

# 杜芬方程的 $1/3$ 纯亚谐解及过渡过程的 分形特征研究\*

徐玉秀<sup>1</sup>, 胡海岩<sup>2</sup>, 闻邦椿<sup>3</sup>

- (1. 天津工业大学 机械电子学院 天津 300160;  
2. 南京航空航天大学 振动工程研究所, 南京 210016;  
3. 东北大学 机械自动化学院, 沈阳 110006)

(李继彬推荐)

**摘要:** 通过谐波平衡法和数值积分法研究了杜芬方程的  $1/3$  纯亚谐解。提出假设解, 找出了亚谐频域, 并对参数变化的过渡过程的敏感性和初始值扰动的过渡过程进行了研究。考察了亚谐响应幅值系数对阻尼的敏感性, 及亚谐振动谐波成分的渐近稳态性。此外, 运用广义分形理论对杜芬方程纯亚谐解过渡过程进行了分析。分析表明, 广义维数的敏感维数能清楚地描述杜芬方程纯亚谐解过渡过程特征; 并对改变初始扰动、阻尼系数、激励幅值情况下, 其两个不同频域的杜芬方程纯亚谐解过渡过程的不同分形特性显现出敏感性。

**关键词:** 杜芬方程; 纯亚谐解; 过渡过程; 分形特征; 敏感维数

**中图分类号:** O322      **文献标识码:** A

## 引言

在动力学系统的建模中, 很多非线性动力学系统的控制方程都可简化带有简谐激励的杜芬方程。对此非线性方程难于给出纯分析解, 因此, 找出适合的近似方法研究杜芬方程的  $1/3$  纯亚谐解的稳定性、吸引性, 一直是非线性领域中所关注的问题。

分形理论用于非线性动力系统研究已有不少实例, 常用的方法是计算振动波形的各种分形维数, 用其作为特征参量对系统的振动特性进行定量刻画, 从而对系统的内在特性进行分析。本文在文献[1]的基础上, 用广义分形理论进行定量刻画在一定参数条件下, 有阻尼杜芬方程的强迫振动解的过渡过程的稳定性及分形特征, 这是对杜芬方程的非线性系统动力学特性研究的新尝试。

## 1 杜芬方程的纯亚谐解

### 对无阻尼的杜芬方程

\* 收稿日期: 2005\_04\_05; 修订日期: 2006\_04\_13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50275024); 国家外专局与德国巴登府德堡州合作项目(20020324)

作者简介: 徐玉秀(1958—), 女, 山东省崂山人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86\_22\_24528673; E\_mail: xuyu@tjpu.edu.cn)。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + hx^3 = g \cos \Omega t, \quad (1)$$

存在着一个  $1/3$  纯亚谐波

$$x(t) = A \cos(\Omega/3)t \quad (2)$$

式(2)中的参数必须满足下列条件

$$A = \sqrt[3]{4g/h}, \quad \Omega = 3\sqrt{\omega_0^2 + 3hA^2/4}, \quad (3)$$

对给定的系统参数  $\omega_0 = 1, h = 1, g = 2$ , 由式(3)可得:  $A = 2, \Omega = 6$

对于给定的初始值:  $X_0 = (A, 0)^T = (2, 0)^T$ , 通过数值积分计算纯亚谐波.

## 2 用谐波平衡法分析和研究过渡过程

虽然, 对于无阻尼的杜芬方程可给出一个解析解, 但实际系统总是有阻尼的. 因此, 引入小阻尼  $\delta$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + hx^3 = g \cos \Omega t, \quad (4)$$

上述方程无分析解<sup>[2]</sup>. 由文献[1]可知: 方程(4)不仅有谐波解, 还存在着纯亚谐波, 为此假设解为

$$x(t) = a_1(t) \cos \alpha + b_1(t) \sin \alpha + a_{1/3}(t) \cos \beta + b_{1/3}(t) \sin \beta, \quad (5)$$

