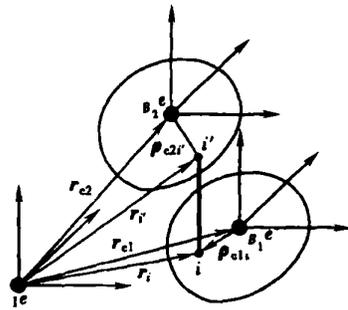


图 2 分别固结于两刚体的两点

图 2 描述了分别固结于两刚体的两点之间的距离。点  $i(B_1 \rho_{1i}, B_1 \rho_{2i}, B_1 \rho_{3i})$  和点  $i'(B_2 \rho_{1i'}, B_2 \rho_{2i'}, B_2 \rho_{3i}')$  分别固结于刚体  $B_1$  和  $B_2$ 。本文中  $(\sim)$  表示  $(\sim)$  的坐标方阵,  $r$  表示惯性基下的矢径,  $\rho$  表示连体基下的矢径。

两点间距离变化为

$$\Delta r_{ii'} = r_2 + B_2 \rho_{c2i'} - r_1 - B_1 \rho_{c1i} - r_{c2i0} + r_{c1i0}$$

写成坐标方阵的形式为

$${}_I \Delta r_i = [-E \ \rho_{c1i} \ E \ -\rho_{c2i'}] X \tag{4}$$

文中的限位器与上层设备组成的每个碰撞对的接触面积相对很小, 可视碰撞对为点点碰撞, 每个限位器只限制一个方向的相对位移, 接触状态由碰撞对之间的距离  $g_{Ni}$  是否为零来判断。

$$g_{Ni} = W_{Ni}X + g_0, \tag{5}$$

式中,  $g_0$  是接触对之间的初始距离, 对于横向、纵向和垂向限位器,  $W_{Ni}$  分别等于  ${}_I \Delta r_{1i}$ 、 ${}_I \Delta r_{2i}$  和  ${}_I \Delta r_{3i}$ 。

## 1.1 自由相

方程(1)中外激励可能为正弦载荷受低强度白噪声激励扰动。考虑方程(1)中的非线性项为弱非线性,方程(1)可以写成如下形式

$$M\dot{X} + CX + KX = f(X, \mathcal{X}) + F, \quad (6)$$

其中  $\varepsilon$  是常值小参数,  $f(X, \mathcal{X}) = (\Pi - DW)/\varepsilon$

假设方程(6)的一阶近似解为

$$X = X_0 + \varepsilon X_1 \quad (7)$$

将方程(7)代入方程(6),由  $\varepsilon$  的同次幂相等,并忽略  $\varepsilon^n (n \geq 2)$  项得

$$\varepsilon^0: M\dot{X}_0 + CX_0 + KX_0 = F;$$

$$\varepsilon^1: M\dot{X}_1 + CX_1 + KX_1 = f(X_0, \mathcal{X}_0).$$

上面的两个方程具有相同的质量和刚度矩阵,所以两个方程的模态矩阵  $\Phi$  是相同的。

将  $X$  零阶近似解  $X_0 = \Phi q_0$  和  $X_1 = \Phi q_1$  代入上面两个方程,就可将其解耦为

$$\varepsilon^0: \ddot{q}_0 + \Lambda_1 q_0 + \Lambda_2 q_0 = P, \quad (8)$$

$$\varepsilon^1: \ddot{q}_1 + \Lambda_1 q_1 + \Lambda_2 q_1 = \frac{\Phi^T}{M^*} f(X_0, \mathcal{X}_0), \quad (9)$$

其中

$$\Lambda_1(j, j) = 2\zeta_j \omega_j, \quad \Lambda_2(j, j) = \omega_j^2, \quad M^* = \Phi^T M \Phi, \quad P = (\Phi^T / M^*) F.$$

