

位势平面问题的新的规则化边界积分方程^{*}

张耀明¹, 吕和祥², 王利民¹

(1. 山东理工大学 数学学院 应用数学所, 山东 淄博 255049;
2. 大连理工大学 力学系, 大连 116024)

(我刊编委吕和祥来稿)

摘要: 广泛实践集中在直接变量边界积分方程的规则化研究, 其本质是利用简单解除边界积分的奇异性。然而, 至今关于平面位势问题的第一类边界积分方程的规则化研究尚未涉足。致力于间接变量边界积分方程的规则化方法研究, 基于一种新的思想和观点, 确立平面位势问题的间接变量规则化边界积分方程, 它不包含 CPV 强奇异积分和 HFP 超奇异积分。数值算例表明现在的方法可取得很好的精度和效率, 特别是边界量的计算。

关键词: 位势平面问题; 边界积分方程(BIEs); 间接变量 BIEs; 规则化 BIEs
中图分类号: O342 **文献标识码:** A

引 言

不同于别的离散方法, 边界元法涉及奇异核积分, 这是由所研究问题的控制微分方程的基本解(及其导数)所引起的。按幂划分, 通常有 3 种不同的奇异积分^[1~2]: 弱奇异积分(Riemann 意义下可积分)、强奇异积分(柯西主值意义下, 简称 CPV 积分)及超奇异积分(Hadamard Finite Part 意义下, 简称 HFP 积分)。已发展了许多数值处理技术和边界归化方法, 可分为“局部措施”^[3~6]和“整体措施”^[7~10]。前者是对奇异单元积分的直接计算或近似, 有解析和半解析法、Gaussian 求积公式、变换法及有限部分法等。后者是通过建立新的边界积分方程, 间接计算 CPV 和 HFP 积分, 如域外奇点法, 虚边界元法及简单解法等。

和直接边界元法相比较, 间接法更简单、灵活和适用。首先, 基本场变量和其导数不直接关联; 其次, 间接法更容易改变边界积分方程的形式, 以适合不同边界条件的边值问题; 再者, 基本场变量的梯度方程中不含有 HFP 积分。然而, 很遗憾, 在边界元家族中间接法的规则化方程至今尚未得到充分的研究。本文基于一种新的思想和观点^[10], 建立位势平面问题的间接变量规则化边界积分方程。它无需处理 HFP 积分, 和已有的直接变量边界元法相比, 大大地降低了处理问题的复杂性, 改进了计算效率和解的精度。

1 基本定理

本文总假定 Ω 是 R^2 中的一个有界区域, Ω_c 是其补域, $\Gamma = \partial \Omega$ 是它们的共同边界。 $t(x)$,

* 收稿日期: 2004_07_31; 修订日期: 2006_04_29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571110); 山东省自然科学基金资助项目(2003ZX12)。

作者简介: 张耀明(1962—), 男, 山西五寨人, 教授, 博士(联系人, E-mail: zymfc@163.com)。

$\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 分别是区域 Ω 的边界 Γ 在点 \mathbf{x} 处的单位切、外法向量。位势问题的基本解是 $u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1/2\pi) \ln(1/r)$ 。

引理 1^[2] 基本解具有特性

$$\int_{\Gamma} \dots \mathbf{y} \cdot u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} = \begin{cases} -1, & \mathbf{y} \in \Omega, \\ 0, & \mathbf{y} \in \Omega_c. \end{cases}$$

定理 1^[10] 设 Γ 是分段光滑曲线, 那么有

$$\int_{\Gamma} \dots r_{,k}^2 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} = \begin{cases} -2\pi + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \ln r}{\partial x_k} n_k(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}}, & \mathbf{y} \in \Omega, \\ 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \ln r}{\partial x_k} n_k(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}}, & \mathbf{y} \in \Omega_c, \end{cases} \quad (k = 1, 2),$$

$$\int_{\Gamma} \dots \ln r \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} = 0, \quad \int_{\Gamma} \dots r_{,k}^2 \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} = 0,$$

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega \cup \Omega_c,$$

$$\int_{\Gamma} \dots (r, 1r, 2) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} = 0,$$

$$\int_{\Gamma} \dots (r, 1r, 2) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} =$$

$$2 \int_{\Gamma} n_l(\mathbf{x}) \frac{\partial \ln r}{\partial x_k} d\Gamma_{\mathbf{x}}, \quad (k \neq l), \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega \cup \Omega_c.$$

