

楔型向错偶极子和裂纹的干涉效应*

方棋洪, 刘又文

(湖南大学 工程力学系, 长沙 410082)

(我刊原编委樊大钧推荐)

摘要: 研究了晶体材料中一个楔型向错偶极子与裂纹的弹性干涉效应。运用复变函数方法获得了复势函数和应力场的封闭形式解答, 导出了裂纹尖端应力强度因子和作用在向错偶极子中心点像力的解析表达式。获得了向错偶极子的位置、方向和偶臂长度对裂纹尖端应力强度因子的影响规律, 并讨论了裂纹附近向错偶极子的平衡位置。结果表明向错偶极子靠近裂纹尖端时, 对应力强度因子有明显的屏蔽或反屏蔽作用。

关键词: 向错; 裂纹; 复变函数方法; 像力

中图分类号: O343.7 文献标识码: A

引 言

位错和向错都是晶体材料中典型的晶格缺陷。和传统的平移型位错相比, 单个直线向错能够产生很大的内应力, 而形成单个向错需要很大的能量。在晶体材料和非结晶材料中, 具有相互屏蔽应力场的向错系统产生的能量却相对较小^[1,2]。实验观察证明, 楔型向错偶极子是一种典型的具有相互屏蔽效应的向错系统, 并有很多学者研究了其有关问题。Li^[3]得到了单个楔型向错偶极子形成的应力场和弹性应变能。Romanov^[4]解答了楔型向错偶极子和自由表面的干涉问题, 并给出了弹性场的表达式。Vladimirov 和 Romanov^[5]研究了楔型向错偶极子和直线界面(相界和晶界)的干涉问题, 并求出了干涉能和作用在向错上的像力。Romanov 和 Vladimirov^[6]研究了弹性圆柱体中一个向错偶极子问题。通过刃型位错分布映射, Wu^[7]求解了横观各向同性双材料中楔型向错偶极子的问题, 讨论了晶体各向异性 and 向错位置对应力场的影响。Sheinerman 和 Gutkin^[8]研究了圆柱形基体和薄膜系统中存在一个失配向错偶极子的问题。

近十几年来, 不少学者研究了位错偶极子和裂纹的干涉问题。Ballarini 和 Denda^[9]研究了一个位错偶极子和一条半无限裂纹的相互作用问题。Wang 和 Lee^[10]分析了刃型位错偶极子在半无限裂纹尖端附近的平衡位置。Lin 等^[11]研究了一个螺型位错偶极子和有限长裂纹的弹

* 收稿日期: 2005_05_27; 修订日期: 2006_06_02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472030)

作者简介: 方棋洪(1977—), 男, 浙江淳安人, 博士;

刘又文(1948—), 男, 湖南益阳人, 教授, 博士生导师(联系人, Tel: + 86_731_8821889; Fax: + 86_731_8822330; E_mail: Liuyouwu8294@sina.com)。

性干涉效应,并给出了应力场,应变能,像力,像力矩和裂尖应力强度因子的解析表达式。Yang等^[12]研究了螺型位错偶极子和一条钝裂纹的干涉问题。然而,有关向错偶极子和裂纹的相互作用问题自今还未见研究成果。此类研究不但有助于全面理解材料的塑性变形和加工硬化机理,而且可为研究材料的断裂机理提供科学的依据。

本文研究楔型向错偶极子和有限长平面裂纹的弹性干涉问题。运用复变函数方法,将向错和平面裂纹的干涉问题转化为 Riemann 边值问题。获得了楔型向错偶极子与一条有限长裂纹或一条半无限长裂纹的相互干涉的封闭形式解答。总结了向错偶极子对裂纹应力强度因子的屏蔽和反屏蔽作用规律,并讨论了裂纹附近偶极子的平衡位置。

1 问题的解答

如图 1 所示,在 xOy 平面上,沿 x 轴有一条端点为 c 和 d 的有限长裂纹 L 。楔型向错偶极子包含一个位于 $z_1(z_1 = x_1 + iy_1 = z_0 - ae^{i\varphi})$ 点强度为 ω 的正向错和位于 $z_2(z_2 = x_2 + iy_2 = z_0 + ae^{i\varphi})$ 点的同样强度的负向错,偶臂长度为 $2a$,且 $z_0 = x_0 + iy_0$ 。两条向错线都与平面垂直。

