

# 热弹性动力学耦合问题的微分代数方法<sup>\*</sup>

王林翔<sup>1</sup>, R·V·N·梅尔姆克<sup>2</sup>

- (1. 南丹麦大学 自然科学与工程学院, 丹麦;
2. 威尔费瑞德·劳瑞尔大学 耦合动力学与复杂系统研究中心,  
大学西路 75 号, 滑铁卢, ON, 加拿大, N2L 3C5)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 对一般的热机械问题提出了一种有效的数值方法, 并对二维的热弹性问题进行了测试。该方法的基本思路是将描述热机械耦合问题的偏微分方程进行降阶, 使之成为一组微分代数方程, 应力应变关系被写成代数方程。所得到的微分代数系统采用全隐式的向后差分公式进行求解。对该方法进行了详细的说明。为了验证该方法的有效性, 将其应用于一个动态非耦合的热弹性问题的求解和一个耦合的二维热弹性问题的求解。

**关键词:** 热弹性; 二维问题; 微分代数方法

**中图分类号:** O343.6; O155 **文献标识码:** A

## 引 言

耦合现象, 作为许多不同物理现象的一个本质特征, 其数值处理方法比较困难。而为了求得耦合问题的解析解, 所求解的问题必须进行实质性的简化才能进行, 从而使得求解的模型与实际考察的物理现象之间相差很远。

耦合问题存在于电磁理论, 磁弹性问题, 电弹性问题, 及其它的许多理论中, 这些理论都可以统称为耦合场理论<sup>[1]</sup>。热弹性问题就是耦合场理论的一例, 因为它所涉及的两个(或多个)物理场内在的耦合在一起。尽管热弹性问题是最早吸引数学家开始研究的耦合场理论之一<sup>[2]</sup>, 近来在实际应用中新出现的一些问题, 使得对描述热机械问题的数学模型的研究, 又重新吸引了研究者的注意力。某些热机械问题的模型需要描述诸如相变和滞环等非线性现象, 而有些则可能只是一些简单的线性模型, 但一个共同的现象就是机械场和热场之间的耦合。这些模型存在于许多能发生固体相变的复杂材料中, 或者热弹性动力学中的接触问题。

无论一个特定的热弹性问题是非线性的, 如形状记忆合金中的相关问题<sup>[3,4]</sup>, 或是线性的, 如许多实际应用的线性材料<sup>[2], [5]</sup>, 通常人们感兴趣的是该问题的动态行为, 而不是静态行为。为对许多复杂的热弹性耦合问题的动态行为进行求解, 就必须采用一种能广泛适用于不同动态荷载的有效的数值方法。近来, 对线性耦合问题, 已有一些有效的算法, 有些甚至能求解非线性问题<sup>[3], [6-8]</sup>。然而, 这些算法都是基于一维情况的, 将这些算法推广到高维情况并

\* 收稿日期: 2005\_09\_19; 修订日期: 2006\_06\_17

作者简介: 王林翔(1971-), 男, 副教授, 博士(E-mail: Wanglinxinang@mci.sdu.dk)。

不是一件容易的事<sup>[8~10]</sup>。对于高维的问题,很少有文献报道。在文献[11]中,边界积分法被用于对弹性板理论的求解,文献[12]中,一种奇异积分法被用于进行二维和三维瞬态热传导问题的分析,而在文献[13]中,拉普拉斯变换和傅里叶变换被应用于一个二维热弹性问题的研究。在数值分析方面,边界元方法也被应用于热弹性问题的分析<sup>[12]、[14]、[15]</sup>,这种方法也被应用于二维区域内的热冲击和机械冲击<sup>[16]</sup>。这些数值分析法都只能适用于一些特定的问题,因为变换方法和奇异积分都对适用问题的特性有特定的要求<sup>[12~14]</sup>。

因此,为求解热弹性耦合问题的动态行为,并使求解过程易于推广到更加复杂的模型,本文提出了一种有效的数值方法。本文的讨论将集中于二维问题,其基本思路是基于原始微分方程的降阶,在所得到的微分代数系统中,应力应变关系被保留为一组代数方程,其方法与文献[3]、文献[6]中的方法相类似。向后差分方法被用于对微分代数系统的求解。这种方法可以方便地用统一的数值方法对不同的热机械问题进行求解。以上所述的方法在此文中针对二维瞬态的热弹性问题进行了详细说明。这一问题在此文中被用作一个例子,来测试该方法求解更加复杂的热机械问题的能力,如带有记忆性质的材料中的相变问题。

## 1 热机械问题的动力学方程

热弹性耦合问题的动力学数学模型是基于动量和能量守恒原理。一般而言,描述热机械互相作用的系统方程可以写成如下形式<sup>[6]、[17]</sup>

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \text{div} \sigma + f_i, & i, j = 1, 2, 3, \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} - \text{div} \tau + \text{div} q = g, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\rho$  是材料密度,  $\mathbf{u} = \{u_i\} |_{i=1,2,3}$  为位移矢量,  $\mathbf{v}$  为速度,  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$  为应力张量,  $\mathbf{q}$  为热流量,  $e$  为内能,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$  和  $g$  分别为机械荷载和热荷载。设  $\phi$  为方程(1)所描述的热机械系统的自由能函数,则应力张量和内能可以通过下式与自由能函数联系起来