定理 2 设 Γ 是分段光滑曲线(开或闭), $\hat{\mathbf{x}}$ 是 Γ 的一个点(可能是角点), 令 $d = \inf_{\mathbf{x} \in \Gamma} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ 和 $h = |\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}|$ 。若 $\phi(\mathbf{x}) \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ 和 $h/d \leq K_1$ (K_1 是常数), 那么有

$$\lim_{\mathbf{y} \in \hat{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma} [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\hat{\mathbf{x}})] \frac{x_k - y_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\Gamma_{\mathbf{x}} = \int_{\Gamma} [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\hat{\mathbf{x}})] \frac{x_k - \hat{x}_k}{|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^2} d\Gamma_{\mathbf{x}} \quad (k = 1, 2).$$

证明 我们给出 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 Γ 的一个角点, 且 $k = 1$ 的情形的证明, 其它同理可证。对任意的 $\varepsilon > 0$, 上式左右两边的差是

$$\Delta = \int_{\Gamma} \left[\frac{x_1 - y_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} - \frac{x_1 - \hat{x}_1}{|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^2} \right] [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\hat{\mathbf{x}})] d\Gamma_{\mathbf{x}}.$$

对小的 $\delta > 0$, 设 $\Gamma_{\delta} = \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid |\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}| \leq \delta\}$, $\Gamma_c = \Gamma - \Gamma_{\delta}$ 。进一步用 Γ_{δ}^- 和 Γ_{δ}^+ 分别表示 Γ_{δ} 在 $\hat{\mathbf{x}}$ 的左、右部分, 于是 Δ 可分成: Γ_{δ}^- 上的积分 Δ_1 , Γ_{δ}^+ 上的积分 Δ_2 及 Γ_c 上的积分 Δ_3 。首先我们估计 Δ_1 。使用 $|y_k - \hat{x}_k| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, 有

$$\left| \frac{x_1 - y_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} - \frac{x_1 - \hat{x}_1}{|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^2} \right| \leq \frac{K_2}{|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|} \quad (K_2 \text{ 是常数}),$$

又 $|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\hat{\mathbf{x}})| \leq K_3 |\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^{\alpha}$ (α, K_3 是常数, 且 $0 < \alpha \leq 1$), 所以

$$|\Delta_1| \leq K_2 K_3 \int_{\Gamma_{\delta}^-} \frac{1}{|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^{1-\alpha}} d\Gamma_{\mathbf{x}},$$

Γ_{δ}^- 在端点 $\hat{\mathbf{x}}$ 处光滑, 因此弧 $\widehat{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}$ 和相应弦 t 的长度比是有界的, 即 $|d\Gamma_{\mathbf{x}}/dt| \leq K_4$ (K_4 常数), 于是

$$|\Delta_1| \leq K_2 K_3 K_4 \int_0^{\delta} \frac{1}{t^{1-\alpha}} dt \leq K_5 \delta^{\alpha} \quad (K_5 \text{ 是常数}),$$

选择充分小的 δ , 可得 $|\Delta_1| \leq \varepsilon/2$ 。同样可得 $|\Delta_2| \leq \varepsilon/2$ 。当 δ 固定后, 因 $\hat{\mathbf{x}}$ 不包括在 Γ_c 内, 因此选择充分小的 $|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}|$, 有 $|\Delta_3| \leq \varepsilon/2$ 。

推论 1 在定理 2 的条件假设下, 有

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \hat{x}} \int_{\Gamma} [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} = \\ \int_{\Gamma} [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}(\hat{\mathbf{x}}) d\Gamma_{\mathbf{x}}, \\ \lim_{y \rightarrow \hat{x}} \int_{\Gamma} [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} = \\ \int_{\Gamma} [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) d\Gamma_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

注 1 定理 2 和推论 1 包括了特别的极限过程: 对任意给定的 $\hat{\mathbf{x}} \in \Gamma$, 令 $y \rightarrow \hat{x}_1$, 其中 $y = \hat{x} + hn(\hat{x})$, $\hat{x}_1 = \lim_{h \rightarrow +0} (\hat{x} + hn(\hat{x}))$.