这是一个平面弹性问题^[6],在复平面中 $z = x + iy$,应力场(σ_{xx} , σ_{yy} 和 σ_{xy})和位移场(u_x 和 u_y)可以用两个复势函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 表示如下^[13]

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}], \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad (2)$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = (3 - 4\nu)\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z \overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}, \quad (3)$$

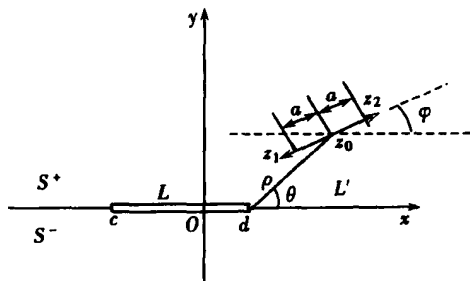


图 1 楔型向错偶极子和裂纹干涉示意图

式中 $u'_x = \partial u_x / \partial x$, $u'_y = \partial u_y / \partial x$, $\Phi'(z) = d[\Phi(z)]/dz$, μ 为材料的剪切模量, ν 是泊松比, 横杠表示对复数求共轭。

裂纹面的边界条件为

$$\sigma_{yy}(t) - i\sigma_{xy}(t) = 0, \quad t \in L. \quad (4)$$

由文献[6]可知,楔型向错线分别位于无限大平面中点 $z_1(z_1 = x_1 + iy_1)$ 和 $z_2(z_2 = x_2 + iy_2)$ 的一个楔型向错偶极子产生的弹性应力场为

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu\omega}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + \frac{(y-y_1)^2}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - \frac{(y-y_2)^2}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \right], \quad (5)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\mu\omega}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + \frac{(x-x_1)^2}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - \frac{(x-x_2)^2}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \right], \quad (6)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-\mu\omega}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - \frac{(x-x_2)(y-y_2)}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \right]. \quad (7)$$

无裂纹时, 一个楔型向错偶极子在无限大介质中产生的弹性场, 可以用两个复势函数 $\Phi_0(z)$ 和 $\Psi_0(z)$ 表示•

把式(5)和式(6)代入方程(1)中, 可以得到

$$4\text{Re}[\Phi_0(z)] = \frac{\mu\omega}{2\pi(1-\nu)} \ln \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \quad (8)$$

式中 $z = x + iy$ •

由此, 根据文献[13], 复函数 $\Phi_0(z)$ 可以表示为如下形式

$$\Phi_0(z) = \frac{D\omega}{2} [\ln(z-z_1) - \ln(z-z_2)], \quad (9)$$

式中, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 和 $D = \mu/2\pi(1-\nu)$ •

把式(6), 式(7)和式(9)代入方程(2)中, 可以得到复变函数 $\Psi_0(z)$ 的表达式

$$\Psi_0(z) = \frac{D\omega}{2} \left[\frac{z_2}{z-z_2} - \frac{z_1}{z-z_1} \right]. \quad (10)$$

由方程(9)和方程(10)联合方程(1)和方程(2), 可以得到与方程(5)~方程(7)一样的应力场•

式(9)和式(10)是含单个楔型向错偶极子的一般弹性介质中两个复势函数的奇性主部, 是由本文导出的一个新结果•

对于单个楔型向错偶极子和一条有限长平面裂纹的弹性干涉问题, 可以定义复势函数为如下形式

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi^*(z), \quad (11)$$

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi^*(z), \quad (12)$$

其中 $\Phi_0(z)$ 和 $\Psi_0(z)$ 表示无限大介质中只含单个楔型向错偶极子时的解答, $\Phi^*(z)$ 和 $\Psi^*(z)$ 表示由于裂纹存在而产生的扰动函数, 它们在域内全纯•

运用 Riemann-Schwarz 反照原理^[13,14], 引入一个新的解析函数

$$\Omega(z) = -\overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}. \quad (13)$$