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \quad e = \phi - \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad (2)$$

其中  $\theta$  为温度,柯西-拉格朗日应变张量  $\eta$  可以写成如下的分量形式(指标循环约定)

$$\eta_{ij}(\mathbf{x}, t) = \left[ \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right] \Bigg|_2, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

其中  $\mathbf{x}$  为物质点在所考虑区域内的坐标。

依赖于  $\phi$  的适当选择。模型(1)~模型(3)可以有效地描述线性的或非线性的热机械问题,甚至复杂如固体材料的滞环和相变问题<sup>[4]</sup>。然而,一般而言,对复杂材料中热机械耦合问题的动力学描述,人们的理解仍然有限,尤其是对高维情况。在这类问题的数学处理中,其难点在于自由能对机械场和热场的非线性依赖,而这种依赖性对于实际问题来说只能通过实验进行检验。

在下面的讨论中,我们假设只须考虑一个二维的热弹性问题。为数值处理的方便起见,系统(1)重新写成如下形式的偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = v_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = v_2, \\ \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + f_1, \quad \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + f_2, \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} - \sigma^T : (\dot{\cdot} \cdot v) + \dot{\cdot} \cdot q = g \end{cases} \quad (4)$$

上述方程可以看作绝大多数二维热机械问题的通用模型, 只要给定不同的应力-应变本构方程。不同的问题, 有不同的自由能函数, 从而有不同的本构方程。在下面一节中, 我们将采用微分代数方法求解系统(4), 并用一个非耦合的和一个耦合的热弹性问题的求解来检验方法的有效性。

## 2 二维有限域内热弹性耦合问题的数学模型

对于二维的热弹性问题, 我们需要本构方程来使模型闭合。根据方程(2), 可以选择如下的自由能函数

$$\phi = -C_v \theta \ln \theta + \frac{1}{2} a_1 e_1^2 + \frac{1}{2} a_2 e_2^2 + \frac{1}{2} a_3 e_3^2 + a_0 \theta e_2 \quad (5)$$

其中  $C_v$  为材料的比热,  $a_i, i = 1, 2, 3$  和  $a_0$  为物质常数。  $e_1, e_2, e_3$  分别为体应变, 偏应变和切应变, 其定义分别如下

$$\begin{cases} e_1(x, y, t) = (\eta_{11} + \eta_{22}) / \sqrt{2}, \\ e_2(x, y, t) = (\eta_{11} - \eta_{22}) / \sqrt{2}, \\ e_3(x, y, t) = (\eta_{12} + \eta_{21}) / 2. \end{cases} \quad (6)$$

上述的自由能函数只是文献[10]和文献[18]~文献[20]中所用的自由能函数的一个简化。在上述文献中, 相变是其兴趣所在。对于本文所考虑的热弹性问题, 考虑的重点是热场和机械之间的耦合问题, 而并不考虑相变。因而, 自由能函数中只保留应变的平方项。机械场和热场的耦合简化成温度和应变偏导数的乘积形式。采用这一自由能函数, 系统(4)可以最终写成如下形式

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = v_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = v_2, \\ \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + f_1, \quad \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + f_2, \\ C_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + a_0 \theta \frac{\partial e_2}{\partial t} + g, \\ \sigma_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} a_0 \theta, \\ \sigma_{12} = \frac{1}{2} a_3 e_3, \\ \sigma_{22} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} a_0 \theta. \end{cases} \quad (7)$$

在上述方程中, 如果选择相应的物质常数如下

$$a_1 = \sqrt{2} \mu, \quad a_2 = \sqrt{2}(\lambda + \mu), \quad a_0 = -\sqrt{2} \nu, \quad a_3 = a_1 \quad (8)$$

则系统(7)可以写成如下形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = v_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = v_2, \\ \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + f_1, \quad \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + f_2, \\ C_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \theta \gamma \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right), \\ \sigma_{11} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - \gamma \theta, \\ \sigma_{12} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right), \\ \sigma_{22} = -\mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - \gamma \theta, \end{array} \right. \quad (9)$$

其中  $\lambda, \mu$  为拉姆系数,  $\gamma$  为应力-温度模量(与耦合系数有关), 显然, 系统(9)的所有方程中, 除能量平衡方程外(非线性的耦合项), 均为线性的。为了方便与其它文献之间的比较, 在此处, 对此非线性项进行线性化, 用选定的参考温度  $\theta_0$  替换依赖于时间的温度值  $\theta(t)$ , 这样处理以后可以使系统(9)与文献[4]、文献[5]、文献[16]、文献[21]、文献[22]中研究的二维线性热弹性问题完全一致。值得注意的是, 方程组(9)是一个混合系统, 包括了双曲型方程和抛物型方程。应力-应变本构方程在此系统中被处理成应变-温度的代数方程。这一处理方式使得我们的数值方法可以直接应用于绝大多数的热机械问题, 而需要进行的修改非常小。