其中  $\alpha = \Omega, \beta = \gamma, \gamma = \Omega/3$

将假设解(5)代到方程(4)后, 就得到关于幅值参数的一个非线性微分方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{a}_1 + 2\delta\dot{a}_1 + 2\delta\dot{b}_1 + \omega_0^2 a_1 - \Omega^2 a_1 + 2\delta\Omega b_1 - g + \\ h \left[ \frac{3}{4} a_1^3 + \frac{3}{4} a_1 b_1^2 + \frac{1}{4} a_{1/3}^3 + \frac{3}{2} a_1 a_{1/3}^2 + \frac{3}{2} a_1 b_{1/3}^2 - \frac{3}{4} a_{1/3} b_{1/3}^2 \right] = 0, \\ \ddot{b}_1 - 2\delta\dot{a}_1 + 2\delta\dot{b}_1 + \omega_0^2 b_1 - \Omega^2 b_1 - 2\delta\Omega a_1 + \\ h \left[ \frac{3}{4} b_1^3 - \frac{1}{4} b_{1/3}^3 + \frac{3}{4} a_1^2 b_1 + \frac{3}{2} b_1 a_{1/3}^2 + \frac{3}{2} b_1 b_1^2 + \frac{3}{4} a_{1/3}^2 b_{1/3} \right] = 0, \\ \ddot{a}_{1/3} + \frac{3}{2} \Omega \dot{b}_{1/3} + 2\delta\dot{a}_{1/3} + \omega_0^2 a_{1/3} - \frac{1}{9} \Omega^2 a_{1/3} + \frac{2}{3} \delta \Omega b_{1/3} + \\ h \left[ \frac{3}{4} a_{1/3}^3 + \frac{3}{2} a_1^2 a_{1/3} + \frac{3}{4} a_1 a_{1/3}^2 - \frac{3}{4} a_1 b_{1/3}^2 + \frac{3}{2} b_1^2 a_{1/3} + \right. \\ \left. \frac{3}{2} b_1 a_{1/3} b_{1/3} + \frac{3}{4} a_{1/3} b_{1/3}^2 \right] = 0, \\ \ddot{b}_{1/3} + 2\delta\dot{a}_{1/3} - \frac{2}{3} \Omega \dot{a}_{1/3} + \omega_0^2 b_{1/3} - \frac{1}{9} \Omega^2 b_{1/3} - \frac{2}{3} \delta \Omega a_{1/3} + \\ h \left[ \frac{3}{4} b_{1/3}^3 + \frac{3}{2} a_1^2 b_{1/3} - \frac{3}{2} a_1 a_{1/3} b_{1/3} + \frac{3}{2} b_1^2 b_{1/3} + \frac{3}{4} b_1 a_{1/3}^2 + \right. \\ \left. \frac{3}{4} a_{1/3}^2 b_{1/3} - \frac{3}{4} b_1 b_{1/3}^2 \right] = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

要解这个微分方程组, 需 8 个初始值:  $a_1(0), b_1(0), a_{1/3}(0), b_{1/3}(0), \dot{a}_1(0), \dot{b}_1(0), \dot{a}_{1/3}(0), \dot{b}_{1/3}(0)$ . 对仅有的两个初始值, 即: 初始位移  $x(0) = x_0$  和初始速度  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ , 把它们代入假设解中, 导出寻找 8 个初值的两个条件方程. 采用文献[2]的迭代法, 确定其余的初始值. 用如此确定的初始值, 对方程组(6)积分, 从而得到幅值系数曲线及其解响应.

### 3 研究 $\Omega = 6, \Omega = 3.2$ 的过渡过程

由文献[1]可知,在纯亚谐解附近,用谐波平衡法对所选取的假设解仅对  $\Omega > 3.2$  才有意义。

#### 3.1 $\Omega = 6.0$ 纯亚谐响应区域的过渡过程

首先考察阻尼参数和激力幅对幅值系数的影响。在改变阻尼参数时,幅值在稳定值附近产生一个振荡的振动(图略)。在改变激力幅( $g$  分别等于 3 和 6)时,对于较大的激力幅,幅值系数在较短的时间内达到其稳态值。然后考察了初始条件的小扰动情况,其幅值系数也能较快的达到稳态值(见图 1)。