把式(11)和式(12)代入式(13), 可以得到

$$\Omega(z) = \frac{D_1\omega}{2} \left[\ln \frac{z-z_2}{z-z_1} + \frac{z_1-z}{z-z_1} + \frac{z-z_2}{z-z_2} \right] + \Omega^*(z), \quad (14)$$

式中 $\Omega^*(z)$ 全纯•

对式(13)取共扼, 并以 z 替换 \bar{z} , 可以得到

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - z\Phi'(z) - \Omega(z). \quad (15)$$

边界条件(4)可用上述复势函数表示

$$[\Phi(t) - \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 0, \quad t \in L, \quad (16)$$

$$[\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 0, \quad t \in L, \quad (17)$$

式中上标+和-分别代表从上半平面 S^+ 和下半平面 S^- 趋向裂纹面时函数所取的边界值•

将式(9)~式(12)以及式(14)代入式(16)和式(17), 化为全纯函数 $\Phi^*(z)$ 和 $\Omega^*(z)$ 的边界值问题求解^[13,14], 可以得到该问题的复势函数

$$\Phi(z) = \frac{D\omega}{4} \left[\ln \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-z_2)(z-z_1)} + \frac{z_1-z}{z-z_1} + \frac{z-z_2}{z-z_2} \right] + \frac{D\omega}{4} X_0(z) \left\{ \frac{1}{X_0(z_1)} \ln(z-z_1) - \frac{1}{X_0(z_2)} \ln(z-z_2) - (z_1-z_2-z_1+z_2) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{X_0(z_1)} \left[\frac{z_1 - z}{z - z_1} - \ln(z - z_1) \right] + \frac{1}{X_0(z_2)} \left[\frac{z - z_2}{z - z_2} + \ln(z - z_2) \right] \right\}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & \frac{D\omega}{4} \left[\frac{z_2}{z - z_2} + \frac{3z - z_1}{z - z_1} - \frac{z_1}{z - z_1} - \frac{3z - z_2}{z - z_2} - \frac{z(z - z_1)}{(z - z_1)^2} + \frac{z(z - z_2)}{(z - z_2)^2} \right] - \\ & \frac{D\omega}{4} X_0(z) \left\{ \frac{1}{X_0(z_1)} \frac{z_1}{z - z_1} - \frac{1}{X_0(z_2)} \frac{z_2}{z - z_2} + \frac{1}{X_0(z_1)} \left[\frac{z_1 - 3z}{z - z_1} + \frac{z(z - z_1)}{(z - z_1)^2} \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{X_0(z_2)} \left[\frac{3z - z_2}{z - z_2} - \frac{z(z - z_2)}{(z - z_2)^2} \right] \right\} - \frac{D\omega}{4} X_0'(z) \left\{ \frac{z}{X_0(z_1)} \ln(z - z_1) - \right. \\ & \left. \frac{z}{X_0(z_2)} \ln(z - z_2) - z(z_1 - z_2 - z_1 + z_2) + \frac{z}{X_0(z_1)} \left[\frac{z_1 - z}{z - z_1} - \ln(z - z_1) \right] + \right. \\ & \left. \frac{z}{X_0(z_2)} \left[\frac{z - z_2}{z - z_2} + \ln(z - z_2) \right] \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