### 3 控制方程的数值离散

尽管系统(9)是通用的热机械问题经过很多的简化后得到的, 它的解析解却仍然只能对少数的几个已知的非耦合的热弹性问题进行求解<sup>[21, 22]</sup>。并将此作为检验我们的数值方法的第1个示例。在考虑数值离散之前, 我们用下面的变量对系统(9)进行规一化,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = x/\alpha, \quad \hat{t} = tC_1/\alpha, \quad \hat{\sigma}_j = \sigma_j/(\gamma\theta_0), \quad \hat{\theta} = (\theta - \theta_0)/\theta_0, \\ \hat{u}_i = (\lambda + 2\mu)u_i/(\alpha\lambda\theta_0), \quad \hat{v}_i = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{t}}, \quad \hat{f}_i = \frac{\alpha}{\gamma\theta_0}f_i, \end{array} \right. \quad (10)$$

其中  $\alpha = k/\rho C_v C_1$  为无量纲长度单位,  $C_1 = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}$  为横波的传播速度,  $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\beta$ ,  $\beta$  为热膨胀系数。通过这一变量替换, 系统(9)经重新整理后可写成(略去上标)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = v_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = v_2, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + f_1, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + f_2, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{\theta_0 \gamma^2}{\rho C_v (\lambda + 2\mu)} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right), \\ \sigma_{11} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} - \theta, \\ \sigma_{12} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right), \\ \sigma_{22} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} - \theta. \end{array} \right. \quad (11)$$

经过离散化后, 系统(11)可以写成如下形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_{1,\bar{j}}(t)}{dt} = v_{1,\bar{j}}(t), \quad \frac{du_{2,\bar{j}}(t)}{dt} = v_{2,\bar{j}}(t), \\ \frac{dv_{1,\bar{j}}(t)}{dt} = D_x(\sigma_{11,ij}) + D_y(\sigma_{12,\bar{j}}) + f_1, \\ \frac{dv_{2,\bar{j}}(t)}{dt} = D_x(\sigma_{12,ij}) + D_y(\sigma_{22,\bar{j}}) + f_2, \\ \frac{d\theta_{\bar{j}}(t)}{dt} = D_{xx}(\theta_{\bar{j}}) + D_{yy}(\theta_{\bar{j}}) - \frac{\theta_0 \gamma^2}{\rho C_v(\lambda + 2\mu)}(D_x(v_{1,ij}) + D_y(v_{2,ij})), \\ 0 = -\sigma_{11,ij} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} D_y(u_{2,ij}) + D_x(u_{1,ij}) - \theta_{\bar{j}}, \\ 0 = -\sigma_{12,ij} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} D_y(u_{1,ij}) + D_x(u_{2,ij}), \\ 0 = -\sigma_{22,ij} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} D_x(u_{1,ij}) + D_y(u_{2,ij}) - \theta_{\bar{j}}, \end{array} \right. \quad (12)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, m_x; j = 1, 2, \dots, m_y$ , 而  $m_x$  和  $m_y$  分别为沿  $x$  和  $y$  方向离散的网格数;  $z_{ij}(t)$  代表函数  $z$  在网格点  $(x_i, y_j)$  在时刻  $t$  的值 ( $z$  代表 8 个待求未知量中的任一个) •  $D_x(D_y)$  和  $D_{xx}(D_{yy})$  分别为一阶和二阶中心差分算子 •

为方便起见, 系统(12)改写成如下的矩阵形式

$$A \frac{dU}{dt} + H(t, X, U) = 0, \quad (13)$$

其中  $U = [u_1, v_1, u_2, v_2, \theta, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}]^T$  为一个矢量, 它集合了我們所要求解的所有的未知量, 其中  $u_1$  为所有网格点上的位移  $u_1$  值的子矢量, 其它子矢量的组成也与此类似 • 矩阵  $A = \text{diag}(m_{u_1}, m_{v_1}, m_{u_2}, m_{v_2}, m_\theta, m_{\sigma_{11}}, m_{\sigma_{12}}, m_{\sigma_{22}})$  为所有未知量的导数项的乘数 •  $m_{u_1}$  是单位矩阵, 因为  $\partial u_1 / \partial t$  项的乘数均为 1, 其它的子矩阵  $m_{v_1}, m_{u_2}, m_{v_2}$  和  $m_\theta$  也都是单位矩阵 • 显然那些与应力分量相应的子矩阵  $m_{\sigma_{11}}, m_{\sigma_{12}}, m_{\sigma_{22}}$  均为 0, 因为方程中不含这些项的时间导数项 •  $H = [H_{u_1}, H_{v_1}, H_{u_2}, H_{v_2}, H_\theta, H_{\sigma_{11}}, H_{\sigma_{12}}, H_{\sigma_{22}}]^T$  为一矢量, 它集合了由空间离散化而得到的关于各未知量的代数函数, 其中  $H_{u_1}$  集合了所有离散结点的关于  $u_1$  (不包含导数项) 的代数方程, 显然, 根据方程(12)的第 1 行, 可以知道  $H_{u_1} = -v_1$  •  $H$  中的其它子矢量可以通过类似的方法得到 •