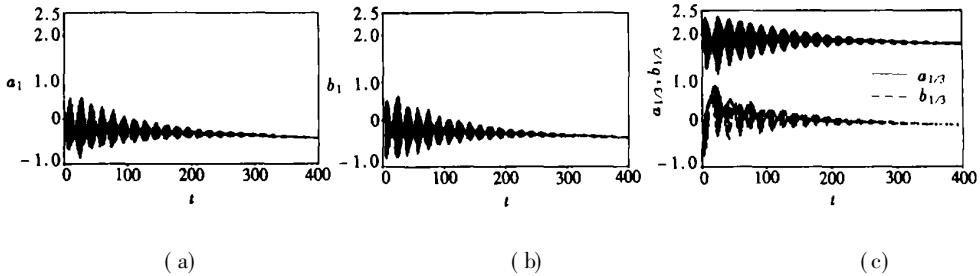


图 1  $\Omega = 6.0, \delta = 0.01, g = 2$  的诸谐波时间历程

#### 3.2 $\Omega = 3.2$ 纯亚谐响应区域的过渡过程

由文献[1]的研究可知,稳态解包含  $\Omega = 3.2$  的主谐波,对于  $\Omega = 3.2$  及改变阻尼参数下的过渡特性如图 2 所示。主谐波幅值  $a_1, b_1$  不依赖于阻尼保持常数,仅亚谐波幅值  $a_{1/3}, b_{1/3}$  的曲线产生振荡。且亚谐波幅值  $a_{1/3}, b_{1/3}$  在较大激振力幅的扰动下,经过较长时间才达到稳态值。图 3 表示了激力幅值  $g = 3$  的幅值参数的振动。

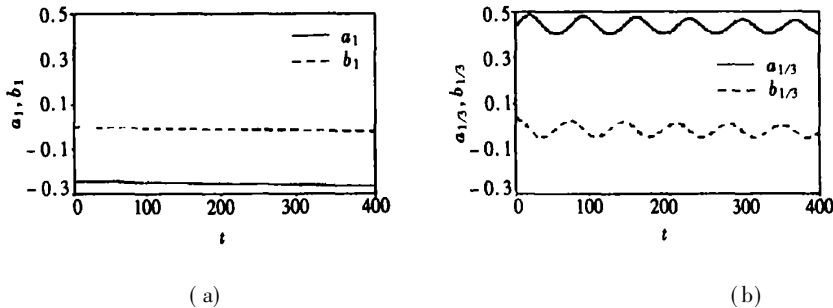


图 2  $\Omega = 3.2, \delta = 0.001, g = 2$  的诸谐波分量的时间历程

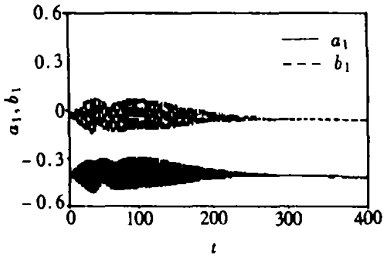
#### 3.3 谐波分量空间的考察

通过式(6)中的谐波分量  $a_1, b_1, a_{1/3}, b_{1/3}$  可展开一个四维空间。系统的过渡过程作为轨迹在这个参数空间中进行描述,见图 4、图 5。谐波系数  $a_1, b_1$  即使在参数改变的干扰下,过渡过程的波动仍很小,亚谐波系数  $a_{1/3}, b_{1/3}$  其轨迹汇集到一个奇点,这个奇点是一个渐近稳定的焦点,表征了亚谐振动的稳态解。

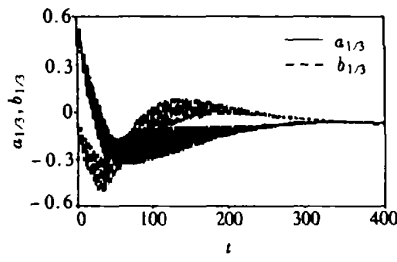
## 4 杜芬方程纯亚谐解过渡过程的分形特征

#### 4.1 广义分形的计算方法与敏感维数定义

描述多重分形的一种方法是广义维数方法,对于任意给定的  $q$ , 其广义维数的 General 信



(a)