其中 $X_0(z) = (z - c)^{-0.5}(z - d)^{-0.5}$, $X_0'(z) = dX_0(z)/dz$ 。

假设 $c \rightarrow -\infty$ 和 $d = 0$, 由式(18)和式(19), 我们得到关于楔型向错偶极子和半无限裂纹干涉问题的解答。

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \frac{D\omega}{4} \left[\ln \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - z_2)(z - z_1)} + \frac{z_1 - z}{z - z_1} + \frac{z - z_2}{z - z_2} \right] + \\ & \frac{D\omega}{4} \frac{1}{\sqrt{z}} \left\{ \sqrt{z_1} \left[\frac{z_1 - z}{z - z_1} - \ln(z - z_1) \right] + \sqrt{z_1} \ln(z - z_1) - \right. \\ & \left. \sqrt{z_2} \ln(z - z_2) + \sqrt{z_2} \left[\frac{z - z_2}{z - z_2} + \ln(z - z_2) \right] \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & \frac{D\omega}{4} \left[\frac{z_2}{z - z_2} + \frac{3z - z_1}{z - z_1} - \frac{z_1}{z - z_1} - \frac{3z - z_2}{z - z_2} - \frac{z(z - z_1)}{(z - z_1)^2} + \frac{z(z - z_2)}{(z - z_2)^2} \right] - \\ & \frac{D\omega}{4} \frac{1}{\sqrt{z}} \left\{ \sqrt{z_1} \frac{z_1}{z - z_1} - \sqrt{z_2} \frac{z_2}{z - z_2} + \sqrt{z_1} \left[\frac{z_1 - 3z}{z - z_1} + \frac{z(z - z_1)}{(z - z_1)^2} \right] + \right. \\ & \left. \sqrt{z_2} \left[\frac{3z - z_2}{z - z_2} - \frac{z(z - z_2)}{(z - z_2)^2} \right] \right\} + \frac{D\omega}{8} \frac{1}{\sqrt{z}} \left\{ \sqrt{z_1} \left[\frac{z_1 - z}{z - z_1} - \ln(z - z_1) \right] + \right. \\ & \left. \sqrt{z_1} \ln(z - z_1) - \sqrt{z_2} \ln(z - z_2) + \sqrt{z_2} \left[\frac{z - z_2}{z - z_2} + \ln(z - z_2) \right] \right\}, \quad (21) \end{aligned}$$

将求得的复势函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 代入式(1)~式(3), 有关楔型向错偶极子和有限长/半无限裂纹干涉应力和位移场就很容易得到了。

2 应力强度因子

对于含一条有限长裂纹, 裂尖应力强度因子可以定义为^[15]

$$K_1^d - iK_2^d = 2\sqrt{2} \lim_{z \rightarrow d} \sqrt{z - d} \Phi(z), \quad (22)$$

在 d 端。

$$K_1^c - iK_2^c = 2\sqrt{2} \lim_{z \rightarrow c} \sqrt{-(z - c)} \Phi(z), \quad (23)$$

在 c 端。

把式(18)代入式(22)和(23), 得到

$$K_1^d - iK_2^d = \frac{D\omega}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{d - c}} \left\{ \frac{1}{X_0(z_1)} \ln(d - z_1) - \frac{1}{X_0(z_2)} \ln(d - z_2) - \right.$$

$$(z_1 - z_2 - z_1 + z_2) + \frac{1}{X_0(z_1)} \left[\frac{z_1 - d}{d - z_1} - \ln(d - z_1) \right] + \frac{1}{X_0(z_2)} \left[\frac{d - z_2}{d - z_2} + \ln(d - z_2) \right] \Bigg\}, \tag{24}$$

$$K_1^c - iK_2^c = \frac{D\omega}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{d-c}} \left\{ \frac{1}{X_0(z_1)} \ln(c - z_1) - \frac{1}{X_0(z_2)} \ln(c - z_2) - (z_1 - z_2 - z_1 + z_2) + \frac{1}{X_0(z_1)} \left[\frac{z_1 - c}{c - z_1} - \ln(c - z_1) \right] + \frac{1}{X_0(z_2)} \left[\frac{c - z_2}{c - z_2} + \ln(c - z_2) \right] \right\}, \tag{25}$$

对于半无限长裂纹, 裂尖 o 点的应力强度因子定义为

$$K_1^o - iK_2^o = 2\sqrt{2} \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{z} \Phi(z). \tag{26}$$

把式(20)代入式(26)得到

$$K_1^o - iK_2^o = \frac{D\omega}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{z_1} \left[\frac{z_1}{-z_1} - \ln(-z_1) \right] + \sqrt{z_1} \ln(-z_1) - \sqrt{z_2} \ln(-z_2) + \sqrt{z_2} \left[\frac{z_2}{z_2} - \ln(-z_2) \right] \right\}. \tag{27}$$

应用式(24), 式(25)和式(27), 可以详细评价向错偶极子的位置、方向和偶臂长度对裂纹尖端应力强度因子的影响规律。这里我们运用式(24), 给出数值结果说明上述各种参数对应力强度因子的影响规律。