很显然,  $A$  是一个奇异矩阵, 因而所得的系统(13)是一个强奇异性系统, 须选用隐式算法进行时间域内的积分 • 此处, 我们采用二阶向后差分公式, 其中的时间导数项用二阶向后差分格式进行逼近

$$A \left[ \frac{3}{2} U^n - 2 U^{n-1} + \frac{1}{2} U^{n-2} \right] + \Delta t H(t_n, X, U^n) = 0, \quad (14)$$

其中  $n$  代表当前时间 • 在每一时间上, 我们可以将上面的代数系统整理成下式

$$\Delta t H(t_n, X, U^n) + \frac{3}{2} A U^n = A \left[ -2 U^{n-1} + \frac{1}{2} U^{n-2} \right], \quad (15)$$

其中  $U^{n-1}$  和  $U^{n-2}$  已知 • 至此原系统被转换成为一个非线性的代数方程, 并应用牛顿迭代法求得  $U^n$  •

#### 4 微分代数方法求瞬态热机械问题

我们将第 3 节中描述的数值方法应用于固体材料中的众多热机械相互作用的问题 • 在本

节中,我们考虑这方面的两个示例。第1个示例,作为算法检验的一部分,应用于一个解析解已知的二维热弹性问题。第2个示例则是针对一般情况,考察一个包括任意热机械载荷的热弹性板。第2个示例将包括充分耦合的依赖时间热弹性问题。

#### 4.1 热弹性瞬态问题:数值结果与解析解的比较

首先,我们考虑一个单位面积的方形板,如图1(a)中所示。板在初始时刻的温度和位移均为0,在板的一条边上有一突加的热荷载。我们假设只考虑平面应变,板的另外3条边均绝热,且法向位移为0。这一问题是系统(11)的一个特例,其稳态可以用如下的一组方程描述

$$\begin{cases} \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial \theta}{\partial x} + f_1 = 0, \\ \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \theta}{\partial y} + f_2 = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + g. \end{cases} \quad (16)$$

系统(16)可以先用一种非耦合的方法求解热传导方程,然后在运动方程中代入温度。在没有外加热机械荷载的情况下( $f_1 = f_2 = g = 0$ ),其解析解是可以求得的。此解析解可以用来与微分代数方法得到的数值解进行比较。为此,选择如下的材料系数  $\lambda = 0.38461 \text{ kg/ms}^2$ ,  $\mu = 0.576923 \text{ kg/ms}^2$ ,  $\beta = 0.02/K$ , 其它的相关参数均见表1。对此例,我们只对  $y$  方向的变量感兴趣。根据文献[15]和文献[22],解析解为

$$\begin{cases} \theta(y, t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left[-\frac{(2n+1)\pi^2 t}{4}\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi y}{2}\right], \\ u_2(y, t) = \frac{(1+\nu)\beta}{(1-\nu)} \int_0^y \theta(y, t) dy, \\ \sigma_{22}(y, t) = -\frac{\beta E}{(1-\nu)} \theta(y, t). \end{cases} \quad (17)$$

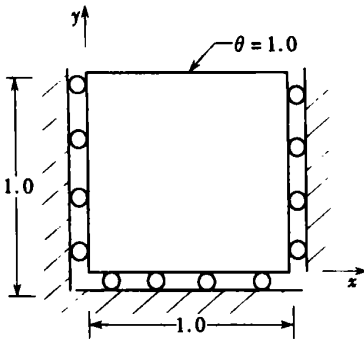
据此,我们可将数值方法所得结果与上式进行比较。注意由于对称性,各变量在  $x$  方向的分布是不变的,这一事实也反映在式(17)中。系统(16)采用了  $11 \times 14$  的网格进行了离散化,时间步长为  $2 \times 10^{-3}$ ,计算结果列于图1中。图1(b)给出了方板底边中点处的温度变化,图1(c)给出了顶边中点处的  $y$  方向的位移变化,而图1(d)则给出了板中心的横向应力  $\sigma_{22}$ 。从图1可知,用数值方法得到的结果与解析解之间差异非常小,以致不能分辨。