(b)

图3  $\Omega = 3.2, \delta = 0.01, g = 3$  的诸谐波分量的时间历程

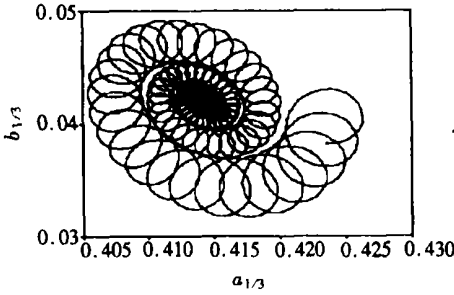


图4  $\Omega = 3.2, \delta = 0.01$  及扰动下的谐波过渡程

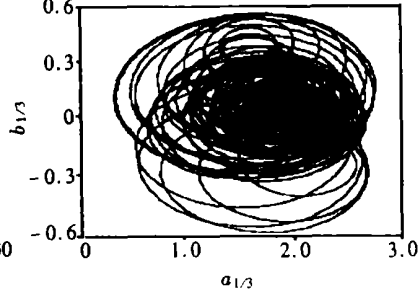


图5  $\Omega = 6.0, \delta = 0.01$  及扰动下的谐波过渡程

息熵的表达式为<sup>[3]</sup>

$$K_q(\varepsilon) = \left\{ \lg \sum_{i=1}^N (P_i)^q \right\} / (1 - q), \tag{7}$$

从而广义维数定义为

$$D_q = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lg K_q(\varepsilon) / \lg \varepsilon \tag{8}$$

由于具有不同标度指数的子集可通过  $q$  的改变进行区分。由此说明广义维数  $D_q$  包含了自相似分形理论涉及的大部分分形维数。

敏感维数定义: 对于不同  $q$  值的广义维数序列  $D_q$ , 总能找到某个  $q$  值所对应的广义维数距离最大的  $D_q$  (或广义维数曲线的极大值) 即为敏感维数。

表1  $\Omega = 6.0$  扰动下稳态解的敏感维数

| 扰动条件   | 敏感维数    |
|--------|---------|
| 初始扰动   | 0.817 7 |
| 增大初始扰动 | 0.817 7 |
| 减小阻尼系数 | 0.817 7 |
| 增大激励幅值 | 0.817 7 |
| 减小激励幅值 | 0.817 7 |

表2  $\Omega = 3.2$  扰动下稳态解的敏感维数

| 扰动条件   | 敏感维数    |
|--------|---------|
| 初始扰动   | 0.805 2 |
| 增大初始扰动 | 0.817 7 |
| 减小阻尼系数 | 0.811 0 |
| 增大激励幅值 | 0.798 6 |
| 减小激励幅值 | 0.786 2 |

### 4.2 杜芬方程纯亚谐解过渡过程的广义分形特征分析

对杜芬方程纯亚谐解过渡过程进行广义分形计算, 分别得到  $\Omega = 6.0, \Omega = 3.2, \delta = 0.01$  的广义维数谱, 如图 6、图 7 所示。从图中曲线的峰值点可确定其对应的敏感维数分别为 0.817 7; 0.805 2。对改变初始扰动、阻尼系数、激励幅值等解的过渡过程进行广义分形计算,

计算结果如表 1, 表 2 所示。

从上面的计算结果可知, 对于  $\Omega = 6.0$ , 扰动稳态解的敏感维数比  $\Omega = 3.2$  的扰动稳态解的敏感维数略大; 其纯亚谐响应在改变初始扰动、阻尼系数、激励幅值的情况下, 其过渡过程的敏感维数保持不变。对于  $\Omega = 3.2$ , 纯亚谐响应随着初始扰动、阻尼系数、激励幅值的改变, 其过渡过程的敏感维数随之改变; 敏感维数随初始扰动增大而增大; 随阻尼系数的减小而增大; 但不管增大激励幅值还是减小激励幅值敏感维数都减小。从而描述了上述两个不同频域的杜芬方程纯亚谐解过渡过程的不同特性, 这与第 3 节中讨论的过渡过程特性比较一致。