设 $d = -c = l$ 和 $z_0 = l + \rho e^{i\theta}$ 。当 $a/l = 0.01$, 角度 θ 和 φ 取不同值时, 应力强度因子 K_1^d 和 K_2^d 随偶极子相对位置 ρ/l 的变化如图 2 和图 3 所示。图 2 表明, 不论角度 θ 和 φ 取何值, 楔型向错偶极子对应应力强度因子 K_1^d 的屏蔽和反屏蔽效应随 ρ/l 的增大而不断减小; 图 3 说明当向错偶极子沿着 x 轴移动时 ($\theta = \varphi = 0^\circ$), 应力强度因子 K_2^d 等于 0。有趣的是, 当 $\theta = \varphi = 150^\circ$ 时, 随着 ρ/l 的增加, 向错偶极子先屏蔽尖端 d , 然后反屏蔽之。 ρ/l 存在一个临界值使应力强度因子 $K_2^b = 0$ 。

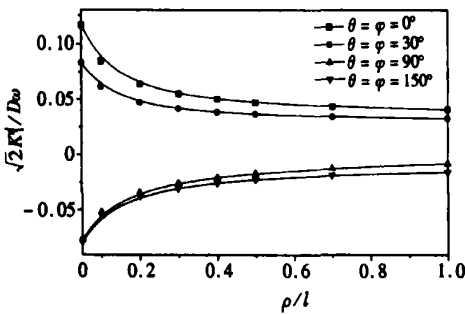


图 2 当 $a/l = 0.01$ 时, K_1^d 随 ρ/l 的变化

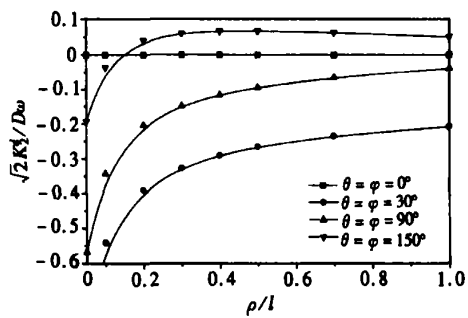


图 3 当 $a/l = 0.01$ 时, K_2^d 随 ρ/l 的变化

当 $a/l = 0.01$ 和 $\rho/l = 0.1$, 角度 θ 取不同值时, K_1^d 和 K_2^d 随偶极子方向 φ 的变化规律如图 4 和图 5 所示。当 $\theta = 45^\circ$ 时, 随着 φ 的变化, 偶极子对 K_1^d 的屏蔽和反屏蔽效应最大; 并在 $\varphi = 320^\circ$ 附近达到最大值; 在 $\varphi = 140^\circ$ 附近达到最小值。类似地, 对于一个固定角度 θ , 都存在一个临界角度 φ 使位错偶极子对 K_2^d 产生屏蔽或反屏蔽效应最大。例如, 当 $\theta = 90^\circ$ 时, 在