表1 数值实验采用的无量纲参数和热机械荷载

参数	数值	参数	数值
$C = \theta_0 \nu^2 / (\beta_e (\lambda + 2\mu))$	0.01	$(M / (\lambda + 2\mu))$	0.3
$\mu / (\lambda + 2\mu)$	0.4	时间区间	$t \in [0, 6]$
在 $x$ 轴上的节点数	41	在 $y$ 轴上的节点数	21
时间步长	0.005	情况1的荷载	$\theta(t) = 5te^{-2t}, \sigma_n = 0$
情况2的荷载	$\sigma_{11}(t) = 5te^{-2t},$ $\partial \theta / \partial x = 0$	情况3的荷载	$\sigma_{11}(t) = 5te^{-2t},$ $\theta(t) = 5te^{-2t}$

#### 4.2 充分耦合的热弹性问题

在此,我们考察一个带有热机械荷载的充分耦合的热弹性动力学问题。一个有如下边界条件的方形板,如图2(a)所示



(a) 基本几何条件

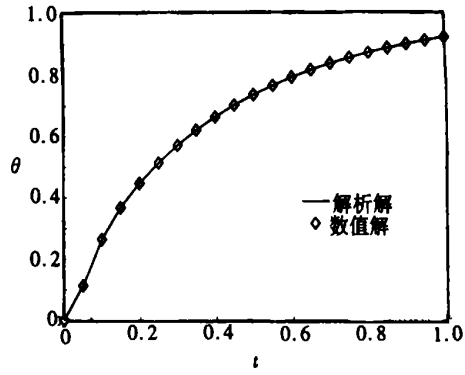
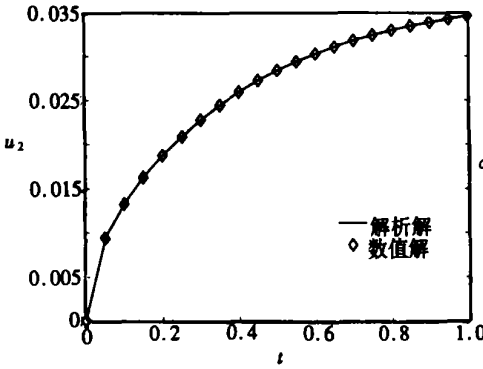
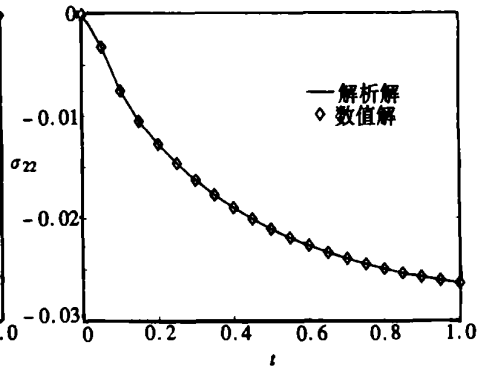
(b)  $y = 0$  处温度分布的比较(c)  $y = 1$  处位移分布的比较(d)  $y = 0.5$  处应力分布的比较

图1 突然加热的二维热弹性动力学问题的数值解与解析解比较

$$u_1 = u_2 = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad x = 10; \quad (18)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad y = \pm 5, \quad (19)$$

初始条件与示例1中相同。采用模型(11), 对此一问题进行了一系列的数值模拟。在  $x = 0$  处的边界条件, 取决于我们所进行的不同模拟, 将在相应的说明中给出。为了方便对充分耦合和无耦合情况下的数值结果进行对照, 我们引入如下的修正的耦合系数

$$C = \frac{\theta_0 \gamma^2}{\rho c_v (\lambda + 2\mu)}, \quad (20)$$

其它的参数值及情况1情况3的热机械加载方式均列于表1中。以下所得的结果将与已知的边界元法的结果进行了比较<sup>[4], [16]</sup>, (这也是我们在此选择  $l = 10$  的原因), 在文献[4]和文献[16]中, 沿  $x$  方向为半无限域, 沿  $y$  方向为无限域。根据系统(11), 我们共求解8个未知量: 2个位移分量, 2个速度分量, 3个应力分量, 还有一个温度场。下面我们给出三种不同的热机械荷载情况下的温度、位移和应力的数值结果。

情况1 仅受热冲击 在此例中, 方板在  $x = 0$  边上有一个热冲击荷载, 而在该边上位移的法向导数为0。所施加的热冲击荷载是时间的函数, 见表1。应用这些条件, 我们可以用数值方法求解我们所感兴趣的位移分量  $u_1$ , 应力分量  $\sigma_{11}$  和温度  $\theta$ , 它们都是依赖于  $x$  和  $t$  的函数。图2中给出了无量纲时间  $t = 3$  和  $t = 6$  时的数值结果。图2(b)所示为沿  $x$  轴的位移值