方程(6)中的外激励可分为确定性正弦激励  $F$  和随机白噪声激励  $F$ , 即  $F = F + F$ , 相应的  $P = P + P$ ,  $q_0 = \hat{q}_0 + q_0$ , 方程(8)可以分解为如下两部分

$$\ddot{\hat{q}}_0 + \Lambda_1 \dot{\hat{q}}_0 + \Lambda_2 \hat{q}_0 = P, \quad (10)$$

$$\ddot{q}_0 + \Lambda_1 \dot{q}_0 + \Lambda_2 q_0 = P, \quad (11)$$

其中,  $P = \hat{p} \sin(\theta t)$ ,  $P = p \eta(t)$ ,  $E[\eta(t)] = 0$ ,  $E[\eta(t)\eta(s)] = \delta(t-s)$ 。

已知方程组(10)中第  $j$  个方程在  $t_k$  时的响应是  $\hat{q}_{0jk}$ , 则  $t_{k+1}$  时的响应为

$$\hat{q}_{0j(k+1)} = X(t_{k+1} - t_k) \hat{q}_{0jk} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t - \tau) \hat{p}_j \sin \theta \tau d\tau, \quad (12)$$

其中

$$X(t) = \frac{e^{-\zeta_j \omega_j t}}{\cos \varphi_j} \begin{bmatrix} \cos(\omega_j t - \varphi_j) & \sin \omega_j t \\ -\omega_j \sin \omega_j t & \cos(\omega_j t + \varphi_j) \end{bmatrix}, \quad \omega_j = \omega_j \sqrt{(1 - \zeta_j^2)},$$

$$\varphi_j = \arctan(\zeta_j / \sqrt{(1 - \zeta_j^2)}), \quad t_{k+1} = t_k + \Delta_k.$$

方程(12)积分后的表达式如下

$$q_{0j} = e^{-\zeta_j \omega_j \Delta t} (C_{1j} \cos \omega_j t + C_{2j} \sin \omega_j t) + C_{3j} \cos \theta t + C_{4j} \sin \theta t,$$

$$\hat{q}_{0j} = -C_{0j} e^{-\zeta_j \omega_j \Delta t} (C_{1j} \sin(\omega_j t + \varphi_j) - C_{2j} \cos(\omega_j t + \varphi_j)) - C_{3j} \theta \sin \theta t + C_{4j} \theta \cos \theta t,$$

式中,  $C_{0j}$ 、 $C_{1j}$ 、 $C_{2j}$ 、 $C_{3j}$ 、 $C_{4j}$ 、 $C_{5j}$ 、 $C_{6j}$ 、 $C_{7j}$ 、 $C_{8j}$  是和系统固有特性、初值以及外激励有关的参数。

由于 2 次碰撞的间隔较短,根据文献[5],在 2 次碰撞间,方程(11)的均值响应

$$E[q_{0j}] = 0, \quad E[\dot{q}_{0j}] = 0, \quad \sigma_{q_{0j}}^2 = \frac{P_j \Delta_k}{2 \omega_j^2}, \quad \sigma_{\dot{q}_{0j}}^2 = \frac{P_j \Delta_k}{4 \omega_j \zeta_j}.$$

由概率论和数学知识知道,2 次碰撞间的随机响应基本在

$$\left[ E[q_0] - 3\sigma_{q_0}, E[q_0] + 3\sigma_{q_0} \right]$$

范围之内,故 2 次碰撞间方程(11)的随机响应的最大值为

$$\max[q_0] = E[q_0] + 3\sigma_{q_0}, \max[\dot{q}_0] = E[\dot{q}_0] + 3\sigma_{\dot{q}_0} \quad (13)$$

在 2 次碰撞间取随机响应  $q_0 = \max[q_0]$ , 将  $q_0 = \hat{q}_0 + q_0$  和  $X_0 = \Phi q_0$  代入方程(9) 求解得到  $q_1$ , 就可得到 2 次碰撞间的可能最大响应  $q_m$ . 将  $X_0 = \Phi q_0$  和  $X_1 = \Phi q_1$  代入方程(7) 就可得到方程(6) 的一阶近似解  $X_m$ .