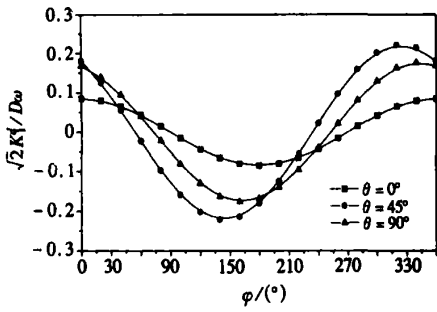


图 4 当 $\rho/l = 0.1$ 和 $a/l = 0.01$ 时, K_1^d 随 φ 的变化

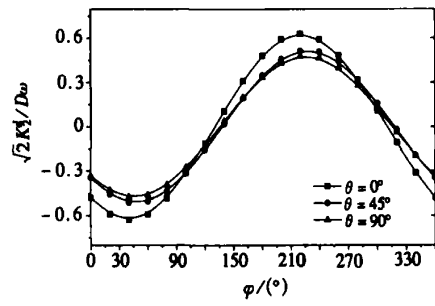


图 5 当 $\rho/l = 0.1$ 和 $a/l = 0.01$ 时, K_2^d 随 φ 的变化

$\varphi = 50^\circ$ 附近屏蔽效应最大, 在 $\varphi = 220^\circ$ 附近反屏蔽效应最大。

当 $\rho/l = 0.1$, 角度 θ 和 φ 取不同值时, 应力强度因子 K_1^d 和 K_2^d 随偶臂 a/l 的变化规律如图 6 和图 7 所示。当 $a/l = 0$ 时, K_1^d 和 K_2^d 都等于 0; 当 $\theta = \varphi = 0^\circ$ 或 $\theta = \varphi = 45^\circ$ 时, 对 K_1^d 的反屏蔽效应随着 a/l 的增加而变大, 此时向错偶极子加速裂纹扩展; 当 $\theta = \varphi = 90^\circ$, 屏蔽效应随着 a/l 的增加而增大, 此时向错偶极子阻止裂纹扩展; 当 $\theta = \varphi = 0^\circ$ 时, 无论 a/l 为何值, 应力强度因子 K_2^d 一直等于 0; 当 $\theta = \varphi \neq 0^\circ$ 时, 屏蔽效应随着 a/l 的增加而变大。

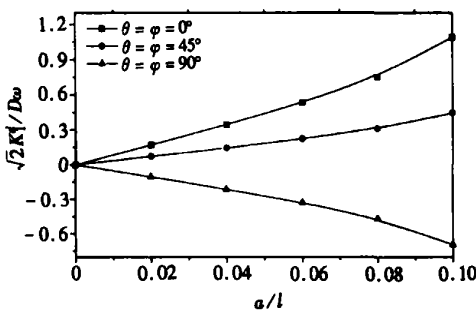


图 6 当 $\rho/l = 0.1$ 时, K_1^b 随 a/l 的变化

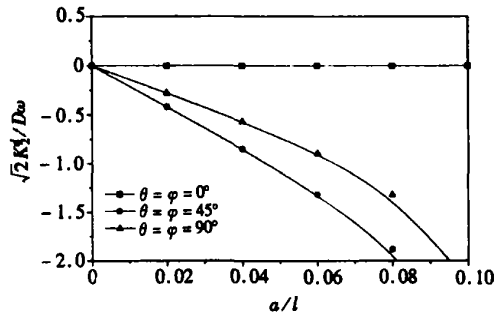


图 7 当 $\rho/l = 0.1$ 时, K_2^b 随 a/l 的变化

3 作用在向错偶极子上的像力

介质中的裂纹能产生作用在向错偶极子和向错环上额外的构形力。一般来说, 一个楔型向错偶极子可以用一个有限位错壁来代替, 位错壁的 Burgers 矢量等于壁上所有单个位错 Burgers 矢量的总和^[3]。因此, 作用在向错偶极子中心 (x_0, y_0) 单位向错线长度上的力的分量 (f_x, f_y) 可以通过 Peach_Koehler 公式计算得到

$$f_x - if_y = 2\omega a \cos \varphi \hat{\sigma}_{xy} + 2\omega a \sin \varphi \hat{\sigma}_{yy} + i[2\omega a \cos \varphi \hat{\sigma}_{xx} + 2\omega a \sin \varphi \hat{\sigma}_{xy}], \quad (28)$$

式中 $\hat{\sigma}_{xx}$, $\hat{\sigma}_{yy}$, $\hat{\sigma}_{xy}$ 为向错中心点的扰动应力分量。扰动应力分量可以由扰动应力函数 $\Phi^*(z_0)$, $\Phi'^*(z_0)$ 和 $\Psi^*(z_0)$ 来表示。参考 Fang 等^[16], 式(28)可以改写为

$$f_x - if_y = 2\omega e^{i\varphi} [\Phi^*(z_0) + \overline{\Phi^*(z_0)}] + 2\omega e^{-i\varphi} [z_0 \Phi'^*(z_0) + \Psi^*(z_0)], \quad (29)$$