由此可见, 广义维数的敏感维数能清楚地描述杜芬方程纯亚谐解在改变初始扰动、阻尼系数、激励幅值情况下的过渡特性。

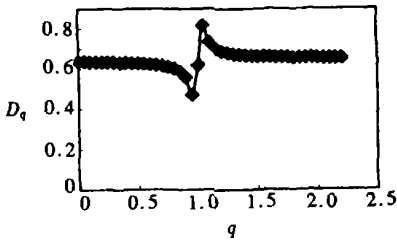


图 6  $\Omega = 6.0$  扰动下稳态解的广义分形谱图

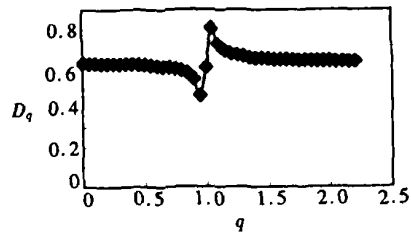


图 7  $\Omega = 3.2$  扰动下稳态解的广义分形谱图

## 5 结 论

1) 杜芬方程的 1/3 纯亚谐振动可用解假设式(5)描述, 在小扰动范围内, 假设解式(5)可成功地近似于真实的 1/3 亚谐解。

2) 在  $\delta = 0.01$  及小初始扰动的情况下, 由参数  $a_{1/3}$ ,  $b_{1/3}$  表示的轨迹趋于渐近稳定的焦点, 表征了亚谐振动的渐近稳定性。亚谐响应幅值系数  $a_{1/3}$ ,  $b_{1/3}$  对阻尼的改变很敏感。

3) 广义维数的敏感维数能清楚地描述杜芬方程纯亚谐解过渡过程特性, 对改变初始扰动、阻尼系数、激励幅值情况下的两个不同频域的过渡过程的不同分形特性显现出敏感性。

### [参 考 文 献]

- [1] 徐玉秀, 鲍文博, 胡海岩, 等. 杜芬方程的纯亚谐解及其过渡过程[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(5): 519—524.
- [2] Meinke P H. Study of phase\_synchronization and energy trajectory to sub\_harmonic vibration[J]. Engineering, 1992, 41(5): 28—62.
- [3] 谢和平. 分形—岩石力学[M]. 北京: 科学出版社, 1996, 11—60.
- [4] Kreuzer E. Numerical Study of Non\_Linear Dynamic[M]. Berlin: Springer Press, 1987.
- [5] 徐玉秀, 原培新, 杨文平. 复杂机械故障诊断的分形与小波方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003.

# A 1/3 Pure Sub\_Harmonic Solution and Fractal Characteristic of Transient Process for Duffing' s Equation

XU Yu\_xiu<sup>1</sup>, HU Hai\_yan<sup>2</sup>, WEN Bang\_chun<sup>3</sup>

(1. School of Mechanical and Electronic Engineering,

Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160, P. R. China ;

2. Institute of Vibration Engineering, Nanjing University of Aeronautics and

Astronautics, Nanjing 210016, P. R. China ;

3. School of Mechanical and Automatization, Northeast University,

Shenyang 110006, P. R. China)

**Abstract:** The 1/3 sub\_harmonic solution for the Duffing' s with damping equation was investigated by using the methods of harmonic balance and numerical integration. The assumed solution was introduced, and the domain of sub\_harmonic frequency was found. The asymptotical stability of the sub\_harmonic resonances and the sensitivity of the amplitude responses to the variation of damping coefficient were examined. Then, the subharmonic resonances were analyzed by using the techniques from the general fractal theory. The analysis indicates that the sensitive dimensions of the system time\_field responses show sensitivity to the conditions of changed initial perturbation, changed damping coefficient or the amplitude of excitation, thus the sensitive dimension can clearly describe the characteristic of the transient process of the subharmonic resonances.

**Key words:** Duffing' s equation; subharmonic; transient process; fractal characteristic; sensitive dimension