## 1.2 碰撞接触相

如果在某一时刻  $t_k$  有限位器发生碰撞, 则至少有 1 个碰撞对在  $t_k$  时刻的最大可能响应  $q_m$  满足  $g_{Ni} = 0 \exists i \in (1, 2, \dots, n)$ , 且碰撞点满足平均碰撞条件:

$$W_{Ni} X_m + g_0 = 0, \quad (14)$$

$$E[g_{Ni}^+] = -\epsilon E[g_{Ni}^-], \quad (15)$$

在此,  $E[g_{Ni}^-]$  和  $E[g_{Ni}^+]$  分别是碰撞前后接触点的平均相对速度,  $E[g_{Ni}^-]$  和  $E[g_{Ni}^+]$  必须同时满足

$$E[g_{Ni}^-] = W_{Ni} E[X^-], \quad E[g_{Ni}^+] = W_{Ni} E[X^+]. \quad (16)$$

将方程(16)代入方程(14)和方程(15), 并考虑  $X = \Phi q$ ,  $E[X] = \Phi E[q]$ , 得到用广义坐标表示的碰撞条件:

$$W_{Ni} \Phi q_m + g_0 = 0, \quad \exists i \in (1, 2, \dots, n), \quad (17)$$

$$W_{Ni}^T \Phi E[q^+] = -\epsilon W_{Ni}^T \Phi E[q^-], \quad \text{若 } W_{Ni}^T \Phi \neq 0, \quad E[q^+] = -\epsilon E[q^-]. \quad (18)$$

## 1.3 最大碰撞 Poincar 映射

综合考虑冲击后的整个运动过程, 冲击后限位器可能与上层设备发生持续性的碰撞. 在自由飞行相取最大可能位移, 在碰撞接触相取平均碰撞条件, 考虑碰撞前映射, 可建立零阶近似模型和一阶近似模型的最大碰撞 Poincar 映射:

$$H: \bar{q}_{mj}^{(k)} \rightarrow \bar{q}_{nj}^{(k+1)}, \quad (19)$$

$$\Delta_k = t_{k+1} - t_k,$$

其中, 下标  $k$  表示第  $k$  次碰撞,  $\Delta_k$  表示第  $k$  次和第  $k+1$  次碰撞间的时间间隔, 可以由求超越方程组  $g_{Ni} = 0, i = 1, 2, \dots, n$  的最小值得到.

当  $q_{mj} = \hat{q}_{0jk} + q_{0jk}$  时, 为零阶近似的随机离散模型. 当  $q_{mj} = \hat{q}_{0jk} + q_{0jk} + q_{1jk}$  时, 为一阶近似的随机离散模型.

## 2 实例分析

本例采用一个真实的 MTU 公司的柴油机隔振系统进行计算, 模型如图 1 所示. 此隔振系统具有 35 个三向刚度的隔振器和 22 个限位器.  $m_1 = 19\,300 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 21\,660 \text{ kg}$ ,  $J_{c1} = \text{diag}(93\,460, 35\,270, 84\,940) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $J_{c2} = \text{diag}(40\,090, 9\,260, 37\,540) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0.000\,08$  其它系统参数略.

刚体整个运动可分成两个阶段: ①冲击阶段: 隔振系统在冲击载荷的作用下吸收了大量的能量. 在这个阶段由于冲击荷载作用时间较短, 冲击强度较大, 因此有限力和噪声的影响以及限位器的作用都可忽略不计. ②冲击后阶段: 隔振系统获得了较大的能量, 在简谐力和低强度噪声扰动共同作用下发生大位移的强迫振动, 而大位移的振动受到限位器限制, 就可能形成限