其中

$$\Phi^*(z_0) = \frac{D\omega}{4} \left[\ln \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_1} + \frac{z_1 - z_0}{z_0 - z_1} + \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_2} \right] +$$

$$\begin{aligned} & \frac{D\omega}{4} X_0(z_0) \left\{ \frac{1}{X_0(z_1)} \left[\frac{z_1 - z_0}{z_0 - z_1} - \ln(z_0 - z_1) \right] - \right. \\ & \left. (z_1 - z_2 - z_1 + z_2) + \frac{1}{X_0(z_2)} \left[\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_2} + \ln(z_0 - z_2) \right] \right\}, \\ \Phi^{*'}(z_0) = & \frac{D\omega}{4} \left[\frac{2}{z_0 - z_2} - \frac{2}{z_0 - z_1} - \frac{z_1 - z_0}{(z_0 - z_1)^2} - \frac{z_0 - z_2}{(z_0 - z_2)^2} \right] + \\ & \frac{D\omega}{4} X_0'(z_0) \left\{ \frac{1}{X_0(z_1)} \left[\frac{z_1 - z_0}{z_0 - z_1} - \ln(z_0 - z_1) \right] - \right. \\ & \left. (z_1 - z_2 - z_1 + z_2) + \frac{1}{X_0(z_2)} \left[\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_2} + \ln(z_0 - z_2) \right] \right\} + \\ & \frac{D\omega}{4} X_0(z_0) \left\{ \frac{1}{X_0(z_1)} \left[\frac{-2}{z_0 - z_1} - \frac{z_1 - z_0}{(z_0 - z_1)^2} \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{X_0(z_2)} \left[\frac{2}{z_0 - z_2} - \frac{z_0 - z_2}{(z_0 - z_2)^2} \right] \right\}, \\ \Psi^*(z_0) = & -\Phi^*(z_0) - z_0 \Phi^{*'}(z_0) - \frac{D\omega}{4} \ln \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} - \frac{D\omega}{2} \overline{X_0(z_0)} \left[\frac{1}{X_0(z_1)} \ln(z_0 - z_1) - \right. \\ & \left. (z_1 - z_2 - z_1 + z_2) - \frac{1}{X_0(z_2)} \ln(z_0 - z_2) \right]. \end{aligned}$$

不失一般性, 设裂纹关于 y 轴对称 ($d = -c = l$)。由式(29), 讨论裂纹对向错偶极子平衡位置的影响。沿 x 轴方向的无量纲力定义为 $f_{x0} = 2f_x / D\omega^2 a$ 。当 $\theta = 0^\circ$ 和 $a/l = 0.01$, 角度 φ 取不同值时, f_{x0} 随 ρ/l 的变化如图 8 所示。裂纹作用在向错偶极子上的吸引力随角度 φ 的变大不断减小。当向错偶极子靠近裂纹尖端时, 吸引力不断增大。图 9 所示, 当 $\rho/l = 0.1$ 和 $a/l = 0.01$, 角度 θ 取不同值时, f_{x0} 随角度 φ 的变化。随着角度 φ 的不断增大, 裂纹先吸引向错偶极子, 再排斥, 然后又吸引它, 存在两个临界角度改变力 f_{x0} 的方向。

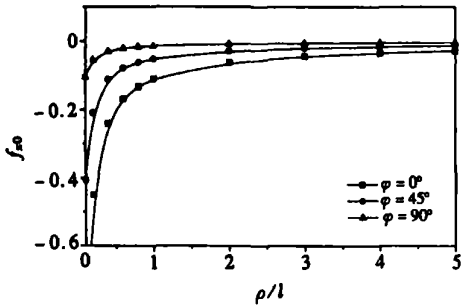


图 8 当 $a/l = 0.01$ 和 $\theta = 0^\circ$ 时, f_{x0} 随 ρ/l 的变化

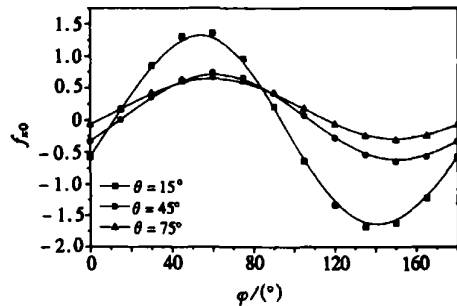


图 9 当 $\rho/l = 0.1$ 和 $a/l = 0.01$ 时, f_{x0} 随 φ 的变化

4 总 结

本文首次利用复变函数方法研究了楔型向错偶极子和一条内部有限长裂纹交互作用的边界值问题, 获得了裂纹尖端应力强度因子和作用在偶极子上的像力的解析表达式。分析结果表明, 裂纹尖端附近的楔型向错偶极子对应力强度因子有重要的屏蔽和反屏蔽效应。另外, 裂纹以及偶极子的方向对作用在偶极子上的像力有很大的影响。