2 规则化边界积分方程

我们将推导 Ω_c 上的边界积分方程, Ω 上的可如法炮制. 位势表示式^[2]是

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \\ \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega + C, \quad \mathbf{y} \in \Omega = \Omega_c \text{ 或 } \Omega, \end{aligned}$$

设 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 Γ 的光滑点, 利用引理 1 和定理 1, 可得

$$\begin{aligned} \dot{u}(\mathbf{y}) = \int_{\Omega_c} f(\mathbf{x}) \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega_c + \int_{\Gamma} [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{x}} - \\ \phi(\hat{\mathbf{x}}) \left\{ \int_{\Gamma} [t_c(\mathbf{x}) - t_c(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot t_c(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \right. \\ \left. \int_{\Gamma} [n_c(\mathbf{x}) - n_c(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot n_c(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} \right\}. \end{aligned}$$

若 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 Γ 的二阶光滑点, 有 $t_l(\hat{\mathbf{x}}) \in C^{0,q}(\Gamma)$, $n_l(\hat{\mathbf{x}}) \in C^{0,q}(\Gamma)$ ($l = 1, 2$). 因此当 $y \rightarrow \hat{x}$, 使用定理 2 和推论 1, 得规则化边界积分方程(\hat{x} 被写成 y)

$$\int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_c} f(\mathbf{x}) d\Omega_c = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \\ \int_{\Omega_c} f(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega_c + C, \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(\mathbf{y}) = \int_{\Omega_c} f(\mathbf{x}) \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega_c + \int_{\Gamma} [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})] \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{x}} - \\ \phi(\mathbf{y}) \left\{ \int_{\Gamma} [t_c(\mathbf{x}) - t_c(\mathbf{y})] \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot t_c(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \right. \\ \left. \int_{\Gamma} [n_c(\mathbf{x}) - n_c(\mathbf{y})] \cdot \dot{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot n_c(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $t_c(\mathbf{x})$, $n_c(\mathbf{x})$ 分别是区域 Ω_c 的边界 Γ 在点 \mathbf{x} 处的单位切、外法向量.

类似地, 可得 Ω 上的规则化边界积分方程

$$\int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = 0, \quad (4)$$

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{x}} +$$

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega + C, \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore u(\mathbf{y}) = & \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \therefore u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega + \phi(\mathbf{y}) - \int_{\Gamma} [f(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})] \therefore u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_x - \\ & \phi(\mathbf{y}) \left\{ \int_{\Gamma} [t(\mathbf{x}) - t(\mathbf{y})] \therefore u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot t(\mathbf{x}) d\Gamma_x + \right. \\ & \left. \int_{\Gamma} [n(\mathbf{x}) - n(\mathbf{y})] \therefore u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot n(\mathbf{x}) d\Gamma_x \right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

注2 如果 $\phi(\mathbf{x}) \in C^{0, a_1}(\Gamma)$, $t(\mathbf{x}) \in C^{0, a_2}(\Gamma)$, $n(\mathbf{x}) \in C^{0, a_3}(\Gamma)$, 那么方程(3)和方程(6)中的积分的奇异性被消除。以上方程经适当的组合变形后, 可适用于任何边界条件的内、外边值问题。

3 数值实施

密度分布函数 $\phi(\mathbf{x})$ 采用二次不连续插值, 形函数为

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{\xi}{\gamma} \left[\frac{\xi}{\gamma} - 1 \right], \quad \phi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{\xi}{\gamma} \left[1 + \frac{\xi}{\gamma} \right], \quad \phi_3(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\xi^2}{\gamma^2}, \quad \gamma \in (0, 1]$$

(当 $\gamma = 1$ 属通常的连续插值)。假设场点是 \mathbf{x}^3 (相应的无因次坐标是 $\xi = 0$), 有

$$\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}^3) = \frac{1}{2} \frac{\xi}{\gamma} \left[\frac{\xi}{\gamma} - 1 \right] [\phi(\mathbf{x}^1) - \phi(\mathbf{x}^3)] + \frac{1}{2} \frac{\xi}{\gamma} \left[1 + \frac{\xi}{\gamma} \right] [\phi(\mathbf{x}^1) - \phi(\mathbf{x}^3)],$$

因此因子 ξ 保证方程(3)和方程(6)中的积分的奇异性被消除。

例1 给定半径为 1 的无限长圆柱表面的温度分布

$$u(r, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi, \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