分布。由于热场和机械场之间的耦合关系,热冲击荷载对位移的影响非常明显。图 2(c) 中,我们给出了耦合和无耦合情况下的温度分布。我们再一次看到,由于耦合的影响,温度的分布及其梯度都很不同,在有耦合梯度更大。最后,在图 2(d) 中,我们给出沿  $x$  轴的应力分布。在两个选取的时间( $t = 3$  和  $t = 6$ ), 尽管我们采用的离散点数不是很多,波的传播都被清晰地显现。应力波动的幅值在有耦合的情况下时要小一些,这是由于与热场之间的耦合而产生的阻尼效果。在所考虑的这种情况中,耦合现象所起的作用类似于一个阻尼器。

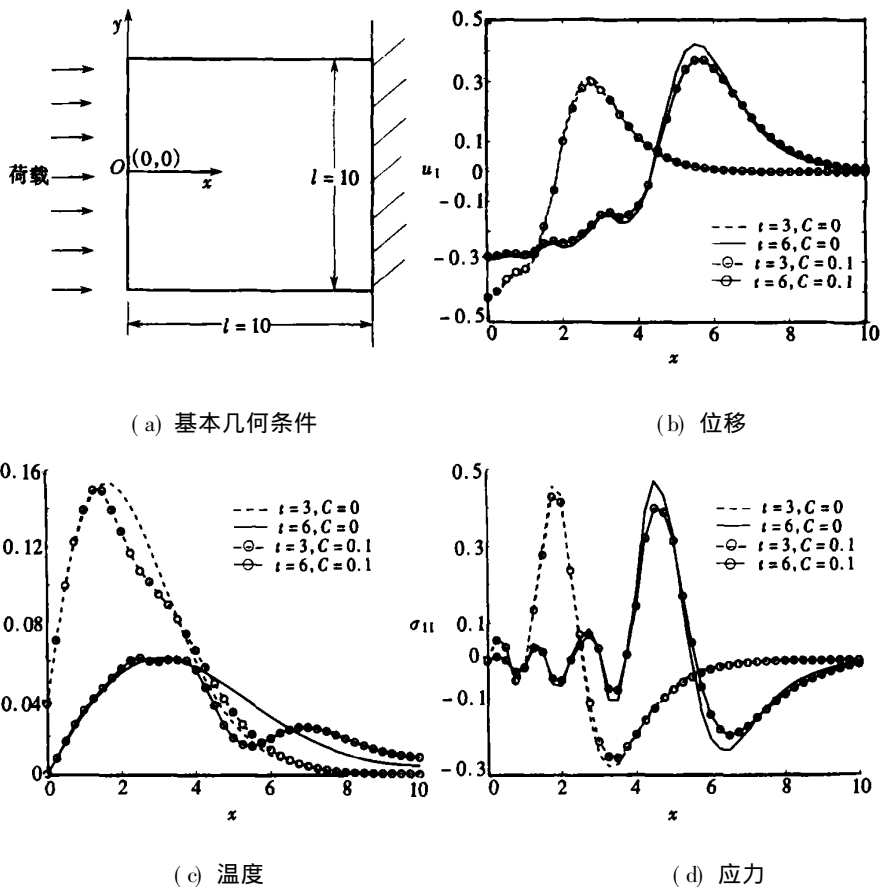
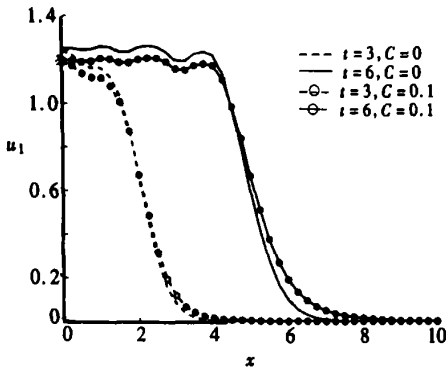


图 2 受热荷载作用的二维无量纲热弹性动力学问题的数值结果与解析解比较

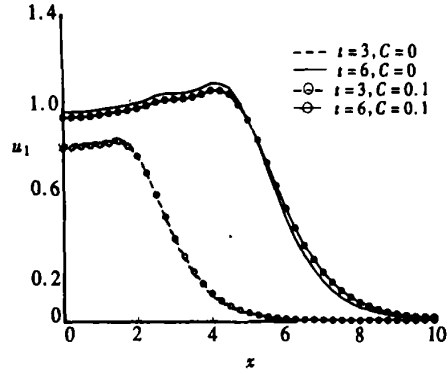
情况 2 机械冲击荷载 我们再考察在同一板中,由一个依赖于时间的压力冲击荷载引起的热机械相互作用和能量转换。我们在  $x = 0$  边上施加一个依赖于时间的法向应力,且让此边绝热,同时使  $u_2$  在此边上的法向导数为 0。(详细参数见表 1)。数值结果列于图 3(a)~图 3(c)。分析不同时间的位移(图 3(a))和应力(图 3(c)),考察的热机械问题在有耦合和无耦合情况时的时间变化特征。对于温度场,在无耦合时,因为没有能量直接输入,也没有能量转化成热能,因而温度保持为 0。而对于存在耦合的情况,则不是这样(图 3(b))。而且温度分布中的峰值随应力分布中的峰值同步发展,这显然是因耦合而导致的。