位器与上层刚体间歇性的碰撞。故冲击后阶段运动又分成两个相,自由相与碰撞接触相。

考虑此系统受冲击后的系统特性,冲击阶段的振动方程如方程(1)所示,冲击作用时间  $t = 9 \times 10^{-3}$ ,冲击函数为

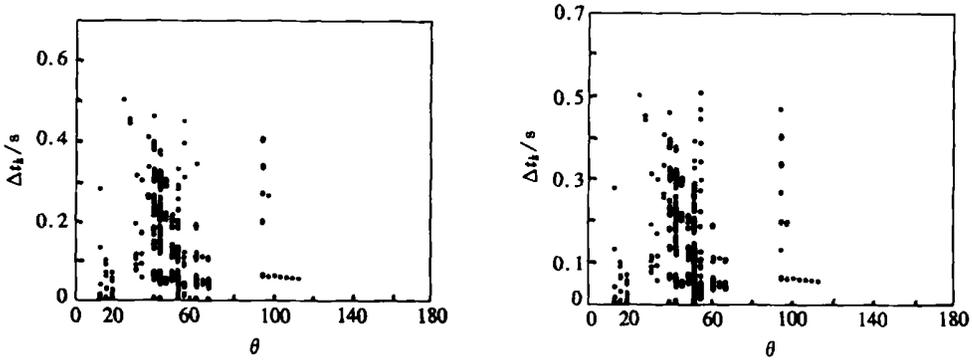
$$P = -M[0 \ 0 \ \ddot{u} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \ddot{u} \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad \ddot{u} = 500\sin(\pi t/9 \times 10^{-3}) \cdot$$

不考虑冲击前的影响,冲击后的位移、速度可以由摄动法得到。将冲击后的位移和速度作为冲击后阶段的初值,冲击后阶段系统的运动方程如方程(1)~方程(3),外激励如下所示

$$F = [0 \ 0 \ 0 \ F \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ F \ F \ 0]^T \sin\theta t,$$

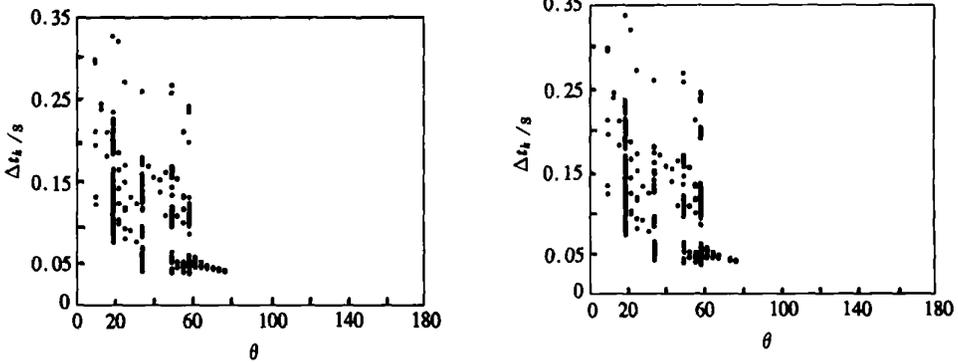
$$F = 0.00033[0 \ 0 \ 0 \ F \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ F \ F \ 0]^T \eta(t),$$