在稳定状态下, 问题的解为下列型式的 Fourier 级数^[1]

$$\frac{u(r, \theta)}{u_0} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left(\frac{r}{R} \right)^n \sin n\theta, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

表 1 内点数值结果

内点	普通直接法 ^[1]		本文(不连续单元)		解析解
	24 常单元 (24 节点)	48 常单元 (48 节点)	12 线性单元 (24 节点)	16 二次单元 (48 节点)	
1	0.500	0.500	0.500 000 0E+ 00	0.500 000 0E+ 00	0.500
2	0.799	0.796	0.795 408 2E+ 00	0.795 182 6E+ 00	0.795
3	0.776	0.774	0.772 614 4E+ 00	0.772 885 3E+ 00	0.773
4	0.689	0.688	0.686 523 8E+ 00	0.687 389 0E+ 00	0.687
5	0.500	0.500	0.500 000 0E+ 00	0.500 000 0E+ 00	0.500
6	0.311	0.312	0.313 476 2E+ 00	0.312 610 9E+ 00	0.313
7	0.224	0.226	0.227 385 6E+ 00	0.227 114 6E+ 00	0.227
8	0.201	0.204	0.204 591 8E+ 00	0.204 817 4E+ 00	0.205

方程(5)中的常数 C 的数值结果

4.999 999 9E- 001

图 1 给出内点位置分布。表 1 列出了在不同离散单元数(12 个不连续线性单元和 16 个不连续二次单元)下, 内点位势的数值结果及与普通边界元直接法、解析解的比较。图 2 描绘了沿四分之一边界(0~ $\pi/2$) 径向通量的数值结果。