[参 考 文 献]

- [1] Romanov A E. Screened disclinations in solids[J]. *Materials Science & Engineering A*, 1993, **164**(1): 58—68.
- [2] Romanov A E. Mechanics and physics of disclinations in solids[J]. *European Journal of Mechanics, A/ Solids*, 2003, **22**(5): 727—741.
- [3] Li J C M. Disclination model of high angle grain boundaries[J]. *Surface Science*, 1972, **31**(1): 12—26.
- [4] Romanov A E. Straight disclinations near a free surface[J]. *Physica Status Solidi, Ser A*, 1981, **63**(3): 383—388.
- [5] Vladimirov V I, Romanov A E. Behaviors of wedge disclination systems near grain boundaries[J]. *Physics of Metals*, 1982, **4**(6): 1053—1062.
- [6] Romanov A E, Vladimirov V I. Disclinations in crystalline solids[A]. In: Nabarro F R N Ed. *Dislocation in Solids* [C]. Vol 9. Amsterdam: Elsevier, 1992, 191—402.
- [7] Wu M S. Exact solutions for a wedge disclination dipole in a transversely isotropic biomaterial[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2000, **38**(16): 1811—1835.
- [8] Sheinerman A G, Gutkin M Yu. Misfit disclinations and dislocation walls in a two-phase cylindrical composite[J]. *Physica Status Solidi, Ser A*, 2001, **184**(2): 485—505.
- [9] Ballarini R, Denda M. Interaction between a crack and a dislocation dipole[J]. *International Journal of Fracture*, 1988, **37**(1): 61—71.
- [10] Wang S D, Lee S B. Mechanical equilibrium of an edge dislocation dipole near a semi_infinite crack tip[J]. *International Journal of Fracture*, 1992, **57**(4): 317—324.
- [11] Lin K M, Hu C T, Lee S B. Screw dislocation dipoles near an internal crack[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1993, **45**(3): 321—231.
- [12] Yang Y S, Lee S L, Lan B T. Elastic behavior of dislocation dipole near a blunt crack[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, **52**(1): 83—93.
- [13] Muskhelishvili N L. *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity* [M]. Leyden: Noordhoff, 1975, 331—340.
- [14] 樊大钧. *数学弹性力学* [M]. 北京: 新时代出版社, 1983.
- [15] Zhang T Y, Li J C M. Interaction of an edge dislocation with an interfacial crack[J]. *Journal of Applied Physics*, **72**(6): 2215—2226.
- [16] FANG Qi_hong, LIU You_wen, JIANG Chi_ping. Edge dislocation interacting with an interfacial crack along a circular inhomogeneity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, **40**(21): 5781—5797.

Elastic Interaction Between a Wedge Disclination Dipole and an Internal Crack

FANG Qi_hong, LIU You_wen

(Department of Engineering Mechanics, Hunan University,
Changsha 410082, P. R. China)

Abstract: The system of a wedge disclination dipole interacting with an internal crack is investigated. By using the complex variable method, the closed form solutions of complex potentials to this problem were presented. The analytic formulae of the physics variables, such as stress intensity factors at the tips of the crack produced by the wedge disclination dipole and the image force acting on disclination dipole center were obtained. The influence of the orientation, the dipole arm and the location of the disclination dipole on the stress intensity factors was discussed in detail. Furthermore, the equilibrium position of the wedge disclination dipole was also examined. It is shown that the shielding or anti-shielding effect of the wedge disclination to the stress intensity factors is significant when the disclination dipole moves to the crack tips.

Key words: disclination dipole; crack; complex variable method; image force