$$F = 100\ 000 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot$$



(a) 不考虑噪声作用零次近似模型

(b) 不考虑噪声作用一次近似模型



(c) 考虑噪声作用零次近似模型

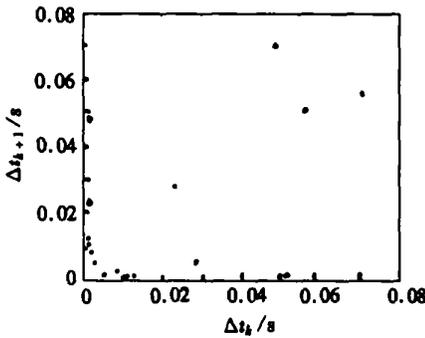
(d) 考虑噪声作用一次近似模型

图3 分岔图

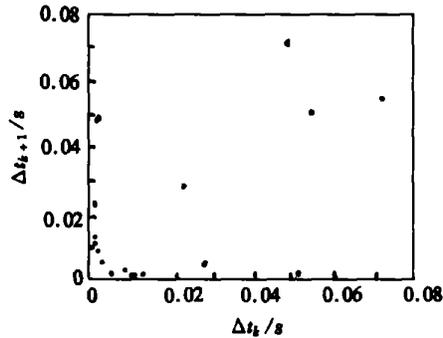
图3给出了系统的分岔图。图3中横坐标为外激励的无量纲圆频率,纵坐标为碰撞间隔时间。图3中某些频率对应的  $\Delta_k$  不存在,说明在这些频率并未发生间歇性的碰撞,冲击后系统在这些区域只有少数几次碰撞就一直在小幅值范围运动,例如图3(c)中  $\theta < 10$  和  $\theta > 76$  的区域。图3(a)为不考虑噪声作用并采用零次近似模型的结果,图3(b)为考虑噪声作用并采用一次近似模型的结果,图3(c)为考虑噪声作用并采用零次近似模型的结果,图3(d)为考虑噪声作用并采用一次近似模型的结果。从图3可以看出系统的性质会随外激励圆频率变化。对比图3(a)与图3(b),图3(c)与图3(d)可以看出,一次近似模型和零次近似模型的分岔图有一定的区别。对比图3(a)与图3(c),图3(b)与图3(d)可以看出低强度的白噪声对系统的影响是

很大的,它彻底改变了系统的分岔图。

图4和图5给出了系统的 Poincaré 图用于说明系统的性质。图4为外激励圆频率  $\theta = 19$  时的 Poincaré 图,图5为外激励圆频率  $\theta = 40$  时的 Poincaré 图,其中图5(a)为不考虑噪声作用并采用零次近似模型的结果,图5(b)为不考虑噪声作用并采用一次近似模型的结果,图5(c)为考虑噪声作用并采用零次近似模型的结果,图5(d)考虑噪声作用并采用一次近似模型的结果。图4(a)和4(b)为亚谐运动,图4(c)和4(d)显示出类似奇怪吸引子结构,因此有可能为混沌运动。从图4可以看出,由于低强度的噪声改变了最大碰撞 Poincaré 映射的函数,也就改变了出现混沌的参数空间,因此有可能将亚谐运动发展为混沌运动。零次模型和一次模型的区别在图4中不是很大。图5(a)和图5(b)为模糊点集,因此有可能为混沌运动,图5(c)为周期运动,图5(d)为周期三运动。从图5可以看出,低强度的噪声也有可能使原来较复杂的运动退化为周期运动,零次模型和一次模型在此频率时有较大的区别。