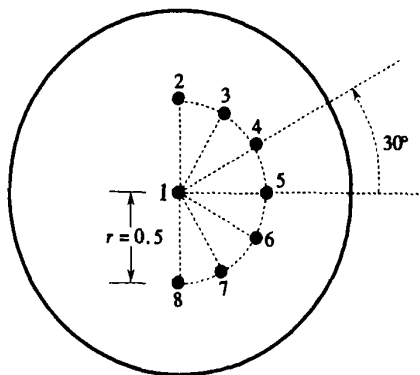


图 1 内点分布

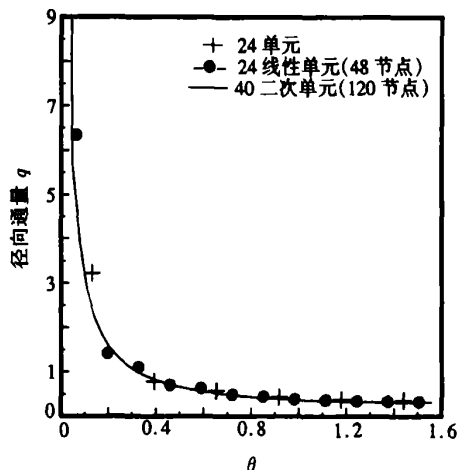


图 2 四分之一边界的径向通量

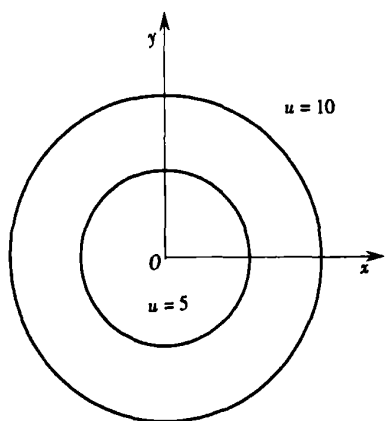


图 3 表面温度

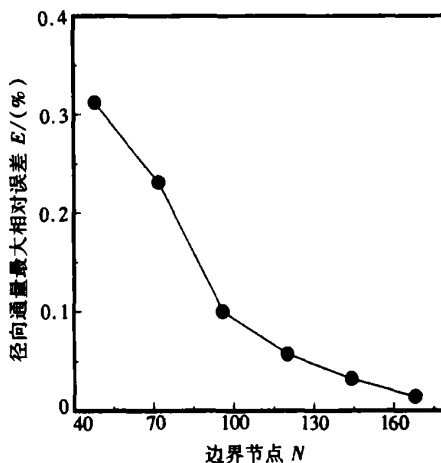


图 4 通量的最大相对误差收敛曲线

表 2

不使用方程 (4) 的间接边界元法

内点	48 常单元	96 常单元	48 线性单元	96 线性单元
1	- 0.332 324 6E- 12	- 0.183 209 8E- 11	0.259 013 6E- 14	0.628 356 8E- 14
2	0.295 301 5E+ 00	0.295 193 3E+ 00	0.292 887 0E+ 00	0.294 034 9E+ 00
3	0.272 992 4E+ 00	0.272 854 2E+ 00	0.270 455 3E+ 00	0.271 644 8E+ 00
4	0.187 458 3E+ 00	0.187 240 6E+ 00	0.184 962 2E+ 00	0.186 070 3E+ 00
5	- 0.497 456 7E- 08	0.329 141 3E- 05	0.888 178 4E- 14	- 0.106 581 4E- 13
6	- 0.187 456 5E+ 00	- 0.187 239 4E+ 00	- 0.184 962 2E+ 00	- 0.186 070 3E+ 00
7	- 0.272 988 5E+ 00	- 0.272 855 5E+ 00	- 0.270 455 3E+ 00	- 0.271 644 8E+ 00
8	- 0.295 299 2E+ 00	- 0.295 196 6E+ 00	- 0.292 887 0E+ 00	- 0.294 034 9E+ 00

例 2 如图 3 所示, 一个厚壁圆筒, 其内、外边界分别半径为 0.5 和 1 的圆周, 圆筒上给定表面温度分布边界条件。几何边界采用等间隔离散, 内、外边界的离散节点数的比是 3: 5, 边界函数采用二次不连续插值近似。图 4 给出通量的最大相对误差收敛曲线。

感谢 山东理工大学科研基金资助项目(2004KJZ08)

[参 考 文 献]

- [1] Brebbia C A, Tels J C F, Wrobel L C. Boundary Elements Techniques Theory and Application in Engineering [M]. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer Verlag, 1984.
- [2] 孙焕纯. 无奇异边界元法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1999.
- [3] 张耀明, 孙焕纯. 直接边界元法中边界积分的解析处理[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(6): 593—601.
- [4] Wang John, Tsay Ting_Kuei. Analytical evaluation and application of the singularities in boundary element method[J]. Engng Anal Boundary Elements, 2005, 29(3): 241—256.
- [5] Lifeng M A, Alexander M Korsunsky. A note on the Gauss_Jacobi quadrature formulae for singular integral equations of the second kind[J]. International Journal of Fracture, 2004, 126(4): 339—405.
- [6] Davydov A G, Zakharov E V. Some computational aspects of the hypersingular integral equation method in electrodynamics[J]. Computational Mechanics, 2004, 15(2): 105—109.
- [7] Liu Y J. On the simple_solution method and non_singular nature of the BIE/ BEM_a review and some new results[J]. Engng Anal Boundary Elements, 2000, 24(10): 789—795.
- [8] Jorge A B, Ribeiro G O, Cruse T A. Self_regularized boundary integral equation formulations for Laplace's equation in 2_D[J]. Internat J Numer Methods Engng, 2001, 51(1): 1—29.
- [9] Krutitskii P A. Hypersingular integral equations not needed in the impedance problem in scattering theory[J]. Computers and Mathematics With Applications, 2003, 45(1/3): 391—399.
- [10] 张耀明, 温卫东, 王利民, 等. 弹性力学平面问题中一类新的无奇异边界积分方程[J]. 力学学报, 2004, 36(3): 311—321.

Novel Regularized Boundary Integral Equations for Potential Plane Problems

ZHANG Yao_ming¹, LÜ He_xiang², WANG Li_min¹

(1. Institute of Applied Mathematics, School of Mathematics,

Shandong University of Technology, Zibo, Shandong 255049, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P. R. China)

Abstract The universal practices have been centralizing on the research of regularization to the DBIE. The character is elimination of singularities by using the simple solutions. However, up to now the research of regularization to the first kind integral equations for plane potential problems has never been found in previous literatures. The presentation was mainly devoted to the research on the regularization of the singular boundary integral equations with indirect unknowns. A novel view and idea was presented herein, in which the regularized boundary integral equations with indirect unknowns excluding the CPV and HFP integrals were established for the plane potential problems. With some numerical results, it is shown that the better accuracy and higher efficiency, especially on the boundary, can be achieved by the present system.

Key words: potential plane problems; boundary integral equations(BIEs); indirect BIEs; regularization of BIEs