情况 3 组合的热机械冲击 在此情况中,我们在  $x = 0$  边上施加一个机械荷载和一个热荷载(见表 1)。正如我们所预计的,由此所得的结果是情况 1 和情况 2 中所得结果的叠加,这可以由图 3(d)~图 3(f) 看出。最后我们指出,耦合现象会加快热扩散(图 3(e))。这同样也可以从模型中预计到,因为在波的前沿附近热机械场之间的能量转换最为显著。

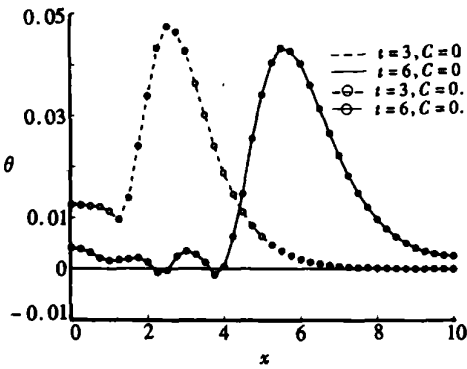




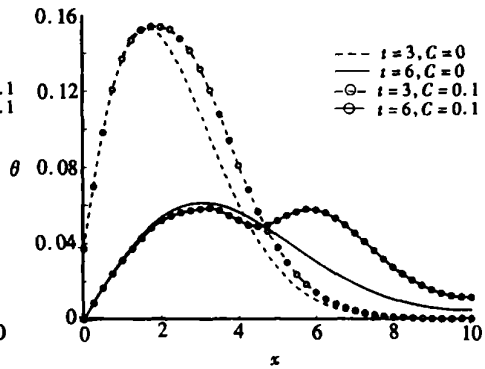
(a) 压力冲击下的位移分布



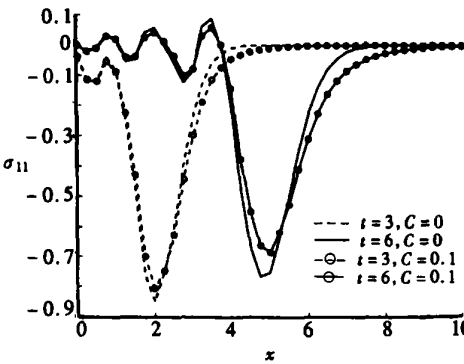
(d) 耦合热机械冲击下的位移分布



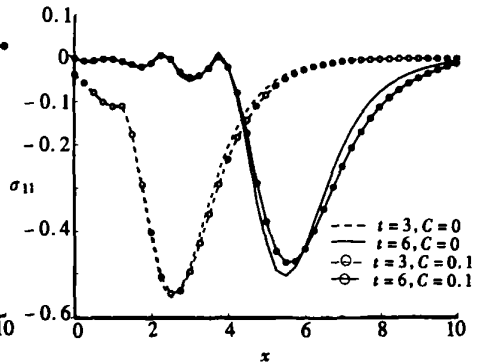
(b) 压力冲击下的温度分布



(e) 耦合热机械冲击下的温度分布



(c) 压力冲击下的应力分布



(f) 耦合热机械冲击下的应力分布

图3 受机械荷载和热机械荷载作用的二维热弹性动力学问题的数值结果与解析解比较

## 6 结 论

本文中,提出了用微分代数方法对一般的热机械动力学问题进行研究。这一方法在二维热弹性问题上进行了检验。用此方法得到的数值结果与已知的解析解进行了比较,对充分耦合的二维热弹性问题的数值结果与边界元方法的结果也进行了比较。研究表明,微分代数方法对热弹性问题的动力学分析是有效的。从推导过程可以看出,对不同的热机械问题,只须修