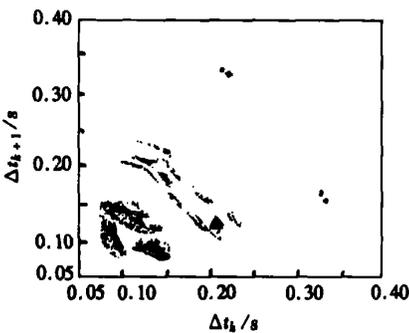


(a) 不考虑噪声作用零次近似模型

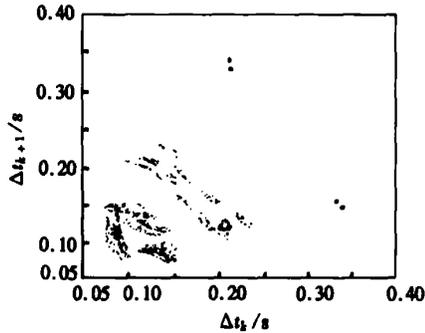


(b) 不考虑噪声作用一次近似模型

型



(c) 考虑噪声作用零次近似模型

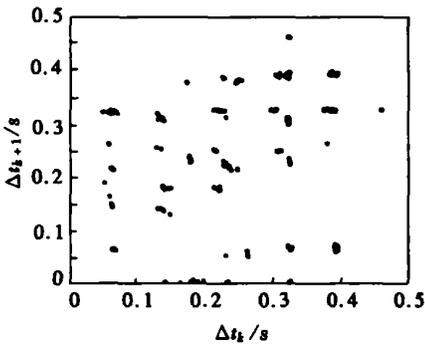


(d) 考虑噪声作用一次近似模型

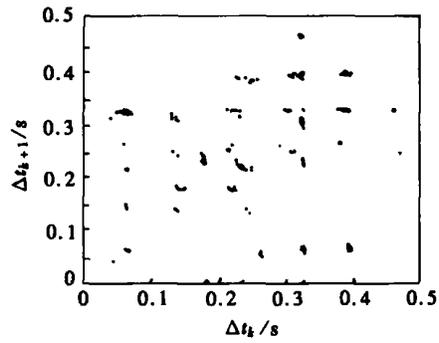
图4 外激励频率为19时的 Poincaré 图

### 3 结 论

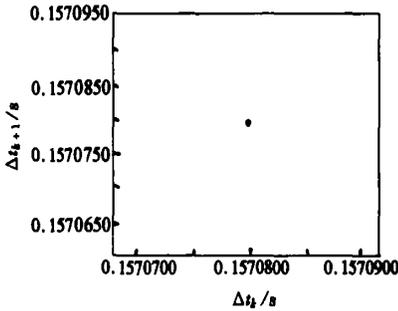
本文建立了带刚性限位的双层隔振系统的随机离散模型。研究表明零次近似模型和一次模型之间的区别随外激励频率的变化时大时小并没有简单规律可循,说明自由飞行相的弱非线性在有间歇性碰撞发生时应该给予重视。低强度的噪声扰动对系统的影响较大。因为噪声的存在改变了最大碰撞映射的函数,因此也改变了出现混沌的参数空间,因此它有可能导致混



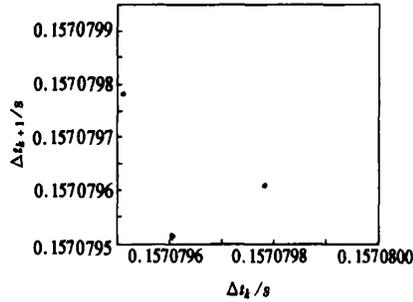
(a) 不考虑噪声作用零次近似模型



(b) 不考虑噪声作用一次近似模型



(c) 考虑噪声作用零次近似模型



(d) 考虑噪声作用一次近似模型

图5 外激励频率为40时的 Poincaré 图

沌的产生,也有可能抑制混沌的出现。隔振系统在冲击后有可能发生间歇性的碰撞,甚至可能发生混沌运动,从而导致隔振系统的破坏。

### [参 考 文 献]

- [1] Bishop S R. Impact oscillators[J]. Phil Trans R Soc A, 1994, 347: 347—351.
- [2] Brogliato B. Nonsmooth Mechanics [M]. London: Springer-Verlag, 1999, 173—228.
- [3] Kapitaniak T. Chaos in Systems With Noise [M]. Singapore: World Scientific, 1990, 65—75.
- [4] FENG Qi, HE Hua. Modeling of the Mean Poincaré map on a class of random impact oscillators[J]. European Journal of Mechanics A/ Solids, 2003, 22: 267—281.
- [5] Nigam N C. Introduction to Random Vibrations [M]. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1983, 175—219.

## Stochastic Discrete Model of a Two-Stage Isolation System With Rigid Limiters

HE Hua<sup>1</sup>, FENG Qi<sup>1</sup>, SHEN Rong\_ying<sup>2</sup>, WANG Yu<sup>3</sup>

(1. School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics,

Tongji University, Shanghai 200092, P.R. China;

2. State Key Laboratory of Vibration, Shock and Noise,

Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P.R. China;

3. Naval Research Center, Beijing 100073, P.R. China)

**Abstract:** The possible intermittent impacts of a two-stage isolation system with rigid limiters have been investigated. The isolation system is under periodic external excitation disturbed by small stationary Gaussian white noise after shock. The maximal impact Poincaré map is proposed based on the multi-body dynamics with unilateral constraints. Then in the period after shock, the zero order approximate stochastic discrete model and the first order approximate stochastic model were developed. The real isolation system of an MTU diesel engine was used to evaluate the established model. After calculating numerical example, the effects of noise excitation on the isolation system were discussed. The results show that the property of the system is complicated due to intermittent impact. The difference between zero order model and the first order model may be great. The effect of small noise is obvious. The results may be expected useful to the naval designers.

**Key words:** Poincaré map; stochastic vibro-impact system; two-stage isolation