正相应的代数方程, 这使得此方法可以应用于许多情况。同时, 本文也表明应力边界条件可以很容易地实现, 因为应力应变关系被保留在模型中。

### [参 考 文 献]

- [1] Melnik R V N. Convergence of the operator difference scheme to generalised solutions of a coupled field theory problem[ J]. J. Difference Equations Appl, 1998, **4**(2): 185—212.
- [2] Melnik R V N. Discrete models of coupled dynamic thermoelasticity for stress temperature formulations[ J]. Appl Math Comput, 2001, **122**(1): 107—132.
- [3] Melnik R V N, Roberts A J, Thomas K A. Coupled thermomechanical dynamics of phase transitions in shape memory alloys and related hysteresis phenomena[ J]. Mechanics Research Communications, 2001, **28**(6): 637—651.
- [4] Melnik R V N, Roberts A J, Thomas K A. Phase transitions in shape memory alloys with hyperbolic heat conduction and differential algebraic models[ J]. Computational Mechanics, 2002, **29**(1): 16—26.
- [5] Strunin D V, Melnik R V N, Roberts A J. Coupled thermomechanical waves in hyperbolic thermoelasticity[ J]. J Thermal Stresses, 2001, **24**(2): 121—140.
- [6] Melnik R V N, Roberts A J, Thomas K A. Computing dynamics of copper based SMA via center manifold reduction of 3D models[ J]. Computational Material Science, 2000, **18**(3/4): 255—268.
- [7] Niezgodka M, Sprekels J. Convergent numerical approximations of the thermomechanical phase transitions in shape memory alloys[ J]. Numer Math, 1991, **58**: 759—778.
- [8] Rawy E K, Iskandar L, Ghaleb A F. Numerical solution for a nonlinear, one dimensional problem of thermoelasticity[ J]. J Comput Appl Math, 1998, **100**(1): 53—76.
- [9] Abd\_Alla A N, Ghaleb A F, Maugin G A. Harmonic wave generation in nonlinear thermoelasticity[ J]. Internat J Engrg Sci, 1994, **32**(7): 1103—1116.
- [10] Jiang S. Numerical solution for the Cauchy problem in nonlinear 1\_D thermoelasticity[ J]. Computig, 1990, **44**(2): 147—158.
- [11] Abou\_Dina M S, Ghaleb A F. On the boundary integral formulation of the plane theory of elasticity with applications (analytical aspects) [ J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999, **106**(1): 55—70.
- [12] Yang M T, Park K H, Banerjee P K. 2D and 3D transient heat conduction analysis by BEM via particular integrals[ J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2002, **191**(15/16): 1701—1722.
- [13] Sherief H H, Megahed F A. A two dimensional thermoelasticity problem for a half space subjected to heat sources[ J]. Internat J Solids and Structures, 1999, **36**(9): 1369—1382.
- [14] Banerjee P K. The Boundary Element Methods in Engineering [ M]. London: McGraw\_Hill, 1994, 1—100.
- [15] Park K H, Banerjee P K. Two and three dimensional transient thermoelastic analysis by BEM via particular integrals[ J]. Internat J Solids and Structures, 2002, **39**: 2871—2892.
- [16] Hosseini\_Tehrani P, Eslami M R. BEM analysis of thermal and mechanical shock in a two dimensional finite domain considering coupled thermoelasticity[ J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 2000, **24**(3): 249—257.
- [17] Pawlow I. Three dimensional model of thermomechanical evolution of shape memory materials[ J]. Control and Cybernetics, 2000, **29**(1): 341—365.
- [18] Ichitsubo T, Tanaka K, Koiva M, et al. Kinetics of cubic to tetragonal transformation under external

- field by the time\_dependent Ginzburg\_Landau approach[J]. Phys Rev B, 2000, **62**(9): 5435—5441.
- [19] Jacobs A E. Solitons of the square\_rectangular martensitic transformation[J]. Phys Rev B, 1985, **31**(9): 5984—5989.
- [20] Jacobs A E. Landau theory of structures in tegralonal\_orthorhombic ferroelastics[J]. Phys Rev B, 2000, **61**(10): 6587—6595.
- [21] Chen J, Dargush G F. BEM for dynamic poroelastic and thermoelastic analysis[J]. J Solids Struct, 1995, **32**(15): 2257—2278.
- [22] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity [M]. 3rd edition. New York McGraw\_Hill, 1970, 421—480.
- [23] Hairer E, Norsett S P, Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II —Stiff and Differential Algebraic Problems [M]. Berlin: Springer\_Verlag, 1996, 210—250.
- [24] Jiang S. On global smooth solutions to the one\_dimensional equations of nonlinear inhomogeneous thermoelasticity[J]. Nonlinear Analysis, 1993, **20**(10): 1245—1256.

## Differential\_Algebraic Approach to Coupled Problems of Dynamic Thermoelasticity

WANG Lin\_xiang<sup>1</sup>, Roderick V. N. Melnik<sup>2</sup>

(1. MCI, Faculty of Science and Engineering, University of Southern Denmark,  
Sonderborg, DK\_6400, Denmark;

2. Center for Coupled Dynamics & Complex Systems, Wilfrid Laurier University,  
75 University Avenue West, Waterloo, ON, Canada, N2L 3C5)

**Abstract:** An efficient numerical approach for the general thermomechanical problems was developed and it was tested for a two\_dimensional thermoelasticity problem. The main idea of the numerical method is based on the reduction procedure of the original system of PDEs describing coupled thermomechanical behavior to a system of Differential Algebraic Equations (DAEs) where the stress\_strain relationships are treated as algebraic equations. The resulting system of DAEs were then solved with a Backward Differentiation Formula (BDF) using a fully implicit algorithm. The described procedure was explained in detail. And its effectiveness was demonstrated on the solution of a transient uncoupled thermoelastic problem, for which an analytical solution is known, as well as on a fully coupled problem in the two\_dimensional case.

**Key words:** thermoelasticity; two\_dimensional; differential\_algebraic solvers